పాఠము - 1

ప్రథమ పరిమాణ ఏకఘాత అవకలన సమీకరణాలు - సమఘాతీయ అవకలన సమీకరణాలు, యదార్థ అవకలన సమీకరణాలు

1.1 పాఠము యొక్క లక్ష్యము :-

విద్యార్థి ఈ అధ్యాయము చదివిన తరువాత సమఘాతీయ, అసమఘాతీయ సమీకరణాలు, యదార్థ అవకలన సమీకరణాలను గురించి తెలుసుకొనుటయే కాక వాటి సాధన పద్ధతి కూడా అభ్యసిస్తాడు.

1.2 పాఠ్యాంశము యొక్క స్వరూపము :-

పాఠము నందలి అంశములు :

1.3.1. ఉపోద్ఘాతము :-

భౌతిక, రసాయనిక, సాంఘిక శాస్త్రాలలోను, ఇంజనీరింగ్ శాఖలలోని సమస్యలను పరిష్కరించేందుకు సాధారణ అవకలన సమీకరణాలను ఉపయోగించుట అవసరము.

1.3.2. సాధారణ అవకలన సమీకరణము :-

ఒకే ఒక స్వతంత్ర చలరాశి, దాని దృష్ట్యా అస్వతంత్ర చలరాశుల అవకలనములను లేదా అవకలజాలను కలిగిన సమీకరణాన్ని సాధారణ సమీకరణము అంటాం.

ఉదాహరణలు :- 1. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + y = 0$ 2. $\frac{dy}{dx} + 4y = 0$

1.3.3. అవకలన సమీకరణ పరిమాణం లేదా క్రమము :-

అవకలన సమీకరణంలో అత్యధిక పరిమాణం లేదా క్రమము ఉన్న అవకలజపు పరిమాణఆన్ని ఆ అవకలన సమీకరణ పరిమాణం లేదా క్రమము అంటాం.

ఉదాహరణ :- $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 7y = 0$, ఈ అవకలన సమీకరణ పరిమాణం లేదా క్రమము $= 2$.

1.3.4. నిర్వచనము :-

$F\left(x, y, y', y'', \cdots\cdots, y^m\right)$, m కలిగిన ఒక అవకలన సమీకరణం. ఈ అవకలన సమీకరణాన్ని బీజీయ పరిక్రియల ద్వారా అవకలజాలలో బహుపది సమీకరణముగా దానిలో అవకలజాల ఘాతాలు కనిష్టంగా ఉండేలా వ్రాయగలిగినపుడు దానిలోని గరిష్ట అవకలజపు గరిష్ట ఘాతాన్ని ఆ అవకలన సమీకరణపు తరగతి లేదా ఘాతం అంటాం. ఇక్కడ $y', y'', \cdots\cdots, y^m$ లు వరుసగా మొదటి, రెండవ, ... m వ అవకలనాలు 'x' దృష్ట్యాను సూచిస్తాయి.

ఉదాహరణ :- $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \frac{dy}{dx}}$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$\therefore$ ఈ అవకలన సమీకరణానికి తరగతి $= 2$, పరిమాణం $= 2$.

1.3.5. అవకలన సమీకరణ సాధన :-

దత్త అవకలన సమీకరణాన్ని తృప్తిపరుస్తూ అవకలజాలు లేకుండా కొన్ని యాదృచ్ఛిక స్థిరరాశులు కలిగి ఉండి, స్వతంత్ర, అస్వతంత్ర చలరాశుల మధ్యగల సంబంధాన్ని సూచించే సమీకరణాన్ని అవకలన సమీకరణపు సాధన అంటాం.

1.3.6. అవకలన సమీకరణ సాధారణ సాధన :-

$\phi(x, y, y_1, y_2, ..., y_n) = 0$ అనునది 'n' పరిమాణం కలిగిన అవకలన సమీకరణం అయిన $F(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0$, $c_1, c_2, ..., c_n$ యాధృచ్ఛిక స్థిర రాశులు అయిన $F(x, y, c_1, ..., c_n) = 0$ ను దత్త అవకలన సమీకరణానికి సాధారణ సాధన అవుతుంది.

1.3.7. అవకలన సమీకరణానికి ప్రత్యేక సాధన మరియు అసాధారణ సాధన :-

ప్రత్యేక సాధన :-

$F(x,y,y_1, y_2,............,y_n)=0$ అను అవకలన సమీకరణానికి సాధారణ సాధన $\phi(x,y, x_1, c_2,..........,c_n)$ అయిన $\phi(x, y, K_1, K_2, ...,K_n)=0$ $K_1, K_2, ...,K_n$ స్థిర సంఖ్యలను $F(x, y, y_1, y_2,.............,y_n)=0$ సమీకరణ ప్రత్యేక సాధన అంటాం.

1.3.8 అసాధారణ సాధన :-

$\phi(x, y, y_1, y_2,................,y_n)=0$ అను అవకలన సమీకరణానికి $F(x,y)=0$ దత్త అవకలన సమీకరణాన్ని తృప్తిపరుస్తూ, $F(x,y)=0$లో యాదృచ్ఛిక స్థిరరాశులు లేకున్న లేదా సాధారణ సాధనలోని యాధృచ్ఛిక చలరాశులకు ప్రత్యేక విలువలను ఇచ్చుట ద్వారా $F(xy)=0$ రానిచో $F(x\ \ y)=0$ను అసాధారణ సాధన అంటాం. (Singular Solution).

1.3.9 ప్రథమ పరిమాణ ఏకఘాత అవకలన సమీకరణాలు :-

$\frac{dy}{dx}=f(x\ y)$ అనునది ఒక ప్రథమ పరిమాణ ఏకఘాత అవకలన సమీకరణము.

ప్రథమ పరిమాణ ఏకఘాత అవకలన సమీకరణాన్ని ఈ క్రింది నాలుగు పద్ధతులలో సాధించవచ్చును.

(1) విభజనీయ చలరాశుల పద్ధతి

(2) సమఘాతీయ, అసమఘాతీయ అవకలన సమీకరణాలు

(3) యదార్థ అవకలన సమీకరణాలు మరియు యదార్థ అవకలన సమీకరణంలోని మార్చగలిగిన అవకలన సమీకరణాలు

(4) సరళ అవకలన సమీకరణాలు మరియు బెర్నోలి సమీకరణాలు

1.4.1 విభజనీయ చలరాశుల పద్ధతి :-

అవకలన సమీకరణం, $\frac{dy}{dx}=F(x,y)$ను $\frac{dy}{dx}=\frac{F(x)}{g(y)}$ లేదా $\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y)$గా రాయగలిగితే (ఇందులో $f(x), g(y)$ అవిఛిన్న ప్రమేయాలు) అప్పుడు $\frac{dy}{dx}=F(x, y)$ను విభజనీయ చలరాశుల పద్ధతిలో సాధించవచ్చు. కొన్ని అవకలన సమీకరణాలను విభజనీయ చలరాశుల పద్ధతిలోనికి మార్చవచ్చును.

1.4.2 సమస్య : $\dfrac{dy}{dx}=e^{x-y}+x^2e^{-y}$ సాధించుము.

సాధన: దత్త సమీకరణము $\dfrac{dy}{dx}=e^{x-y}+x^2e^{-y}=\dfrac{e^x+x^2}{e^y}$

$$\Rightarrow e^y\,dy=\left(e^x+x^2\right)dx$$

ఇరువైపులా సమాకలనము చేయగా

$$\int e^y dy=\int\left(e^x+x^2\right)dx$$

$$\Rightarrow e^y=e^x+\frac{x^3}{3}+c$$

1.4.3 సమస్య : $\left(1+x^3\right)xy\,\dfrac{dy}{dx}=\left(1+y^2\right)\left(1+x+x^2\right)$

సాధన : దత్త సమీకరణము $\left(1+x^2\right)xy\dfrac{dy}{dx}=\left(1+y^2\right)\left(1+x+x^2\right)$

$$\Rightarrow \frac{y}{1+y^2}\,dy=\frac{\left(1+x+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)x}dx$$

ఇరువైపులా సమాకలనము చేయగా

$$\int\frac{y}{1+y^2}dy=\int\frac{1+x+x^2}{\left(1+x^2\right)x}\,dx=\int\frac{\overline{1+x^2}+\bar{x}}{\left(1+x^2\right)x}\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int\frac{2y}{1+y^2}\,dy=\int\frac{1+x^2+x}{\left(1+x^2\right)x}\,dx=\int\frac{1}{x}+\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\log\left|1+y^2\right|=\log|x|+\tan^{-1}x+c$$

1.4.4 సమస్య : $\frac{dy}{dx} = (4x + y + 1)^2$

సాధన : దత్త సమీకరణము $\frac{dy}{dx} = (4x + y + 1)^2$ ------------- (1)

$4x + y + 1 = t$ అనుకొనుము --------- (2)

'x' దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$4 + \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} - 4 \text{ -------- (3)}$$

(2) మరియు (3) లను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\frac{dt}{dx} - 4 = t^2$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx} = t^2 + 4$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{t^2 + 4} = dx$$

ఇరువైపులా సమాకలనము చేయగా

$$\int \frac{dt}{t^2 + 4} = \int dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{t}{2}\right) = x + c$$

సాధారణ సాధన,

$$\frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{4x + y + 1}{2}\right) = x + c$$

1.5 సమఘాతీయ అవకలన సమీకరణాలు :-

1.5.1 సమ ఘాతీయ ప్రమేయము :- $F(Kx,\ Ky) = K^n F(x, y)\ \forall\ 0 \neq K \in R$ అయిన $F(x, y)$ను "n"వ ఘాత సమఘాత సమీకరణం అంటాం.

ఉదాహరణ : (1) $F(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x + y}$

$$\text{ఇక్కడ}\quad F(Kx,\ Ky) = \frac{K^2x^2 + K^2y^2}{Kx + Ky} = \frac{K\left(x^2 + y^2\right)}{(x + y)} = K \cdot F(x, y)$$

$\therefore F(x, y)$ ఏకఘాత సమ ఘాతీయ ప్రమేయము.

(2) $F(x, y) = \sin x + \cos y$

ఇక్కడ $F(Kx, Ky) = \sin Kx + \cos Ky \neq K \sin x + K \cos y$

$\therefore F(x, y)$ సమ ఘాతీయ ప్రమేయము కాదు.

1.5.2 సమఘాతీయ అవకలన సమీకరణము :-

$\dfrac{dy}{dx} = F(x, y)$లోని $F(x, y)$ ఘాత సంఖ్య '0'గా గల సమఘాతీయ ప్రమేయము అయితే దీనిని సమఘాతీయ అవకలన సమీకరణం అంటాం.

ఉదాహరణ (1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y}{x - y}$

$$F(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$$

$$\text{ఇక్కడ}\quad F(K\,x, K\,y) = \frac{K\,x + K\,y}{K\,x - K\,y} = \frac{x + y}{x - y} = K^0\, F(x, y)$$

$\therefore F(x, y)$ ఘాత సంఖ్య "0"గా కలిగిన సమఘాతీయ ప్రమేయము.

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y}{x - y}$, సమ ఘాతీయ అవకలన సమీకరణము.

సమఘాతీయ అవకలన సమీకరణము - సాధన :-

(1) సమ ఘాతీయ అవకలన సమీకరణ సాధారణ రూపం $\frac{dy}{dx}=\mathrm{F}(x,y)$ అనుకొందాము.

$$\frac{dy}{dx}=\mathrm{F}(x,y)=\mathrm{F}(1,\ \mathrm{y/x}) \text{---------} (1)$$

$y=\mathrm{v}x$ అనుకొనుము ------- (2)

" x " దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$\frac{dy}{dx}=\mathrm{v}+x\frac{d\,\mathrm{v}}{dx} \text{-----------} (3)$$

(2) మరియు (3) లను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\mathrm{v}+x\frac{d\,\mathrm{v}}{dx}=\mathrm{F}(1,\mathrm{v})$$

$$\therefore\ x\frac{d\,\mathrm{v}}{dx}=\mathrm{F}(1,\mathrm{v})-\mathrm{v}$$

విభజనీయ చలరాశుల పద్ధతిలో సాధన చేయగా సాధారణ సాధన $\mathrm{F}(x,\mathrm{v},c)=0$.

$\mathrm{v}=\frac{y}{x}$ ప్రతిక్షేపించగా సాధారణ సాధన $\mathrm{F}\left(x,\frac{y}{x},c\right)=0$

2. సమఘాతీయ అవకలన సమీకరణ సాధారణ రూపం $\frac{dx}{dy}=\mathrm{F}(x,y)$

$$\frac{dx}{dy}=\mathrm{F}(x,y)=\mathrm{F}\left(\frac{x}{y},1\right) \text{---------} (1)$$

$x=\mathrm{v}\,y$ అనుకొనుము .... (2)

" y " దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$\frac{dx}{dy}=\mathrm{v}+y\frac{d\,\mathrm{v}}{dy} \text{-------} (3)$$

(2) మరియు (3) లను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\mathrm{v} + y\frac{d\,\mathrm{v}}{dy} = \mathrm{F}(\mathrm{v},1)$$

$$\Rightarrow\ y\frac{d\,\mathrm{v}}{dy} = f(\mathrm{v},1) - \mathrm{v}$$

విభజనీయ చలరాశుల పద్ధతిలో సాధన చేయగా

సాధారణ సాధన $\mathrm{F}(\mathrm{v},\ \mathrm{y},\ \mathrm{c}) = 0$

$\mathrm{v} = \frac{x}{y}$ ని ప్రతిక్షేపించగా

$$\mathrm{F}\left(\frac{x}{y}, y, c\right) = 0$$

1.5.3 : $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$ సాధించుము.

సాధన : దత్త సమీకరణం $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$ --------- (1)

ఇక్కడ $\mathrm{F}(x, y) = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$

ఇప్పుడు $\mathrm{F}(\mathrm{K}\,x, \mathrm{K}\,y) = \frac{\mathrm{K}\,y}{\mathrm{K}\,x} + \tan\left(\frac{\mathrm{K}\,y}{\mathrm{K}\,x}\right) = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x} = \mathrm{F}(x, y)$

$\therefore$ (1) సమ ఘాతీయ అవకలన సమీకరణము

$y = \mathrm{v}\,x$ ---------(2)

"x" దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{v} + x\frac{d\,\mathrm{v}}{dx} \quad \text{--------- (3)}$$

(2) మరియు (3)లను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\text{v} + x\frac{d\,\text{v}}{dx} = \frac{\text{v}\,x}{x} + \tan\frac{\text{v}\,x}{x} = \text{v} + \tan\text{v} \;\Rightarrow x\frac{d\,\text{v}}{dx} = \tan\text{v}$$

$$\int \frac{d\,\text{v}}{\tan\text{v}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int \cot\text{v}\, d\,\text{v} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \log|\sin\text{v}| = \log|x| + \log c$$

$$\Rightarrow \log|\sin\text{v}| = \log|cx|$$

$$\Rightarrow \sin\text{v} = cx$$

$\therefore$ సాధారణ సాధన $\sin\frac{y}{x} = cx$

1.5.4: $xdy = \left(y + x\cos^2\frac{y}{x}\right)dx$ సాధించుము.

సాధన: దత్త సమీకరణము $\text{xdy} = \left(\text{y} + \text{x}\cos^2 \text{y}/\text{x}\right)\text{dx}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y + x\cos^2 y/x}{x}$$

$$= \frac{y}{x} + \cos^2\left(\frac{y}{x}\right) \text{ ---------- (1)}$$

ఇప్పుడు (1)

ఇప్పుడు $y = \text{v}\,x$ --------- (2)

"x" దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \text{v} + x\frac{d\,\text{v}}{dx} \text{ --------- (3)}$$

(2) మరియు (3)లను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\mathrm{v}+x\frac{d\,\mathrm{v}}{dx}=\mathrm{v}+\cos^2\mathrm{v}$$

$$\Rightarrow x\frac{d\,\mathrm{v}}{dx}=\cos^2\mathrm{v}$$

$$\Rightarrow \int\frac{d\,\mathrm{v}}{\cos^2\mathrm{v}}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int\sec^2\mathrm{v}\;d\,\mathrm{v}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \tan\mathrm{v}=\log|x|+c$$

$\therefore$ సాధారణ సాధన $\tan\frac{y}{x}=\log|x|+c$

1.5.5: $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x+y}$ సాధించుము.

సాధన : దత్త సమీకరణము

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x+y} \text{ -------- (1)}$$

$$\mathrm{F}(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$$

$$\mathrm{F}(\mathrm{K}\,x,\mathrm{K}\,y)=\frac{\mathrm{K}\,x-\mathrm{K}\,y}{\mathrm{K}\,x+\mathrm{K}\,y}$$

$$=\frac{x-y}{x+y}\quad=\mathrm{F}(x,y)$$

$$y=\mathrm{v}\,x \text{ -------- (2)}$$

"x" దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$\frac{dy}{dx}=\mathrm{v}+x\frac{d\,\mathrm{v}}{dx} \text{ ----- (3)}$$

(2) మరియు (3) లను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\mathrm{v}+x\frac{d\,\mathrm{v}}{dx}=\frac{x-\mathrm{v}\,x}{x+\mathrm{v}\,x}=\frac{1-\mathrm{v}}{1+\mathrm{v}}$$

$$\Rightarrow x\frac{d\,\mathrm{v}}{dx}=\frac{1-\mathrm{v}}{1+\mathrm{v}}-\mathrm{v}=\frac{1-\mathrm{v}-\mathrm{v}-\mathrm{v}^2}{1+\mathrm{v}}$$

$$\Rightarrow x\frac{d\,\mathrm{v}}{dx}=\frac{-\left(\mathrm{v}^2+2\,\mathrm{v}-1\right)}{\mathrm{v}+1}$$

$$\int\frac{\mathrm{v}+1}{\mathrm{v}^2+2\,\mathrm{v}-1}\,d\,\mathrm{v}=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\int\frac{2\,\mathrm{v}+2}{\mathrm{v}^2+2\,\mathrm{v}-1}\,d\,\mathrm{v}=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\log\left|\mathrm{v}^2+2\,\mathrm{v}-1\right|=-\log|x|+\log c$$

$$\Rightarrow\log\left(\mathrm{v}^2+2\,\mathrm{v}-1\right)^{\frac{1}{2}}=\log\left|\frac{c}{x}\right|$$

$$\Rightarrow\left(\mathrm{v}^2+2\,\mathrm{v}-1\right)^{\frac{1}{2}}=\left|\frac{c}{x}\right|$$

$$\Rightarrow\ \mathrm{v}^2+2\,\mathrm{v}-1=\frac{c^2}{x^2}\ \text{----------}\ (4)$$

$\mathrm{v}=\dfrac{y}{x}$ ను (4) లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\frac{y^2}{x^2}+\frac{2y}{x}-1=\frac{c^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{y}^2+2\mathrm{xy}-\mathrm{x}^2=\mathrm{c}^2$$

దత్త సమీకరణము $y^2+2xy-x^2=\mathrm{K},\ \ \mathrm{K}=c^2$

1.5.6: $x(x-y)dy = y(x+y)dx$ సాధించుము.

సాధన: దత్త సమీకరణం $x(x-y)dy = y(x+y)dx$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y(x+y)}{x(x-y)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{xy+y^2}{x^2-xy} \text{ ------------- } (1)$$

$y = \mathrm{v}x$ -------- (2)

x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{v} + x\frac{d\mathrm{v}}{dx} \text{ --------- } (3)$$

(2) మరియు (3)లను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\mathrm{v} + x\frac{d\mathrm{v}}{dx} = \frac{x \cdot \mathrm{v}x + \mathrm{v}^2 x^2}{x^2 - x\mathrm{v}x} = \frac{\mathrm{v}+\mathrm{v}^2}{1-\mathrm{v}}$$

$$\Rightarrow x\frac{d\mathrm{v}}{dx} = \frac{\mathrm{v}+\mathrm{v}^2}{1-\mathrm{v}} - \mathrm{v} = \frac{\cancel{\mathrm{v}}+\mathrm{v}^2-\cancel{\mathrm{v}}+\mathrm{v}^2}{1-\mathrm{v}} = \frac{2\mathrm{v}^2}{1-\mathrm{v}}$$

$$\int \frac{1-\mathrm{v}}{2\mathrm{v}^2} d\mathrm{v} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{1}{\mathrm{v}^2} d\mathrm{v} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\mathrm{v}} d\mathrm{v} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\mathrm{v}}\right) - \frac{1}{2}\log|\mathrm{v}| = \log|x| + c$$

$$= -\frac{1}{2\mathrm{v}} - \frac{1}{2}\log|\mathrm{v}| = \log|x| + c$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2\mathrm{v}} - \frac{1}{2}\log|\mathrm{v}| = \log|x| + c \text{ ----------- } (4)$$

put $\mathrm{v}=\dfrac{y}{x}$ in (4)

సాధారణ సాధన $\dfrac{-x}{2y}-\dfrac{1}{2}\log\dfrac{y}{x}=\log|x|+c$.

1.5.7: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x+ye^{\frac{-2x}{y}}}$ సాధించుము.

సాధన: దత్త సమీకరణము $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x+ye^{\frac{-2x}{y}}}$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{x+y^{-\frac{2x}{y}}}{y} \text{ ------------ (1)}$$

$x=\mathrm{v}\,y$ అనుకొనుము -------- (2)

y దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy}=\mathrm{v}+y\frac{d\,\mathrm{v}}{dy} \text{ ------- (3)}$$

(2) మరియు (3) లను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\mathrm{v}+y\frac{d\,\mathrm{v}}{dy}=\mathrm{v}+e^{-2\mathrm{v}}$$

$$\Rightarrow y\frac{d\,\mathrm{v}}{dy}=e^{-2\mathrm{v}}$$

$$\int\frac{d\,\mathrm{v}}{e^{-2\mathrm{v}}}=\int\frac{dy}{y}$$

$$\Rightarrow \int e^{2\mathrm{v}}d\,\mathrm{v}=\int\frac{dy}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{2\mathrm{v}}}{2} = \log|y| + c \text{ ----------- (4)}$$

put $\mathrm{v} = \dfrac{x}{y}$ in (4)

సాధారణ సాధన $\dfrac{e^{\frac{2x}{y}}}{2} = \log|y| + c$

1.5.8: $y\,dx = \left(x + \sqrt{y^2 - x^2}\right)dy$ సాధించుము.

సాధన : దత్త సమీకరణము $ydx = \left(x + \sqrt{y^2 - x^2}\right)dy$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x + \sqrt{y^2 - x^2}}{y}$$

$$= \frac{x}{y} + \frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{y} \text{ -------- (1)}$$

$x = \mathrm{v}\,y$ అనుకొనుము --------- (2)

y దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$\frac{dx}{dy} = \mathrm{v} + y\frac{d\mathrm{v}}{dy} \text{ ------ (3)}$$

(2) మరియు (3)లను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\mathrm{v} + y\frac{d\mathrm{v}}{dy} = \frac{\mathrm{v} + \sqrt{y^2 - \mathrm{v}^2 y^2}}{y} = \mathrm{v} + \sqrt{1 - \mathrm{v}^2}$$

$$\Rightarrow y\frac{d\mathrm{v}}{dy} = \sqrt{1 - \mathrm{v}^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{d\,\mathrm{v}}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2}} = \int \frac{dy}{y}$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}\mathrm{v} = \log|y| + c \text{ ------- (4)}$$

put in (4)

సాధారణ సాధన $\sin^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log|y| + c$

అసమఘాతీయ అవకలన సమీకరణాలు లేదా సమఘాతీయ రూపములోనికి మార్చ కలిగిన అవకలన సమీకరణాలు :-

1.5.9: $\mathrm{a}_1, \mathrm{b}_1, \mathrm{c}_1\ (\neq 0), \mathrm{a}_2, \mathrm{b}_2, \mathrm{c}_2$ స్థిర సంఖ్యలయితే $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$ రూపంలో ఉండే అవకలన సమీకరణాలను అసమఘాతీయ అవకలన సమీకరణాలు అంటాము.

1.5.10 అసమ ఘాతీయ సమీకరణాల సాధన పద్ధతి :

అసమ ఘాతీయ సమీకరణం $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$ ని తీసుకొందాం -------- (1)

సందర్భము 1 : $a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$ అను సమీకరణాలలో $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ అయిన పై సమీకరణాలను తృప్తిపరిచే సాధన ఒకే ఒక్కటి ఉంటుంది. ఆ సాధన (h, k) అనుకొనుము.

$$\therefore a_1h + b_1k + c_1 = 0 \qquad a_2h + b_2k + c_2 = 0$$

సాధించగా $h = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \ k = \dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ ---------- (2)

కొత్త చలరాశులు, $x = \mathrm{X} + h, \ \ y = \mathrm{Y} + k$ --------- (3)

$$\Rightarrow \mathrm{dx} = \mathrm{dX},\ \mathrm{dy} = \mathrm{dY} \Rightarrow \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{dY}}{\mathrm{dX}} \text{ ---------- (4)}$$

సమీకరణము (1)లో (3), (4) ప్రతిక్షేపించగా,

$$\frac{dY}{dX}=\frac{a_1(X+h)+b_1(Y+k)+c_1}{a_2(X+h)+b_2(Y+k+c_2)}$$

$$\Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{a_1X+b_1Y+a_1h+b_1k+c_1}{a_2X+b_2Y+a_2h+b_2k+c_2}$$

$$=\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y} \text{ ------------ (5)}$$

ఇప్పుడు (5) సమ ఘాతీయ అవకలన సమీకరణము మరియు (5)ను ఇది వరకు సూచించిన పద్ధతిలో సాధించవచ్చును.

(5) యొక్క సాధారణ సాధన $\phi(X,Y,C)=0$

$\therefore$ దత్త సమీకరణము యొక్క సాధారణ సాధన $\phi(x-h, y-k, c)=0$

సందర్భము 2: $a_1x+b_1y+c_1=0,\ a_2x+b_2y+c_2=0$

అను సమీకరణములందు $a_1b_2-a_2b_1=0$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=u \text{ (అనుకొనుము)}$$

$$\Rightarrow a_1=ua_2,\quad b_1=ub_2 \text{ ----------- (6)}$$

(6)ను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ua_2x+ub_2y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2} \text{ ---------- (7)}$$

$c_1=uc_2$ అయితే $\frac{dy}{dx}=u$

$\therefore$ (1) యొక్క సాధారణ సాధన $y=ux+k$, ఇచ్చట k స్థిర పదము.

అయితే $c_1 \neq uc_2$ అయిన $a_2x+b_2y=t$ అనుకొనుము --------------- (8)

x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$a_2+b_2\frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dt}{dx} - a_2}{b_2} \text{ --------------- (9)}$$

(8) మరియు (9)లను (7)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\frac{1}{b_2}\left(\frac{dt}{dx} - a_2\right) = \frac{ut + c_1}{t + c_2}$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{b_2(ut + c_1)}{t + c_2} + a_2 = \frac{b_2(ut + c_1) + a_2(t + c_2)}{t + c_2} \text{ ----------- (10)}$$

(10)ను విభజనీయ చలరాశుల పద్ధతిలో సాధించుము.

(10) యొక్క సాధారణ సాధన $f(t, x, c) = 0$.

$\therefore$ (1) యొక్క సాధారణ సాధన $f(a_2 x + b_2 y;\ x, c) = 0$

1.5.11: $(x + y - 1)\frac{dy}{dx} = x - y + 2$ సాధించుము.

సాధన: దత్త సమీకరణం $\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 2}{x + y - 1}$ ---------- (1)

ఇక్కడ $a_1 = 1,\ b_1 = -1,\ a_2 = 1,\ b_2 = 1$

ఇప్పుడు $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1 - (-1) = 2 \neq 0$

$x - y + 2 = 0$ మరియు $x + y - 1 = 0$ అను సమీకరణముల సాధన (h, k) అనుకొనుము.

$\therefore h - k + 2 = 0$ ----------- (2) $\quad h + k - 1 = 0$ ----------- (3)

(2) మరియు (3)లను సాధించగా, $h = -\frac{1}{2},\ k = \frac{3}{2}$

ఇప్పుడు, $x = \mathrm{X} - \frac{1}{2},\ y = \mathrm{Y} + \frac{3}{2}$ ---------- (4) అనుకొనుము.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}} \text{ --------------- (5)}$$

(4) మరియు (5)లను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\left(X-\frac{1}{2}\right)-\left(Y+\frac{3}{2}\right)+2}{\left(X-\frac{1}{2}\right)+\left(Y+\frac{3}{2}\right)-1} = \frac{X-Y}{X+Y} \text{ ------------ } (6)$$

ఇక్కడ $F(KX, KY) = F(X, Y)$

$\therefore \frac{dY}{dX} = \frac{X-Y}{X+Y}$ అసమఘాతీయ అవకలన సమీకరణము

$Y = VX$ --------- (7) అనుకొనుము.

x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$\frac{dY}{dX} = V + X\frac{dV}{dX} \text{ ---------- } (8)$$

(7) మరియు (8)లను (6)లో ప్రతిక్షేపించగా,

$$V + X\frac{dV}{dX} = \frac{X-VX}{X+VX} = \frac{1-V}{1+V}$$

$$\Rightarrow X\frac{dV}{dX} = \frac{1-V}{1+V} - V = \frac{1-V-V-V^2}{1+V} = \frac{-\left(V^2+2V-1\right)}{1+V}$$

$$\int \frac{V+1}{V^2+2V-1}\, dV = -\int \frac{dX}{X}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{2V+2}{V^2+2V-1}\, dV = -\int \frac{dX}{X}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\log\left|V^2+2V-1\right| = -\log|X| + \log C$$

$$\Rightarrow \log\left|V^2+2V-1\right|^{1/2} = \log\left|\frac{C}{X}\right|$$

$$\Rightarrow V^2+2V-1=\frac{C^2}{X^2}$$

$$\Rightarrow \frac{Y^2}{X^2}+\frac{2Y}{X}-1=\frac{C^2}{X^2}$$

$\therefore$ సాధారణ సాధన (6) $\left|Y^2+2XY-X^2\right|=C^2$

$\therefore$ సాధారణ సాధన (1)

$$\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=c^2$$

i.e. $y^2-x^2+2xy-2y-4x+\frac{1}{2}=c^2$

1.5.12 సమస్య : $\frac{dy}{dx}=\frac{x-2y+3}{2x-y+5}$ సాధించుము.

సాధన : దత్త సమీకరణము $\frac{dy}{dx}=\frac{x-2y+3}{2x-y+5}$ ----------- (1)

ఇక్కడ $a_1=1,\ b_1=-2,\ a_2=2,\ b_2=-1$

ఇప్పుడు

$$a_1b_2-a_2b_1=-1+4=3\neq 0$$

$x-2y+3=0$ మరియు $2x-y+5=0$ అను సమీకరణాల సాధన (h, K) అనుకొనుము.

ఇప్పుడు $h-2K+3=0$ --------- (2)

$2h-K+5=0$ ---------- (3)

(2) మరియు (3)లను సాధించగా, $h=-\frac{7}{3},\ K=\frac{1}{3}$

ఇప్పుడు $x=X+h\ =X-\frac{7}{3},\ \ y=Y+K=Y+\frac{1}{3}$ ------- (4)

$$\therefore \frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx} \text{ ------------ (5)}$$

(4) మరియు (5)లను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - \frac{7}{3} - 2\left(Y + \frac{1}{3}\right) + 3}{2\left(X - \frac{7}{3}\right) - \left(Y + \frac{1}{3}\right) + 5} = \frac{X - 2Y}{2X - Y} \text{ ------------ (6)}$$

ఇప్పుడు (6) సమఘాతీయ అవకలన సమీకరణము

$$Y = VX \text{ --------- (7)}$$ అనుకొనుము.

X దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$\frac{dY}{dX} = V + X\frac{dV}{dX} \text{ ---------- (8)}$$

(7) మరియు (8)లను (6)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$V + X\frac{dV}{dX} = \frac{X - 2VX}{2X - VX} = \frac{1 - 2V}{2 - V}$$

విభజనీయ చలరాశుల పద్ధతిలో

$$\int \frac{V - 2}{V^2 - 4V + 1} dV = -\int \frac{dX}{X}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{2V - 4}{V^2 - 4V + 1} dV = -\int \frac{dX}{X}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\log\left(V^2 - 4V + 1\right) = -\log|X| + \log C$$

$$\Rightarrow \log\left(V^2 - 4V + 1\right)^{1/2} = \log\left|\frac{C}{X}\right|$$

$$\Rightarrow \left|V^2 - 4V + 1\right| = \frac{C^2}{X^2}$$

$\therefore$ సాధారణ సాధన (6) $\left|Y^2 - 4XY + X^2\right| = C^2$

$\therefore$ సాధారణ సాధన (1)

$$\left(y-\frac{1}{3}\right)^2 - 4\left(x+\frac{7}{3}\right)\left(y-\frac{1}{3}\right) + \left(x+\frac{7}{3}\right)^2 = C^2$$

i.e. $y^2 + x^2 - 4xy + 6x - 10y + \dfrac{26}{3} = C^2$

1.5.13 సమస్య : $(2x+2y+2)\dfrac{dy}{dx} = x+y+1$ సాధించుము.

సాధన : దత్త సమీకరణము $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y+1}{2x+2y+3}$ --------- (1)

ఇక్కడ $a_1 = 1,\ b_1 = 1,\ a_2 = 2,\ b_2 = 2$

ఇప్పుడు $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 2 - 2 = 0$

$(x+y) = u$ ---------- (2)

x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1 \text{ ---------- (3)}$$

(2) మరియు (3)లను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\frac{du}{dx} - 1 = \frac{u+1}{2u+3}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{u+1}{2u+3} + 1 = \frac{u+1+2u+3}{2u+3} = \frac{3u+4}{2u+3} \text{ --------- (4)}$$

విభజన చలరాశుల పద్ధతిలో సాధించగా

$$\int \frac{2u+3}{3u+4} du = \int dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{\frac{2}{3}(3u+4)+\frac{1}{3}}{3u+4} du = \int dx$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\int du + \frac{1}{3}\int \frac{1}{3u+4} du = \int dx$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}u + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} \log|3u+4| = x + C$$

సాధారణ సాధన (4) $6u + \log|3u+4| = 9x + K, \quad K = 9C$

$\therefore$ సాధారణ సాధన (1) $6(x+y) + \log|3x+3y+4| = 9x + K$

1.5.14 సమస్య : $(2x+y+1)dx + (4x+2y-1)dy = 0$ సాధించుము.

సాధన : దత్త సమీకరణము $(2x+y+1)dx + (4x+2y-1)dy = 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-(2x+y+1)}{4x+2y-1} \text{ --------- (1)}$$

ఇక్కడ $a_1 = -2, \; b_1 = -1, \; a_2 = 4, \; b_2 = 2$

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = -4 - (-4) = 0$$

$$2x + y = u \text{ --------- (2)}$$

x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$2 + \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 2 \text{ --------- (3)}$$

(2) మరియు (3)లను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\frac{du}{dx}-2=\frac{-(u+1)}{2u-1}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{-u-1}{2u-1}+2=\frac{-u-1+4u-2}{2u-1}=\frac{3u-3}{2u-1} \text{ ---------- } (4)$$

విభజనీయ చలరాశుల పద్ధతిలో సాధించగా

$$\int\frac{2u-1}{3u-3}du=\int dx$$

$$\Rightarrow \frac{\int \frac{2}{3}(3u-3)+1}{3u-3}\,du=\int dx$$

$$\Rightarrow \int\frac{2}{3}du+\int\frac{1}{3u-3}du=\int dx$$

$$\Rightarrow \int\frac{2}{3}du+\int\frac{1}{3u-3}du=\int dx$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}u+\frac{1}{3}\log|3u-3|=x+c$$

సాధారణ సాధన (4) $2u+\log|3u-3|=3x+3c$

$\therefore$ సాధారణ సాధన (1) $2(2x+y)+\log|6x+3y-3|=3x+\mathrm{K}$, ఇచ్చట $\mathrm{K}=3c$.

1.6.1 యదార్థ అవకలన సమీకరణము :-

M, N **లు** x, y లలో వాస్తవ మూల్య ప్రమేయాలు, వాటి ప్రథమ పరిమాణ పాక్షిక అవకలజాలు అవిచ్ఛిన్నాలైతే, $\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy=0$ యదార్థ అవకలన సమీకరణము కావాలి అంటే $\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{M}, \frac{\partial u}{\partial y}=\mathrm{N}$ అగునట్లుగా అవిచ్ఛిన్న ప్రథమ పరిమాణ పాక్షిక అవకలజాలు కలిగిన ప్రమేయము u లభించవలెను. అటువంటి ప్రమేయము u నకు $\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy=du$ అని రాయగలము. ఇక్కడ $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$.

1.6.2 సిద్ధాంతము :-

$Mdx + Ndy = 0$ యదార్థ అవకలన సమీకరణమగుటకు ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.

ఉపపత్తి : $Mdx + Ndy = 0$ యదార్థ అవకలన సమీకరణము అనుకొందాము.

$\Rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial x} = M, \dfrac{\partial F}{\partial y} = N$ అగునట్లుగా అవిచ్ఛిన్న ప్రథమ పరిమాణ పాక్షిక అవకలజాలు కలిగిన ప్రమేయము $F(x, y)$ లభించును.

$$\therefore M = \frac{\partial F}{\partial x} \qquad N = \frac{\partial F}{\partial y}$$

y దృష్ట్యా పాక్షికముగా అవకలనము చేయగా x దృష్ట్యా పాక్షికముగా అవకలనము చేయగా

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \cdot \partial x} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y}$$

$F(x, y)$ నకు అవిచ్ఛిన్న ప్రథమ పరిమాణ పాక్షిక అవకలజాలు యున్నందున

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \cdot \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y}$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

విపర్యంగా $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ అనుకొనుము.

ఇప్పుడు $M\,dx + N\,dy = 0$ యదార్థ అవకలన సమీకరణమని నిరూపించవలెను.

$$V(x, y) = \int_x M\,dx$$

($\int_x M\,dx$ అనగా సమాకలనము చేయు సందర్భములో 'y' స్థిర సంఖ్యగా పరిగణించవలెను)

ఇప్పుడు $$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \cdot \partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \cdot \partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} - \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x \cdot \partial y} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{N} - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\right) = 0$$

$\Rightarrow \left(\mathrm{N} - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\right)$ కేవలం y లో ప్రమేయం లేదా 'x' పదములు లేనటువంటి ప్రమేయము.

$$\Rightarrow \mathrm{N} - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} = \phi(y)$$

$$\Rightarrow \mathrm{N} = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} + \phi(y)$$

ఇప్పుడు $\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\,dx + \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} + \phi(y)\right)dy$

$$= \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\,dy + \phi(y)\,dy$$

$$= d\,\mathrm{V} + \phi(y)\,dy$$

$= d\left(\mathrm{V} + \psi(y)\right)$ ఇక్కడ $d\left(\psi(y)\right) = \phi(y)\,dy$

$\therefore\ \mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy = 0$ యదార్థ అవకలన సమీకరణము.

గమనిక - $\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy = 0$ ఒక యదార్థ అవకలన సమీకరణమైన

సాధారణ సాధన $\mathrm{V} + \int \phi(y)\,dy = c$ ఇక్కడ

$\mathrm{V} = \int_x \mathrm{M}dx$ మరియు $\phi(y) = \mathrm{N} - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}$

1.6.3 సమస్య : $(hx + by + f)\,dy + (ax + hy + g)\,dx = 0$ సాధించుము.

సాధన : దత్త సమీకరణము $(ax + hy + g)\,dx + (hx + by + f)\,dy = 0$

$M\,dx + N\,dy = 0$ తో పోల్చగా

ఇక్కడ $M = ax + hy + g \qquad N = hx + by + f$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = h,\ \frac{\partial N}{\partial x} = h$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

దత్త సమీకరణము యదార్థ అవకలన సమీకరణము

$$V = \int\limits_{y \text{ స్థిరపదముగా}} M\,dx = \int\limits_{y \text{ స్థిరము}} (ax + hy + g)\,dx = \frac{ax^2}{2} + (hy + g)x$$

$$N - \frac{\partial V}{\partial y} = (hx + by + f) - hx = by + f$$

$$\text{Now, } \int\left(N - \frac{\partial V}{\partial y}\right)dy = \int (by + f)\,dy = \frac{by^2}{2} + fy$$

$\therefore$ సాధారణ సాధన $V + \int\left(N - \dfrac{\partial V}{\partial y}\right)dy = C$

i.e. $\dfrac{ax^2}{2} + (hy + g)x + \dfrac{by^2}{2} + fy = C$

$\Rightarrow ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy * + K = 0 \qquad k = -2C$

1.6.4 సమస్య : $(4x + 3y + 1)dx + (3x + 2y + 1)dy = 0$ సాధించుము.

సాధన: దత్త సమీకరణము $(4x + 3y + 1)dx + (3x + 2y + 1)dy = 0$

ఇక్కడ $M = 4x + 3y + 1 \qquad N = 3x + 2y + 1$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 3$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

దత్త సమీకరణము యదార్థ అవకలన సమీకరణము.

$$\mathrm{V} = \int \mathrm{M}\, dx \qquad = \int (4x+3y+1)\, dx = 2x^2 (3y+1)\, x$$

$$\mathrm{N} - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} = (3x+2y+1) - 3x = 2y+1$$

ఇప్పుడు $\int \left(\mathrm{N} - \frac{\partial \mathrm{V}}{dy} \right) dy = \int (2y+1)\, dy = y^2 + y$

$\therefore$ సాధారణ సాధన $2x^2 + (3y+1)x + y^2 + y = \mathrm{C}$

i.e., $2x^2 + 3xy + y^2 + x + y = \mathrm{C}$

1.6.5 సమస్య : $\left(x^2 - 4xy - 2y^2\right) dx + \left(y^2 - 4xy - 2x^2\right) dy = 0$ సాధించుము.

సాధన : దత్త సమీకరణం $\left(x^2 - 4xy - 2y^2\right) dx + \left(y^2 - 4xy - 2x^2\right) dy = 0$

ఇక్కడ $\mathrm{M} = x^2 - 4xy - 2y^2 \qquad \mathrm{N} = y^2 - 4xy - 2x^2$

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{dy} = -4x - 4y, \qquad \frac{\partial \mathrm{N}}{dx} = -4y - 4x$$

$$\therefore \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}$$

దత్త సమీకరణము యదార్థ అవకలన సమీకరణము.

$$\underset{\text{Y స్థిరము}}{\mathrm{V} = \int \mathrm{M}\, dx} \qquad \underset{\text{Y స్థిరము}}{= \int \left(x^2 - 4xy - 2y^2\right) dx} \qquad = \frac{x^3}{3} - 2x^2 y - 2y^2 x$$

ఇప్పుడు $\mathrm{N} - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} = \left(y^2 - 4xy - 2x^2\right) - \left(-2x^2 - 4yx\right) = \mathrm{y}^2$

$$\int\left(N-\frac{\partial V}{\partial y}\right)dy=\int y^2\ dy=\frac{y^3}{3}$$

సాధారణ సాధన $\frac{x^3}{3}-2x^2y-2y^2x+\frac{y^3}{3}=C$

$\Rightarrow x^3-6x^2y-6y^2x+y^3=3C$

సమాకలన గుణకము :-

1.6.6 నిర్వచనము :- $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ యదార్థ అవకలన సమీకరణము కాదు. x, y లలో ప్రమేయము $f(xy)=F$ అనునది $F[Mdx+Ndy]=0$ యదార్థ అవకలన సమీకరణము అయ్యేటట్లుంటే, f ని $Mdx+Ndy=0$ కి సమాకలన గుణకము అంటాము.

1.6.7 పద్ధతి I :- అవకలన సమీకరణము $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ సమఘాతీయమై, $M\,dx+N\,dy=0$ యదార్థ అవకలనము సమీకరణము కాకుండా మరియు $Mx+Ny\neq 0$ అయిన $M\,dx+N\,dy=0$ కి సమాకలన గుణకము $\frac{1}{Mx+Ny}$ (Integrating Factor).

1.6.8 సమస్య : $x+y\frac{dy}{dx}=y-x\frac{dy}{dx}$ సాధించుము.

సాధన : దత్త సమీకరణం $x+y\frac{dy}{dx}=y-x\frac{dy}{dx}$ ----------- (1)

$$\Rightarrow x\frac{dy}{dx}+y\frac{dy}{dx}=y-x$$

$$\Rightarrow (x+y)\frac{dy}{dx}=y-x$$

$$\Rightarrow (x+y)dy=(y-x)dx$$

$$\Rightarrow (x-y)dx+(x+y)dy=0$$

ఇక్కడ $M=x-y \qquad N=x+y$

$\frac{\partial M}{\partial y}=-1$ మరియు $\frac{\partial N}{\partial x}=1$

$$\therefore \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} \neq \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}$$

దత్త సమీకరణము యదార్థ అవకలన సమీకరణము కాదు.

కానీ (2) సమఘాతీయ అవకలన సమీకరణము.

$$\mathrm{M}\,x + \mathrm{N}\,y = x^2 - xy + xy + y^2 = x^2 + y^2 \neq 0$$

$$\therefore \text{ సమాకలన గుణకము } = \frac{1}{\mathrm{M}\,x + \mathrm{N}\,y} = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

$\dfrac{1}{x^2 + y^2}$ ను (2)తో హెచ్చించగా

$$\frac{x-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}dy = 0 \text{ ------------- (3)}$$

ఇక్కడ $\mathrm{M}_1 = \dfrac{x-y}{x^2+y^2} \qquad \mathrm{N}_1 = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial \mathrm{M}_1}{\partial y} = \frac{\left(x^2+y^2\right)(-1) - (x-y)(2y)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^2 - x^2 - 2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial \mathrm{N}_1}{\partial x} = \frac{\left(x^2+y^2\right)(1) - (x+y)(\partial x)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^2 - x^2 - 2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\therefore \frac{\partial \mathrm{M}_1}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{N}_1}{\partial x}$$

ఇపుడు $\mathrm{V} = \displaystyle\int_{y \text{ స్థిరము}} \mathrm{M}_1\, dx = \int_{y \text{ స్థిరము}} \frac{x-y}{x^2+y^2}\, dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+y^2}\,dx \qquad - \quad y\int \frac{1}{x^2+y^2}\,dx$$

y స్థిరము   y స్థిరము

$$= \frac{1}{2}\log\left|x^2+y^2\right| - y\cdot\frac{1}{y}\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y - \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{-x}{y^2}\right)$$

$$= \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

$$N_1 - \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x+y}{x^2+y^2} - \frac{x-y}{x^2+y^2} = 0$$

$$\int\left(N_1 - \frac{\partial V}{\partial y}\right)dy = \int 0\ dy \ = C_1$$

సాధారణ సాధన $\frac{1}{2}\log\left|x^2+y^2\right| - \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) = C$

1.6.9 సమస్య : $xydx - \left(x^2+2y^2\right)dy = 0$ సాధించుము.

సాధన : దత్త సమీకరణం $xy\,dx - \left(x^2+2y^2\right)dy = 0$ ------------ (1)

$$M = xy \qquad N = -x^2 - 2y^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2x$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

దత్త సమీకరణము యదార్థ అవకలన సమీకరణము కాదు.

కాని (1) సమఘాతీయ అవకలన సమీకరణము.

$$\mathrm{M}\,x+\mathrm{N}\,y=x^2y-x^2y-2y^3=-2y^3\neq 0$$

సమాకలన గుణకము $=\dfrac{1}{\mathrm{M}\,x+\mathrm{N}\,y}=\dfrac{-1}{2y^3}$

$-\dfrac{1}{2y^3}$ (1)తో హెచ్చించగా

$$\frac{-xy}{2y^3}dx+\frac{x^2+2y^2}{2y^3}dy=0$$

$$\Rightarrow\frac{-x}{2y^2}dx+\left(\frac{x^2}{2y^3}+\frac{1}{y}\right)dy=0 \text{ ----------- } (2)$$

$$\mathrm{M}_1=\frac{-x}{2y^2},\quad \mathrm{N}_1=\frac{x^2}{2y^3}+\frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial\mathrm{M}_1}{\partial y}=-\frac{x}{2}\times\frac{-2}{y^3}=\frac{x}{y^3},\ \frac{\partial\mathrm{N}_1}{\partial x}=\frac{2x}{2y^3}=\frac{x}{y^3}$$

$$\therefore\frac{\partial\mathrm{M}_1}{\partial y}=\frac{\partial\mathrm{N}_1}{\partial x}$$

$\therefore(2)$

$$\mathrm{V}=\int\limits_{y\ \text{స్థిరము}}\mathrm{M}_1\,dx=\int\limits_{y\ \text{స్థిరము}}\frac{-x}{2y^2}dx=\frac{-x^2}{4y^2}$$

$$\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial y}=\frac{-x^2}{4}\left(\frac{-2}{y^3}\right)=\frac{x^2}{2y^3}$$

$$N_1 - \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2}{2y^3} + \frac{1}{y} - \frac{x^2}{2y^3} = \frac{1}{y}$$

$$\int \left(N_1 - \frac{\partial V}{\partial y} \right) dy = \int \frac{1}{y} dy = \log|y|$$

$\therefore$ సాధారణ సాధన $\dfrac{-x^2}{4y^2} + \log|y| = C.$

1.6.10 పద్ధతి II:- అవకలన సమీకరణము $M\,dx + N\,dy = 0$, $yf(x, y)dx + x\ g(x, y)dy = 0$ రూపంలో ఉంటూ, $M\,x - N\,y \neq 0$ అయిన సమాకలన గుణకము $\dfrac{1}{M\,x - N\,y}$ అవుతుంది.

1.6.11 సమస్య :- $(2xy+1)y\ dx + \left(1 + 2xy - x^3y^3\right)x\,dy = 0$ సాధించుము.

సాధన :- దత్త సమీకరణము $y(2xy+1)dx + x\left(1 + 2xy - x^3y^3\right)dy = 0$ ------------ (1)

$M = 2xy^2 + y \qquad\qquad N = x + 2x^2y - x^4y^3$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = 4xy + 1 \qquad\qquad \dfrac{\partial N}{\partial x} = 1 + 4xy - 4x^3y^3$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$, (1) యదార్థ అవకలన సమీకరణము కాదు.

$$M\,x - N\,y = 2x^2y^2 + xy - xy - 2x^2y^2 + x^4y^4$$

$$= x^4y^4 \neq 0$$

సమాకలన గుణకము $= \dfrac{1}{x^4\ y^4}$

(1) ని $\dfrac{1}{x^4\ y^4}$ తో హెచ్చించగా

$$\frac{2xy^2+y}{x^4y^4}dx+\frac{x+2x^2y-x^4y^3}{x^4y^4}dy=0$$

$$\Rightarrow\left(\frac{2}{x^3y^2}+\frac{1}{x^4y^3}\right)dx+\left(\frac{1}{x^3y^4}+\frac{2}{x^2y^3}-\frac{1}{y}\right)dy=0 \text{ ---------- (2)}$$

$$\mathrm{M}_1=\frac{2}{x^3y^2}+\frac{1}{x^4y^3},\ \ \mathrm{N}_1=\frac{1}{x^3y^4}+\frac{2}{x^2y^3}-\frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial\mathrm{M}_1}{\partial y}=\frac{-4}{x^3y^3}-\frac{3}{x^4y^4},\ \ \frac{\partial\mathrm{N}_1}{\partial x}=\frac{-3}{x^4y^4}-\frac{4}{x^3y^3}$$

$$\therefore\frac{\partial\mathrm{M}_1}{\partial y}=\frac{\partial\mathrm{N}_1}{\partial x}$$

(2) యదార్థ అవకలన సమీకరణము.

$$\mathrm{V}=\int\mathrm{M}_1\,dx=\int\frac{2}{x^3y^2}+\frac{1}{x^4y^3}dx=\frac{-1}{x^2y^2}-\frac{1}{3x^3y^3}$$

$$\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial y}=\frac{2}{x^2y^3}+\frac{1}{x^3y^4}$$

$$\mathrm{N}_1-\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial y}=\left(\frac{1}{x^3y^4}+\frac{2}{x^2y^3}-\frac{1}{y}\right)-\left(\frac{2}{x^2y^3}+\frac{1}{x^3y^4}\right)$$

$$=\frac{-1}{y}$$

$$\int\left(\mathrm{N}_1-\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial y}\right)dy=\int\frac{-1}{y}dy=-\log|y|$$

సాధారణ సాధన $\frac{-1}{x^2\ y^2}-\frac{1}{3x^3y^3}-\log|y|=\mathrm{C}$

i.e., $\dfrac{1}{x^2y^2}+\dfrac{1}{3x^2y^3}+\log|y|=\mathrm{K}$

ఇక్కడ $\mathrm{K}=-c$

1.6.12 సమస్య : $(1+xy)x\,dy+(1-xy)y\,dx=0$ సాధించుము.

సాధన : దత్త సమీకరణం $y(1-xy)dx+x(1+xy)dy=0$ --------- (1)

$\mathrm{M}=y-xy^2 \qquad \mathrm{N}=x+x^2y$

$\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}=1-2xy \qquad \dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}=1+2xy$

$\therefore \dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}\neq\dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial x},(1)$ యదార్థ అవకలన సమీకరణము కాదు.

$\mathrm{M}\,x-\mathrm{N}\,y=\left(xy-x^2y^2\right)-\left(xy+x^2y^2\right)$

$=-2x^2y^2\neq 0$

సమాకలన గుణకము $=\dfrac{1}{\mathrm{M}\,x-\mathrm{N}\,y}=\dfrac{-1}{2x^2y^2}$

(1) ని $\dfrac{1}{x^2y^2}$ తో హెచ్చించగా (స్థిర సంఖ్యను మరియు - గుర్తును వదిలివేయగా)

$\left(\dfrac{y-xy^2}{x^2y^2}\right)dx+\left(\dfrac{x+x^2y}{x^2y^2}\right)dy=0$ --------- (2)

$\mathrm{M}_1=\dfrac{1}{x^2y^2}-\dfrac{1}{x} \qquad \mathrm{N}_1=\dfrac{1}{xy^2}+\dfrac{1}{y}$

$\dfrac{\partial \mathrm{M}_1}{\partial y}=\dfrac{-1}{x^2y^2} \qquad \dfrac{\partial \mathrm{N}_1}{\partial x}=\dfrac{-1}{x^2y^2}$

$$\therefore \frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial x}$$

(2) యదార్థ అవకలన సమీకరణము

$$V = \underset{y \text{ స్థిరము}}{\int} M_1\, dx = \underset{y \text{ స్థిరము}}{\int} \left(\frac{1}{x^2 y} - \frac{1}{x} \right) dx$$

$$= \frac{-1}{xy} - \log|x|$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{xy^2}$$

$$N_1 - \frac{\partial V}{\partial y} = \left(\frac{1}{xy^2} + \frac{1}{y} \right) - \frac{1}{xy^2} = \frac{1}{y}$$

$$\therefore \int \left(N_1 - \frac{\partial V}{\partial y} \right) dy = \int \frac{1}{y}\, dy = \log y$$

సాధారణ సాధన $\dfrac{-1}{xy} - \log|x| + \log|y| = C$

1.6.13 పద్ధతి III : అవకలన సమీకరణము $M\,dx + N\,dy = 0$ యదార్థ అవకలన సమీకరణము కాకుండా,

$\dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x} \right) = f(x)$, '$x$' లో మాత్రమే ప్రమేయము అయిన $M\,dx + N\,dy = 0$ కి

$e^{\int f(x)dx}$ ఒక సమాకలన గుణకము.

1.6.14 సమస్య : $\left(y + \dfrac{y^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} \right) dx + \dfrac{1}{4}\left(x + xy^2 \right) dy = 0$ సాధించుము.

సాధన : దత్త సమీకరణము $\left(y + \dfrac{y^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} \right) dx + \dfrac{1}{4}\left(x + xy^2 \right) dy = 0$ --------- (1)

$$M = y + \frac{y^3}{3} + \frac{x^2}{2} \qquad N = \frac{1}{4}\left(x + xy^2\right)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + y^2 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{4}\left(1 + y^2\right)$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

(1) యదార్థ అవకలన సమీకరణము కాదు.

ఇప్పుడు $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{4}{x + xy^2}\left(\left(1 + y^2\right) - \frac{1}{4}\left(1 + y^2\right)\right)$

$$= \frac{4}{x\left(1 + y^2\right)} \times \frac{3}{4}\left(1 + y^2\right)$$

$$= \frac{3}{x} = f(x)$$

సమాకలన గుణకము $= e^{\int f(x)dx} = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\log x}$

$$= e^{\log x^3} = x^3$$

$$\left(e^{\log f(x)} = f(x)\right)$$

(1)ని x^3తో హెచ్చించగా,

$$\left(x^3 y + \frac{x^3 y^3}{3} + \frac{x^5}{2}\right)dx + \frac{1}{4}\left(x^4 + x^4 y^2\right)dy = 0 \text{ ----------- (2)}$$

$$M_1 = x^3 y + \frac{x^3 y^3}{3} + \frac{x^5}{2} \qquad N_1 = \frac{1}{4}\left(x^4 + x^4 y^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M_1}{\partial y} = x^3 + x^3 y^2 \qquad \frac{\partial N_1}{\partial x} = x^3 + x^3 y^2$$

$$\therefore \frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial x}$$

(2) యదార్థ అవకలన సమీకరణము.

$$\underset{y \text{ స్థిర పదము}}{V = \int M_1\, dx} = \underset{y \text{ స్థిర పదము}}{\int} x^3 y + \frac{x^3 y^3}{3} + \frac{x^5}{5}\; dx$$

$$= \frac{x^4 y}{4} + \frac{x^4 y^3}{12} + \frac{x^6}{12}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^4}{4} + \frac{x^4 y^2}{4}$$

$$N_1 - \frac{\partial V}{\partial y} = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^4 y^2}{4}\right) - \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^4 y^2}{4}\right) = 0$$

$$\int \left(N_1 - \frac{\partial V}{\partial y}\right) dy = \int 0 \; dy = 0$$

సాధారణ సాధన $\frac{x^4 y}{4} + \frac{x^4 y^3}{12} + \frac{x^6}{12} = C$

1.6.15 పద్ధతి IV: అవకలన సమీకరణము $M\,dx + N\,dy = 0$ యదార్థ అవకలన సమీకరణము కాకుండా,

$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = g(y)$, y లో మాత్రమే ప్రమేయము అయిన $M\,dx + N\,dy = 0$ కి సమాకలన గుణకము $e^{\int g(y)dy}$ అవుతుంది.

1.6.16 సమస్య : $\left(3x^2 y^4 + 2xy\right)dx + \left(2x^3 y^3 - x^2\right)dy = 0$ సాధించుము.

సమస్య : దత్త సమీకరణం $\left(3x^2 y^4 + 2xy\right)dx + \left(2x^3 y^3 - x^2\right)dy = 0$ ------------ (1)

$$M = \left(3x^2 y^4 + 2xy\right) \qquad N = 2x^3 y^3 - x^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12x^2y^3 + 2x \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 6x^2y^3 - 2x$$

$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, (1) యదార్థ అవకలన సమీకరణం కాదు.

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{1}{3x^2y^4 + 2xy}\left(\left(6x^2y^3 - 2x\right) - \left(12x^2y^3 + 2x\right)\right)$$

$$= \frac{-6x^2y^3 - 4x}{3x^2y^4 + 2xy}$$

$$= \frac{-2\left(3x^2y^3 + 2x\right)}{y\left(3x^2y^3 + 2x\right)}$$

$$= \frac{-2}{y} = g(y)$$

సమాకలన గుణకము $= e^{\int g(y)dy} = e^{\int \frac{-2}{y} dy}$

$$= e^{-2\log y}$$

$$= e^{\log 1/y^2} = \frac{1}{y^2}$$

(1)ని $\frac{1}{y^2}$ తో హెచ్చించగా

$$\left(\frac{3x^2y^4 + 2xy}{y^2}\right)dx + \left(\frac{2x^3y^3 - x^2}{y^2}\right)dy = 0 \text{ ---------- (2)}$$

$$M_1 = 3x^2y^2 + \frac{2x}{y} \qquad N_1 = 2x^3y - \frac{x^2}{y^2}$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial y} = 6x^2 y - \frac{2x}{y^2} \qquad \frac{\partial N_1}{\partial x} = 6x^2 y - \frac{2x}{y^2}$$

$\therefore \dfrac{\partial M_1}{\partial y} = \dfrac{\partial N_1}{\partial x}$, (2) యదార్థ అవకలన సమీకరణం.

$$V = \underset{y \text{ స్థిర పదము}}{\int} M_1\, dx \qquad = \underset{y \text{ స్థిర పదము}}{\int} 3x^2y^2 + \frac{2x}{y}\, dx = x^3y^2 + \frac{x^2}{y}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 2x^3 y - \frac{x^2}{y^2}$$

$$N_1 - \frac{\partial V}{\partial y} = \left(2x^3y - \frac{x^2}{y^2}\right) - \left(2x^3y - \frac{x^2}{y^2}\right) = 0$$

$$\int\left(N_1 - \frac{\partial V}{\partial y}\right)dy = \int 0\ dy = 0$$

$\therefore$ సాధారణ సాధన $\quad x^3y^2 + \dfrac{x^2}{y} = C$

1.6.17 సమస్య : $(x+y+1)y\ dx\ + (x+3y+2)x\ dy = 0$ సాధించుము.

సాధన : దత్త సమీకరణము $(x+y+1)y\ dx\ + (x+3y+2)x\ dy = 0$ ----------- (1)

ఇక్కడ $M = (x+y+1)y \qquad N = (x+3y+2)x$

$$= xy + y^2 + y \qquad = x^2 + 3xy + 2x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x + 2y + 1 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 3y + 2$$

$\therefore \dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$, (1) యదార్థ అవకలన సమీకరణము కాదు.

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)=\frac{1}{xy+y^2+y}\left((2x+3y+2)-(x+2y+1)\right)$$

$$=\frac{x+y+1}{y(x+y+1)}=\frac{1}{y}=g(y)$$

సమాకలన గుణకము $=e^{\int g(y)dy}=e^{\int\frac{1}{y}dy}=e^{\log|y|}=|y|$

(1)ని y తో హెచ్చించగా,

$$\left(y^2x+y^3+y^2\right)dx+\left(x^2y+3xy^2+2xy\right)dy=0 \text{ ---------- (2)}$$

$M_1=y^2x+y^3+y^2$ $\qquad$ $N_1=x^2y+3xy^2+2xy$

$\frac{\partial M_1}{\partial y}=2xy+3y^2+2y$, $\qquad$ $\frac{\partial N_1}{\partial x}=2xy+3y^2+2y$

$$\therefore \frac{\partial M_1}{\partial y}=\frac{\partial N_1}{\partial x}$$

(2) యదార్థ అవకలన సమీకరణము

$$V=\int M_1\,dx = \int\left(y^2x+y^3+y^2\right)dx=\frac{x^2y^2}{2}+y^3x+y^2x$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}=x^2y+3xy^2+2xy$$

$$\left(N_1-\frac{\partial V}{\partial y}\right)=\left(2xy+x^2y+3xy^2\right)-\left(x^2y+3xy^2+2xy\right)=0$$

$$\therefore \int\left(N_1-\frac{\partial V}{\partial y}\right)dy=\int 0\ dy=0$$

సాధారణ సాధన $V+\int\left(N_1-\frac{\partial V}{\partial y}\right)dy=C$

i.e. $\frac{x^2y^2}{2}+y^3x+y^2x=C$

1.7 స్వీయ అంచనాత్మక సమస్యలు (సమఘాతీయ అవకలన సమీకరణాలు) :-

1.7.1 $xy' = x + y$ ను సాధించుము.

1.7.2 $xy' - 2y = 3x$ ను సాధించుము.

1.7.3 $x^2 y' - 2y = 3x$ ను సాధించుము.

1.7.4 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$ ను సాధించుము.

1.7.5 $x\dfrac{dy}{dx} = y + xe^{\frac{y}{x}}$ ను సాధించుము.

స్వయం నిర్ణయాత్మక ప్రశ్నల జవాబులు :-

1.7.1 : $y' = \dfrac{x+y}{x} = \dfrac{1+y}{x}$ ---------- (1)

$y = \mathrm{V}\,x$ అనుకొనుము -------- (2)

x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$y' = \mathrm{V} + x\frac{d\,\mathrm{V}}{dx} \text{ ------- (3)}$$

(2) మరియు (3) లను (1)తో ప్రతిక్షేపించగా

$$\mathrm{V} + x\frac{d\,\mathrm{V}}{dx} = 1 + \mathrm{V}$$

$$\Rightarrow x\frac{d\,\mathrm{V}}{dx} = 1$$

విభజనీయ చలరాశుల పద్ధతిలో సమాకలనం చేయగా

$$\int d\,\mathrm{V} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \mathrm{V} = x + c \Rightarrow \frac{y}{x} = x + c$$

1.7.2 : $\frac{dy}{dx} = y' \quad \frac{2y+3x}{x} = \frac{2y}{x} + 3$ ---------- (1)

$y = \mathrm{V}\,x$ అనుకొనుము --------- (2)

x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$\frac{dy}{dn} = \mathrm{V} + x\frac{d\,\mathrm{V}}{dx}$ ---------- (3)

(2) మరియు (3)లను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\mathrm{V} + x\frac{d\,\mathrm{V}}{dx} = 2\mathrm{V} + 3$$

$$\Rightarrow x\frac{d\,\mathrm{V}}{dx} = \mathrm{V} + 3$$

విభజనీయ చలరాశుల పద్ధతిలో సమాకలనం చేయగా

$$\int \frac{d\,\mathrm{V}}{\mathrm{V}+3} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \log\left|\mathrm{V}+3\right| = \log x + \log \mathrm{C} = \log \mathrm{C}\,x$$

$$\Rightarrow \mathrm{V} + 3 = \mathrm{C}\,x$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} + 3 = \mathrm{C}\,x \Rightarrow y + 3x = \mathrm{C}\,x^2$$

1.7.3 : $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2} = 1 - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$ ---------- (1)

$y = \mathrm{V}\,x$ అనుకొనుము --------- (2)

x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{V} + x\frac{d\,\mathrm{V}}{dx} \text{ --------- (3)}$$

(2) మరియు (3)లను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\mathrm{V}+x\frac{d\,\mathrm{V}}{dx}=1-\mathrm{V}+\mathrm{V}^2 \Rightarrow x\frac{d\,\mathrm{V}}{dx}=\mathrm{V}^2-2\,\mathrm{V}+1=(\mathrm{V}-1)^2$$

విభజనీయ చలరాశుల పద్ధతిలో సమాకలనం చేయగా

$$\int \frac{d\,\mathrm{V}}{(\mathrm{V}-1)^2}=\int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{\mathrm{V}-1}=\log x+\mathrm{C} \Rightarrow \frac{x}{x-y}=\log x+\mathrm{C}$$

1.7.4 : $x\dfrac{dy}{dx}=y+xe^{\frac{y}{x}}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y+xe^{\frac{y}{x}}}{x}=\frac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}} \text{ -------------- (1)}$$

$y=\mathrm{V}\,x$ అనుకొనుము ----------- (2)

x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$\frac{dy}{dx}=\mathrm{V}+x\frac{d\,\mathrm{V}}{dx} \text{ ---------- (3)}$$

(2) మరియు (3)లను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\mathrm{V}+x\frac{d\,\mathrm{V}}{dx}=\mathrm{V}+e^{\mathrm{V}} \Rightarrow x\frac{d\,\mathrm{V}}{dx}=e^{\mathrm{V}}$$

విభజనీయ చలరాశుల పద్ధతిలో సమాకలనం చేయగా

$$\int \frac{d\,\mathrm{V}}{e^{\mathrm{V}}}=\int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow -e^{-\mathrm{V}}=\log x+\mathrm{C} \Rightarrow -e^{-\frac{y}{x}}=\log x+\mathrm{C}$$

1.8 సంగ్రహము :-

ఈ పాఠ్యాంశము నందు ప్రథమ పరిమాణ ఏకఘాతీయ, సమఘాతీయ, అసమఘాతీయ, యదార్థ మరియు యదార్థ రూపములోనికి మార్చగలిగిన అవకలన సమీకరణాలను మరియు వాటికి సంబంధించిన సమస్యలను చర్చించినాము.

1.9 సాంకేతిక పదములు :-

సమఘాతీయ, అసమఘాతీయ, యదార్థ అవకలన సమీకరణలు, సమాకలన గుణకము.

అభ్యాసము - IA

1. $y - x\dfrac{dy}{dx} = x + y\dfrac{dy}{dx}$ సాధించుము.

2. $\left(x^2 - y^2\right)dx + 2xy\ dy = 0$ సాధించుము.

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$ సాధించుము.

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$ సాధించుము.

5. $\left(x^3 + 3xy^2\right)dx + \left(y^3 + 3x^2y\right)dy = 0$ సాధించుము.

6. $x\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{dy}{dx} = y\sin\left(\dfrac{y}{x}\right) - x$ సాధించుము.

7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(x+y)^2}{2x^2}$ సాధించుము.

8. $y^2dy = x(xdy - ydx)e^{x/y}$ సాధించుము.

9. $\left(1 + e^{x/y}\right)dx + e^{x/y}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)dy = 0$ సాధించుము.

10. $\left(x - y\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)dx + \left(x\tan^{-1}\dfrac{y}{x}\right)dy = 0$ సాధించుము.

11. $x\dfrac{dy}{dx} = y + x\, e^{y/x}$ సాధించుము.

12. $(x - y\log y + y\log x)\,dx + x(\log y - \log x)\,dy = 0$ సాధించుము.

13. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 y}{x^3 + y^3}$ సాధించుము.

14. $(3xy^2 - y^3)\,dx - (2x^2 y - xy^2)\,dy = 0$ సాధించుము.

అభ్యాసము IB

1. $(12x + 5y - 9)\,dx + (5x + 2y - 4)\,dy = 0$

2. $(x + 2y - 3)\dfrac{dy}{dx} = 2x - y + 1$

3. $(2x + y + 6)\,dx = (y - x - 3)$

4. $(6x + 7y - 4)\,dx + (7x - 4y + 3)\,dy = 0$

5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x - y + 1}{x + 2y - 3}$

6. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y + 1}{x + y - 1}$

7. $(2x + y + 1)\,dx + (4x + 2y - 1)\,dy = 0$

8. $(4x + 6y + 5)\dfrac{dy}{dx} = 3y + 2x + 4$

9. $(2x + 4y + 3)\,dy = (2y + x + 1)\,dx$

10. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6x - 4y + 3}{3x - 2y + 1}$

అభ్యాసము IC

1. $x\left(1+y^2\right)dx+y\left(1+x^2\right)dy=0$

2. $\left(x^2-ay\right)dx=\left(ax-y^2\right)dy$

3. $y\sin 2x dx-\left(y^2+\cos^2 x\right)dy=0$

4. $\left(1+e^{x/y}\right)dx+e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$

5. $\left(e^y+1\right)\cos x\ dx+e^y\sin x\, dy=0$

6. $\left(2x^2+6xy-y^2\right)dx+\left(3x^2-2xy+y^2\right)dy=0$

7. $\left(y^2e^{xy^2}+4x^3\right)dx+\left(2xy\ e^{xy^2}-3y^2\right)dy=0$

8. $\left(xe^{xy}+2y\right)dx+ye^{xy}=0$

9. $x\,dx+y\,dy=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$

10. $(2xy+y-\tan y)dx+\left(x^2-x\tan^2 y+\sec^2 y\right)dy=0$

అభ్యాసము ID

1. $\left(x^2y-2xy^2\right)dx-\left(x^3-3x^2y\right)dy=0$ సాధించుము.

2. $\left(3xy^2-y^3\right)dx=\left(2x^2y-xy^2\right)dy$ సాధించుము.

3. $x^2ydx=\left(x^3+y^3\right)dy$ సాధించుము.

4. $y^2dx+\left(x^2-xy-y^2\right)dy=0$ సాధించుము.

అభ్యాసము IE

1. $y(1+xy)\,dx + x(1-xy)\,dy = 0$ సాధించుము.

2. $y(xy+1)\,dx + x\left(1+xy+x^2y^2\right)dy = 0$ సాధించుము.

3. $y\left(xy+2x^2y^2\right)dx + x\left(xy-x^2y^2\right)dy = 0$ సాధించుము.

4. $y\left(x^2y^2+xy+1\right)dx + x\left(x^2y^2-xy+1\right)dy = 0$ సాధించుము.

అభ్యాసము IF

1. $\left(x^2+y^2+2x\right)dx + 2y\ dy = 0$ సాధించుము.

2. $\left(2y^3+2\right)dx + 3xy^2dy = 0$ సాధించుము.

3. $\left(x^3-2y^2\right)dx + 2xy\ dy = 0$ సాధించుము.

4. $2xy\,dy - \left(x^2+y^2+1\right)dx = 0$ సాధించుము.

5. $\left(3xy-2ay^2\right)dx + \left(x^2-2axy\right)dy = 0$ సాధించుము.

అభ్యాసము IG

1. $\left(y+y^2\right)dx + xydy = 0$ సాధించుము.

2. $\left(x^3+xy^4\right)dx + 2y^3dy = 0$ సాధించుము.

3. $\left(xy^3+y\right)dx + 2\left(x^2y^2+x+y^4\right)dy = 0$ సాధించుము.

4. $\left(y^4+2y\right)dx + \left(xy^3+2y^4-4x\right)dx = 0$ సాధించుము.

అభ్యాసము IA సమాధానములు :

1. $\frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2y^2}{x^2}\right)+\tan^{-1}\frac{y}{x}=-\log x+C$

2. $x^2+y^2=Cx$

3. $x^2-y^2=Cx$

4. $y=Ce^{x^2/2y^2}$

5. $y^2=Cx\left(x^2+y^2\right)$

6. $e^{\cos\left(y/x\right)}=Cx$

7. $\tan^{-1}\left(y/x\right)=Cx$

8. $e^{x/y}\left(\frac{x}{y}-1\right)+\log y=C$

9. $ye^{x/y}+x=C$

10. $xe^{-y/x}=C$

11. $e^{-y/x}+\log|x|+C=0$

12. $y\log y+\left(x-y\right)\log x=y+Cx$

13. $\log y/x-\left(\frac{x^3}{3y^3}\right)+\log x=C$

14. $y^2=Cx^3e^{y/x}$

అభ్యాసము IB సమాధానములు :

1. $6x^2+5xy+y^2-9x-4y=C$

2. $y^2+xy-x^2-x-3y=C$

3. $\left(2x+y-3\right)=C\left(x-y-3\right)^4$

4. $3x^2+7xy-2y^2-4x+3y=C$

5. $\left(y-\frac{7}{5}\right)^2+\left(x-\frac{1}{5}\right)\left(y-\frac{7}{5}\right)-\left(x-\frac{1}{5}\right)^2=C$

6. $e^{y-x}=C\left(x+y\right)$

7. $x+2y+\log|2x+y-1|=C$

8. $14(2x+3y)-9\log|(14x+21y+22)|=49x+C$

9. $4x+8y+5=C\,e^{4x-8y}$

10. $C\,e^{2x-y}=3x-2y+C$

అభ్యాసము IC సమాధానములు :

1. $(1+x^2)(1+y^2)=C$

2. $x^3-3axy+y^3=C$

3. $3y\cos 2x+2y^3+3y=C$

4. $x+ye^{\frac{x}{y}}=C$

5. $(e^y+1)\sin x=C$

6. $2x^3-9x^2y-3xy^2+y^3=C$

7. $e^{xy^2}+x^4-y^3=C$

8. $e^{x/y}+y^2=C$

9. $x^2+y^2+2\tan^{-1}\left(x/y\right)=K$

10. $x^2y+(y-\tan y)x+\tan y=C$

అభ్యాసము ID సమాధానములు :

1. $\frac{x}{y}-2\log|x|+3\log|y|=C$

2. $3\log|x|-2\log|y|+\frac{y}{x}=C$

3. $y=C\,e^{x^3/3y^3}$

4. $y^2(x-y)=C^2(x+y)$

అభ్యాసము IE సమాధానములు :

1. $\frac{x}{y}=C\,e^{\frac{1}{xy}}$

2. $\frac{1}{xy}+\frac{1}{2x^2y^2}=\log|C\,y|$

3. $x^2=C\,ye^{1/xy}$

4. $\left(xy-\frac{1}{xy}\right)+\log x/y=C$

అభ్యాసము IF సమాధానములు :

1. $\left(x^2+y^2\right)e^x=\mathrm{C}$
2. $x^2y^3+x^2=\mathrm{C}$
3. $x^3+y^2=\mathrm{C}\,x^2$
4. $x^2-y^2-1=\mathrm{C}\,x$
5. $x^3y-ax^2y^2=\mathrm{C}$

అభ్యాసము IG సమాధానములు :

1. $x+xy=\mathrm{C}$
2. $\left(x^2+y^4-1\right)e^{x^2}=\mathrm{C}$
3. $\left(x^2+y^4-1\right)e^{x^2}=\mathrm{C}$
4. $xy+\dfrac{2x}{y^2}+y^2=\mathrm{C}$

1.12 మాదిరి ప్రశ్నలు :-

1. $\left(1+e^{x/y}\right)dx+\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dy=0$ ను సాధించుము.
2. $\left(y^2-2xy\right)dx+\left(2xy-x^2\right)dy=0$ ను సాధించుము.
3. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{6x+5y+7}{2x+18y-14}$ ను సాధించుము.
4. $x^2ydx-\left(x^3+y^3\right)dy=0$ ను సాధించుము.
5. $\left(xy^2+2xy^2y^3\right)dx+\left(x^2y-x^3y^2\right)dy=0$ ను సాధించుము.

1.13 సంప్రదించవలసిన పుస్తకములు :-

Vol. I -Deepthi Publications : A Text Book of Mathematics

Vol. I -S.Chand : A Text Book of Mathematics

Introduction to Ordinary Differential Equations by Earl.A. Coddington

పాఠ్య రచయిత

Sri. P.S. Chakravarthy

పాఠము - 2

సరళ అవకలన సమీకరణాలు మరియు బెర్నోలి రూపము

2.1 పాఠము యొక్క లక్ష్యము :-

ఈ పాఠము చదివిన తరువాత సరల అవకలన సమీకరణాలు, బెర్నోలి రూపము తత్సంబంధమైన సమస్యలను తెలుసుకొనుటయే కాక వాటిని ఎలా సాధించాలో తెలిసికొనకలుగుతారు.

2.2 పాఠ్య నిర్మాణ క్రమము :-

ఈ పాఠ్య భాగ స్వరూపము అధ్యయనము చేయవలసిన అంశాలు

2.3 నిర్వచనములు మరియు సిద్ధాంతములు

సరళ అవకలన సమీకరణములు

2.4 స్వయం నిర్ణయాత్మక ప్రశ్నలు

2.5 స్వయం నిర్ణయాత్మక ప్రశ్నలకు జవాబులు

2.6 సంగ్రహము

2.7 సాంకేతిక పదములు

2.8 అభ్యాసములు

2.9 అభ్యాసములకు జవాబులు

2.10 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు

2.11 సంప్రదించవలసిన పుస్తకములు

ఉపోద్ఘాతం :-

2.3.1 నిర్వచనము :- $\mathrm{P}(x)$, $\mathrm{Q}(x)$లు 'x'లో ప్రమేయాలయిన, $\dfrac{dy}{dx}+\mathrm{P}(x)y=\mathrm{Q}(x)$ రూపములోని అవకలన సమీకరణమును, y లో ప్రథమ పరిమాణ సరళ అవకలన సమీకరణము అంటాము.

2.3.2 సిద్ధాంతము :- సరళ అవకలన సమీకరణము $\dfrac{dy}{dx}+\mathrm{P}(x)\cdot y=\mathrm{Q}(x)$ యొక్క సాధారణ సాధన $y\cdot e^{\int \mathrm{P}\,dx}=\int \mathrm{Q}\cdot e^{\int \mathrm{P}\,dx}dx\cdot$

ఉపపత్తి :- దత్త సమీకరణము $\frac{dy}{dx}+\mathrm{P}\cdot y=\mathrm{Q}$ ---------- (1)

$$\Rightarrow dy+\mathrm{P}\,y\,dx=\mathrm{Q}\,dx$$

$$\Rightarrow (\mathrm{P}\,y-\mathrm{Q})\,dx+dy=0 \text{ ------------ (2)}$$

ఇక్కడ $\mathrm{M}=\mathrm{P}\,y-\mathrm{Q} \quad \mathrm{N}=1$

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}=\mathrm{P}, \quad \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}=0$$

$$\therefore \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}\neq\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}$$

కావున (2) యదార్థ అవకలన సమీకరణము కాదు.

ఇప్పుడు $\frac{1}{\mathrm{N}}\left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}-\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}\right)=\mathrm{P}-0=\mathrm{P}$ ('x'లో మాత్రమే ప్రమేయము)

$\therefore$ సమాకలన గుణకము $=e^{\int \mathrm{P}\,dx}$

(1)ని $e^{\int \mathrm{P}\,dx}$ చే హెచ్చించగా,

$$e^{\int \mathrm{P}\,dx}\left(\frac{dy}{dx}+\mathrm{P}\,y\right)=\mathrm{Q}\,e^{\int \mathrm{P}\,dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}e^{\int \mathrm{P}\,dx}+y\cdot\mathrm{P}\,e^{\int \mathrm{P}\,dx}=\mathrm{Q}\,e^{\int \mathrm{P}\,dx}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(ye^{\int \mathrm{P}\,dx}\right)=\mathrm{Q}\,e^{\int \mathrm{P}\,dx}$$

$\therefore ye^{\int \mathrm{P}\,dx}=\int \mathrm{Q}\cdot e^{\int \mathrm{P}\,dx}dx+\mathrm{C}$, $\frac{dy}{dx}+\mathrm{P}\,y=\mathrm{Q}$

అవకలన సమీకరణానికి సాధారణ సాధన

(లేదా)

దత్త సమీకరణము $\frac{dy}{dx}+\mathrm{P}\,y=\mathrm{Q}$ .... (1)

$\dfrac{dy}{dx}+\mathrm{P}\,y=0$ తీసుకొనుము.

విభజనీయ చలరాశుల పద్ధతిలో సమాకలనము చేయగా

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\mathrm{P}\,dx$$

$$\Rightarrow \log y+\log\mathrm{C}=-\int\mathrm{P}\,dx$$

$$\Rightarrow \log\mathrm{C}\,y=-\int\mathrm{P}\,dx$$

$$\Rightarrow \mathrm{C}\,y=e^{-\int\mathrm{P}\,dx}$$

దీనిని $y\cdot e^{\int\mathrm{P}\,dx}=\mathrm{K}$ గా రాయవచ్చును.

ఇప్పుడు (1) యొక్క ఎడమ చేతి వైపును $\dfrac{1}{e^{\int\mathrm{P}\,dx}}\dfrac{d}{dx}\left(ye^{\int\mathrm{P}\,dx}\right)$ గా రాయవచ్చు.

$$\therefore \frac{1}{e^{\int\mathrm{P}\,dx}}\frac{d}{dx}\left(y\,e^{\int\mathrm{P}\,dx}\right)=\mathrm{Q}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(ye^{\int\mathrm{P}\,dx}\right)=\mathrm{Q}\,e^{\int\mathrm{P}\,dx}$$

$$\Rightarrow \int\frac{d}{dx}\left(ye^{\int\mathrm{P}\,dx}\right)=\int\mathrm{Q}\cdot\ e^{\int\mathrm{P}\,dx}\,dx$$

$$\Rightarrow y\ e^{\int\mathrm{P}\,dx}=\int\mathrm{Q}\cdot e^{\int\mathrm{P}\,dx}\ dx$$

అనగా యదార్థ అవకలన భావము అవసరము లేకుండానే సమాకలన కారణాంకము $e^{\int Pdx}$ ను కనుగొనవచ్చు.

2.3.3 బెర్నోలి సమీకరణము :-

నిర్వచనము :- P, Q లు 'x'లో మాత్రమే ప్రమేయాలయి, $\dfrac{dy}{dx}+\mathrm{P}\,y=\mathrm{Q}\,y^{n}$ రూపములోని సమీకరణమును బెర్నోలి అవకలన సమీకరణం అంటాం.

2.3.4 బెర్నోలి అవకలన సమీకరణమునకు సాధన :-

దత్త సమీకరణము $\frac{dy}{dx}+\mathrm{P}\,y=\mathrm{Q}\,y^{n}$ .... (1)

ఇచట $P, Q,$ xలో మాత్రమే ప్రమేయాలు, 'n' వాస్తవ సంఖ్య.

సందర్భము 1 :- $n=1$ అయిన

సమీకరణము (1)ని $\frac{dy}{dx}+(\mathrm{P}-\mathrm{Q})\,y=0$ ----------- (2)గా రాయవచ్చును.

విభజనీయ చలరాశుల పద్ధతిలో (2) యొక్క సాధారణ సాధన $\int \frac{dy}{y}+\int(\mathrm{P}-\mathrm{Q})\,dx=\mathrm{C}$

సందర్భము 2 :- $n\neq 1$

సమీకరణము (1) ని y^{-n} తో హెచ్చించగా

$y^{-n}\frac{dy}{dx}+\mathrm{P}\,y^{1-n}=\mathrm{Q}$ ----------- (3)

$y^{1-n}=u$ అనుకొనుము ---------- (4)

x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$(1-n)\,y^{-n}\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}$ --------- (5)

(4) మరియు (5)లను (3)లో ప్రతిక్షేపించగా

$\frac{du}{dx}+(1-n)\mathrm{P}\cdot u=(1-n)\mathrm{Q}$ ---------- (6)

(6) u లో సరళ అవకలన సమీకరణము

సమాకలన గుణకము $=e^{\int(1-n)\mathrm{P}\,dx}$

$\therefore$ (6) యొక్క సాధారణ సాధన $ue^{\int(1-n)\mathrm{P}\,dx}=\int(1-n)\mathrm{Q}\cdot e^{\int(1-n)\mathrm{P}\,dx}$ ---------- (7)

$u=y^{1-n}$ ని (7)లో ప్రతిక్షేపించగా

(1) యొక్క సాధారణ సాధన

$$Y^{1-n} \cdot e^{\int (1-n)P dx} = \int (1-n) Q e^{\int (1-n) dx}$$

2.3.5 సమస్య :- $x^2 \dfrac{dy}{dx} + (x-2)y = x^2 e^{-2/x}$ సాధించుము.

సాధన :- దత్త సమీకరణము $x^2 \dfrac{dy}{dx} + (x-2)y = x^2 e^{-2/x}$ ---------- (1)

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + \left(\frac{x-2}{x^2}\right) y = e^{-2/x} \text{ ---------(2)}$$

(2) y లో సరల అవకలన సమీకరణము అని స్పష్టము.

$$P = \frac{x-2}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \qquad Q = e^{-2/x}$$

$$\int P\, dx = \int \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\, dx = \log|x| + \frac{2}{x}$$

$$e^{\int P\, dx} = e^{\log|x| + \frac{2}{x}} = e^{\log|x|} \cdot e^{2/x} = |x| \cdot e^{2/x}$$

సాధారణ సాధన $y \cdot |x|\ e^{2/x} = \int e^{-2/x} |x|\, e^{2/x} dx$

$$= \int |x|\ dx = \frac{x|x|}{2} + C$$

2.3.6 సమస్య :- $\left(x^2 - 1\right) \dfrac{dy}{dx} + 2xy = 1$ సాధించుము.

సాధన :- దత్త సమీకరణము $\left(x^2 - 1\right) \dfrac{dy}{dx} + 2xy = 1$ -------- (1)

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{2x}{x^2-1}\, y = \frac{1}{x^2-1} \text{ ---------- (2)}$$

y లో (2) సరళ అవకలన సమీకరణము

$$\mathrm{P}=\frac{2x}{x^2-1}, \qquad \mathrm{Q}=\frac{1}{x^2-1}$$

$$\int \mathrm{P}\,dx=\int\frac{2x}{x^2-1}\,dx=\log\left|x^2-1\right|$$

సమాకలన గుణకం $=e^{\int \mathrm{P}\,dx}=e^{\log\left|x^2-1\right|}$

$$=x^2-1$$

సాధారణ సాధన $y\cdot e^{\int \mathrm{P}\,dx}=\int \mathrm{Q}\cdot e^{\int \mathrm{P}\,dx}dx$

i.e. $y\left(x^2-1\right)=\int\frac{1}{x^2-1}\left(x^2-1\right)dx=\int 1.dx$

$$=x+\mathrm{C}$$

2.3.7 సమస్య :- $x\log x\frac{dy}{dx}+y=2\log x$ సాధించుము.

సాధన :- దత్త సమీకరణము $x\log x\frac{dy}{dx}+y=2\log x$ ---------- (1)

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x\log x}y=\frac{2}{x} \text{ ----------- (2)}$$

y లో (2) సరళ అవకలన సమీకరణము

ఇక్కడ $\mathrm{P}=\frac{1}{x\log x}$ $\mathrm{Q}=\frac{2}{x}$

$$e^{\int \mathrm{P}\,dx}=e^{\int\frac{1}{x\log x}dx}$$

$$=e^{\int\frac{1/x}{\log x}dx}=e^{\log(\log x)}=\log x$$

సాధారణ సాధన

$$y \cdot e^{\int P\,dx} = \int Q \cdot e^{\int P\,dx} dx$$

i.e., $y(\log x) = \int \frac{2}{x} \cdot \log x \; dx$

$$= 2\int \log x \cdot \frac{1}{x} \; dx$$

$$= \frac{2(\log x)^2}{2} + C$$

$$\therefore y(\log x) = (\log x)^2 + C$$

2.3.8 సమస్య :- $x(x-1)\frac{dy}{dx} - y = x^2(x-1)^2$ ను సాధించుము.

సాధన :- దత్త సమీకరణము $x(x-1)\frac{dy}{dx} - y = x^2(x-1)^2$ ------------- (1)

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{1}{x(x-1)\,y} = x(x-1) \text{---------- (2)}$$

y లో (2) సరళ అవకలన సమీకరణము

ఇక్కడ $P = \frac{-1}{x(x-1)}$ $\qquad Q = x(x-1)$

$$\int P\,dx = \int \frac{-1}{x(x-1)} \, dx$$

$$= \int \frac{(x-1)-x}{x(x-1)} \, dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}\right) dx$$

$$= \log|x| - \log|x-1|$$

$$= \log\left|\frac{x}{x-1}\right|$$

సమాకలన గుణకం $= e^{\int \mathrm{P}\, dx} = e^{\log\frac{x}{x-1}} = \frac{x}{x-1}$

సాధారణ సాధన $y.e^{\int \mathrm{P}\, dx} = \int \mathrm{Q}\cdot e^{\int \mathrm{P}\, dx}\, dx$

i.e. $y\cdot\frac{x}{x-1} = \int x(x-1)\cdot\frac{x}{x-1}\, dx$

$$= \int x^2\ dx = \frac{x^3}{3} + \mathrm{C}$$

$$\therefore\ y\cdot\frac{x}{x-1} = \frac{x^3}{3} + \mathrm{C}$$

2.3.9 సమస్య :- $x\frac{dy}{dx} + y\log x = e^x\cdot x^{1-\frac{1}{2}\log x}$ ను సాధించుము.

సాధన :- దత్త సమీకరణము $x\frac{dy}{dx} + y\log x = e^x\cdot x^{1-\frac{1}{2}\log x}$ ---------- (1)

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{\log x}{x} y = e^x\cdot\frac{1}{x^{1/2\log x}} \text{ --------- (2)}$$

y లో (2) సరళ అవకలన సమీకరణము

ఇక్కడ $\mathrm{P} = \frac{\log x}{x}$ $\qquad \mathrm{Q} = \frac{e^x}{x^{1/2\log x}}$

$$\int \mathrm{P}\, dx = \int \frac{\log x}{x}\ dx = \int \log x\cdot\frac{1}{x}\ dx = \frac{(\log x)^2}{2}$$

సమాకలన గుణకం $= e^{\int \mathrm{P}\, dx} = e^{\frac{(\log x)^2}{2}}$

$$= \left(e^{\log x}\right)^{\frac{1}{2}\log x}$$

$$= x^{1/2 \log x}$$

సాధారణ సాధన $y\, e^{\int P\, dx} = \int Q \cdot e^{\int P\, dx}\, dx$

i.e. $y \cdot x^{1/2 \log x} = \int \dfrac{e^x}{x^{1/2 \log x}} \cdot x^{1/2 \log x}\; dx$

$$= \int e^x\; dx$$

$$= e^x + C$$

$\therefore\; y \cdot x^{1/2 \log x} = e^x + C$

2.3.10 సమస్య :- $(x+y+1)\dfrac{dy}{dx} = 1$ సాధించుము.

సాధన :- దత్త సమీకరణము $(x+y+1)\dfrac{dy}{dx} = 1$----------(1)

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = x + y + 1$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} - x = y + 1 \text{-------- (2)}$$

xలో (2) సరళ అవకలన సమీకరణము

ఇక్కడ $P = -1 \qquad Q = y + 1$

$$\int P\, dy = \int (-1)\, dy = -y$$

సమాకలన గుణకం $= e^{\int P\, dy} = e^{-y}$

సాధారణ సాధన $x \cdot e^{\int P\, dy} = \int Q \cdot e^{\int P\, dy}\; dy$

i.e., $x \cdot e^{-y} = \int (y+1)e^{-y}dy$

$$= (y+1)\int e^{-y}dy - \int\left(1 \cdot \int e^{-y}dy\right)dy$$

$$= (y+1)\left(-e^{-y}\right) - \int -e^{-y}dy$$

$$= -(y+1)e^{-y} - e^{-y} + \mathrm{C}$$

$$\therefore x \cdot e^{-y} = -(y+1)e^{-y} - e^{-y} + \mathrm{C}$$

2.3.11 సమస్య :- $\left(1+y^2\right)+\left(x-e^{\tan^{-1}y}\right)\dfrac{dy}{dx}=0$ ను సాధించుము.

సాధన :- దత్త సమీకరణము $\left(1+y^2\right)+\left(x \cdot e^{\tan^{-1}y}\right)\dfrac{dy}{dx}=0$ -------- (1)

$$\Rightarrow \left(1+y^2\right)\frac{dx}{dy}+\left(x-e^{\tan^{-1}y}\right)=0$$

$$\Rightarrow \left(1+y^2\right)\frac{dx}{dy}+x=e^{\tan^{-1}y} \text{ ---------------- (2)}$$

$\left(1+y^2\right)$ చే భాగించగా

$$\frac{dx}{dy}+\frac{1}{1+y^2}\ x=\frac{e^{\tan^{-1}y}}{1+y^2} \text{ --------------- (3)}$$

xలో (3) సరళ అవకలన సమీకరణము

ఇక్కడ $\mathrm{P}=\dfrac{1}{1+y^2}, \quad \mathrm{Q}=\dfrac{e^{\tan^{-1}y}}{1+y^2}$

$$\int \mathrm{P}\,dy=\int \frac{1}{1+y^2}\,dy=\tan^{-1}y$$

సమాకలన గుణకం $= e^{\int \mathrm{P}\,dy}$

$$= e^{\tan^{-1} y}$$

సాధారణ సాధన

$$x \cdot e^{\int \mathrm{P}\,dy} = \int \mathrm{Q} \cdot e^{\int \mathrm{P}\,dy}\; dy$$

i.e. $x \cdot e^{\tan^{-1} y} = \displaystyle\int \frac{e^{\tan^{-1} y}}{1+y^2}\, e^{\tan^{-1} y}\; dy$

$$= \int e^{2\tan^{-1} y} \cdot \frac{1}{1+y^2}\; dy$$

$$= \frac{e^{2\tan^{-1} y}}{2} + \mathrm{C}$$

$$\therefore x \cdot e^{\tan^{-1} y} = e^{\frac{2\tan^{-1} y}{2}} + \mathrm{C}$$

2.3.12 సమస్య :- $\dfrac{dy}{dx} + y\cot x = 4x\ \operatorname{cosec} x$ ను సాధించుము.

$y = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ అయిన ప్రత్యేక సాధన కనుగొనుము.

సాధన :- దత్త సమీకరణము $\dfrac{dy}{dx} + y\cot x = 4x\ \operatorname{cosec} x$ ---------- (1)

y లో (1) సరళ అవకలన సమీకరణము

ఇక్కడ $\mathrm{P} = \cot x$ $\quad \mathrm{Q} = 4x\ \operatorname{cosec}\ x$

$$\int \mathrm{P}\,dx = \int \cot x\ dx\ = \log|\sin x|$$

సమాకలన గుణకం $= e^{\int \mathrm{P}\,dx}$

$$= e^{\log|\sin x|}$$

$$= |\sin x|$$

సాధారణ సాధన $y \cdot e^{\int P\, dx} = \int Q \cdot\ e^{\int P\, dx}\ dx$

i.e. $y|\sin x| = \int 4x \cdot \operatorname{cosec} x \cdot |\sin x|\ dx$

$$= \int 4x\ dx = 2x^2 + C$$

$$\therefore\ y|\sin x| = 2x^2 + C$$

If $x = \frac{\pi}{2}$ అయితే $y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{2\pi^2}{4} + C$

$$\Rightarrow C = \frac{-\pi^2}{2}$$

$\therefore$ ప్రత్యేక సాధన (1) $\quad y|\sin x| = 2x^2 - \frac{\pi^2}{2}$

2.3.13 సమస్య :- $\frac{dy}{dx} + y\cot x = y^2 \sin^2 x\ \cos^2 x$ ను సాధించుము.

సాధన :- దత్త సమీకరణము $\frac{dy}{dx} + y\cot x = y^2 \sin^2 x\ \cos^2 x$ ---------- (1)

ఇది బెర్నోలి సమీకరణము

(1)ని y^2తో భాగించగా,

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{y}\cot x = \sin^2 x\ \cos^2 x \text{ --------- (2)}$$

$\frac{1}{y} = u$ అనుకొనుము -------(3)

x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}=\frac{-du}{dx} \text{ --------- } (4)$$

(3) మరియు (4) లను (2)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$-\frac{du}{dx}+u\cot x=\sin^2 x\ \cos^2 x$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx}=-u\cot x=-\sin^2 x\cos^2 x \text{ ----------}(5)$$

ఇక్కడ u లో (5) సరళ అవకలన సమీకరణము

ఇక్కడ $\mathrm{P}=-\cot x \qquad \mathrm{Q}=-\sin^2 x\ \cos^2 x$

$$\int \mathrm{P}\,dx=\int -\cot x\,dx=-\log\sin x=\log(\sin x)^{-1}=\log\frac{1}{\sin x}$$

సమాకలన గుణకం $=e^{\int \mathrm{P}\,dx}=e^{\log\frac{1}{\sin x}}=\frac{1}{\sin x}$

సాధారణ సాధన (5) $\quad u\cdot\frac{1}{\sin x}=\int -\sin^2 x\ \cos^2 x\frac{1}{\sin x}\ dx$

$$\Rightarrow \frac{u}{\sin x}=\int(\cos x)^2(-\sin x\,dx)$$

$$=\frac{(\cos x)^3}{3}+\mathrm{C} \text{ -------}(6)$$

(6) లో $u=\frac{1}{y}$ ని ప్రతిక్షేపించగా,

సాధారణ సాధన (1) $\quad \frac{1}{y\sin x}=\frac{(\cos x)^3}{3}+\mathrm{C}$

2.3.14 సమస్య :- $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=x^2y^6$ ను సాధించుము.

సాధన :- దత్త సమీకరణము $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=x^2y^6$ ------------ (1)

ఇది బెర్నోలి సమీకరణము

y^6, (1)తో భాగించగా

$$\frac{1}{y^6}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{xy^5}=x^2 \text{ --------- (2)}$$

$$\frac{1}{y^5}=u$$ అనుకొనుము ---------- (3)

x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$\frac{-5}{y^6}\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^6}\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{5}\frac{dy}{dx} \text{ --------- (4)}$$

(3) మరియు (4)లను (2)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$-\frac{1}{5}\frac{du}{dx}+\frac{1}{x}u=x^2$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx}-\frac{5u}{x}=-5x^2 \text{ ---------- (5)}$$

u లో (5) సరళ అవకలన సమీకరణము

ఇక్కడ $P=\frac{-5}{x}$ $\quad Q=-5x^2$

$$\int P\,dx=\int\frac{-5}{x}dx=-5\log|x|=\log\frac{1}{x^5}$$

సమాకలన గుణకము $= e^{\int P\, dx} = e^{\log 1/x^5} = 1/x^5$

సాధారణ సాధన (5)

$$u \cdot \frac{1}{x^5} = \int -5x^2 \cdot \frac{1}{x^5}\, dx$$

$$= -5\int \frac{1}{x^3}\, dx$$

$$= (-5)\left(\frac{-1}{2x^2}\right) + C$$

$$= \frac{5}{2x^2} + C$$

$\therefore$ సాధారణ సాధన (1) $\quad \dfrac{1}{x^5\ y^5} = \dfrac{5}{2x^2} + C$

2.3.15 సమస్య :- $x\dfrac{dy}{dx} + y = y^2 \log x$ ను సాధించుము.

సాధన :- దత్త సమీకరణము $x\dfrac{dy}{dx} + y = y^2 \log x$ ---------- (1)

ఇది బెర్నోలి సమీకరణము

xy^2 తో (1)ని భాగించగా,

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{xy} = \frac{\log x}{x} \text{ ------------- (2)}$$

$\dfrac{1}{y} = u$ అనుకొనుము ---------- (3)

x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}=-\frac{du}{dx} \text{ ---------- (4)}$$

(3) మరియు (4)లను (2)లో ప్రతిక్షేపించగా,

$$-\frac{du}{dx}+\frac{u}{x}=\frac{\log x}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx}-\frac{u}{x}=\frac{-\log x}{x} \text{-------- (5)}$$

u లో (5) సరళ అవకలన సమీకరణము

ఇక్కడ $p=-\frac{1}{x}$ $\qquad$ $Q=\frac{-\log x}{x}$

$$\int P\, dx=\int\frac{-1}{x}=-\log|x|=\log\frac{1}{x}$$

సమాకలన గుణకం $=e^{\int P\,dx}=e^{\log\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$

$$=\int \log x\cdot\frac{1}{x^2}\,dx$$

$$=\left[\log x\int\frac{1}{x^2}-\int\left(\frac{1}{x}\int\frac{1}{x^2}\,dx\right)dx\right]$$

$$=\left[\log x\left(\frac{-1}{x}\right)-\int\frac{-1}{x^2}\,dx\right]$$

$$=\frac{-\log x}{x}-\frac{1}{x}+C$$

సాధారణ సాధన (1) $\quad \frac{1}{xy}=\frac{-\log x}{x}-\frac{1}{x}+C$

2.3.16 సమస్య :- $3\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{1+x}=\frac{x^3}{y^2}$ సాధించుము.

సాధన :- దత్త సమీకరణము $3\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{1+x}=\frac{x^3}{y^2}$ ----------- (1)

ఇది బెర్నోలి సమీకరణము

y^2 తో హెచ్చించగా

$$3y^2\frac{dy}{dx}+\frac{2y^3}{1+x}=x^3 \text{--------- (2)}$$

$y^3=u$ అనుకొనుము -------- (3)

x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$3y^2\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx} \text{ --------- (4)}$$

(3) మరియు (4)లను (2)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\frac{du}{dx}+\frac{2}{1+x}u=x^3 \text{--------- (5)}$$

u లో (5) సరళ అవకలన సమీకరణము

ఇక్కడ $\mathrm{P}=\frac{2}{1+x}$ $\quad\quad$ $\mathrm{Q}=x^3$

$$\int \mathrm{P}\,dx=\int\frac{2}{1+x}dx=2\log|1+x|=\log(1+x)^2$$

సమాకలన గుణకము $=e^{\int \mathrm{P}\,dx}=e^{\log(1+x)^2}=(1+x)^2$

సాధారణ సాధన (5)

$$u\cdot(1+x)^2=\int x^3(1+x)^2dx$$

$$= \int \left(x^5 + 2x^4 + x^3\right) dx$$

$$= \frac{x^6}{6} + \frac{2x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + C$$

సాధారణ సాధన (1)

$$y^3 (1+x)^2 = \frac{x^6}{6} + \frac{2x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + C$$

2.3.17 సమస్య :- $\frac{dy}{dx} + \frac{xy}{1-x^2} = xy^{1/2}$ ను సాధించుము.

సాధన :- దత్త సమీకరణము $\frac{dy}{dx} + \frac{x}{1-x^2} y = xy^{1/2}$ ---------- (1)

ఇది బెర్నోలి సమీకరణము

$y^{1/2}$ తో (1) హెచ్చించగా,

$$\frac{1}{y^{1/2}} \frac{dy}{dx} + \frac{x}{1-x^2} y^{1/2} = x \text{ -------------- } (2)$$

$y^{1/2} = u$ అనుకొనుము ---------- (3)

x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$\frac{1}{2} y^{-1/2} \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^{1/2}} \frac{dy}{dx} = 2\frac{du}{dx} \text{ --------- } (4)$$

(3) మరియు (4)లను (2)లో ప్రతిక్షేపించగా,

$$2\frac{du}{dx} + \frac{x}{1-x^2} u = x$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx}+\frac{x}{2\left(1-x^2\right)}\,u=\frac{x}{2} \text{ ---------- (5)}$$

ఇది 'u'లో సరళ అవకల సమీకరణము

ఇక్కడ $\quad P=\dfrac{x}{2\left(1-x^2\right)} \quad Q=\dfrac{x}{2}$

$$\int P dx=\int \frac{x}{2\left(1-x^2\right)}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{1-x^2}\,dx$$

$$=\frac{-1}{4}\log\left(1-x^2\right)$$

$$=\log\frac{1}{\left(1-x^2\right)^{1/4}}$$

$\therefore$ సమాకలన గుణకం $= e^{\int P\,dx}$

$$= e^{\log\frac{1}{\left(1-x^2\right)^{1/4}}}$$

$$=\frac{1}{\left(1-x^2\right)^{1/4}}$$

సాధారణ సాధన (5) $u\cdot\dfrac{1}{\left(1-x^2\right)^{1/4}}=\displaystyle\int \frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\left(1-x^2\right)^{1/4}}\,dx$

$$=\frac{-1}{4}\int \frac{-2x}{\left(1-x^2\right)^{1/4}}\,dx$$

$$= -\frac{1}{4} \times \frac{\left(1-x^2\right)^{3/4}}{\frac{3}{4}} + C$$

$$= \frac{-\left(1-x^2\right)^{3/4}}{3} + C$$

$\therefore$ సాధారణ సాధన (1) $\dfrac{y^{1/2}}{\left(1-x^2\right)^{1/4}} = \dfrac{-\left(1-x^2\right)^{3/4}}{3} + c$

2.3.18 సమస్య :- $\dfrac{dy}{dx} + x\sin 2y = x^3 \cos^2 y$ ను సాధించుము.

సాధన :- దత్త సమీకరణము $\dfrac{dy}{dx} + x\sin 2y = x^3 \cos^2 y$ ---------- (1)

ఇది బెర్నోలి సమీకరణము

$\cos^2 y$ (1)తో భాగించగా,

$$\frac{1}{\cos^2 y}\frac{dy}{dx} + \frac{x\sin 2y}{\cos^2 y} = x^3$$

$\Rightarrow \sec^2 y\dfrac{dy}{dx} + x\left(2\tan y\right) = x^3$ ------------- (2)

$\tan y = u$ అనుకొనుము ------------ (3)

x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$\sec^2 y\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx}$ ---------- (4)

(3) మరియు (40లను (2)లో ప్రతిక్షేపించగా

$\dfrac{du}{dx} + 2xu = x^3$ ---------- (5)

u లో (5) సరళ అవకలన సమీకరణము

ఇక్కడ $P = 2x \qquad Q = x^3$

$$\int P\ dx = \int 2x\ dx = x^2$$

సమాకలన గుణకము $= e^{\int P\, dx} = e^{x^2}$

సాధారణ సాధన (5) $u \cdot e^{x^2} = \int x^3 \cdot e^{x^2}\ dx$

$$= \frac{1}{2}\int e^{x^2} \cdot x^2 \cdot 2x\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\ e^{x^2}\left(x^2 - 1\right) + C$$

$\therefore$ సాధారణ సాధన (1) $\tan y \cdot e^{x^2} = \frac{1}{2} e^{x^2}\left(x^2 - 1\right) + C$

2.3.19 సమస్య :- $x > 0,\ \ y = 1$ అయినప్పుడు $x = \pi$ అయిన $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^2 x \sin x$ సాధించుము.

సాధన :- దత్త సమీకరణము $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^2 x \sin x$ ----------- (1)

ఇది బెర్నోలి సమీకరణము

y^2 ని (1)తో భాగించగా,

$$\frac{1}{y^2}\ \frac{dy}{dx} + \frac{1}{xy} = x \sin x \text{ -------------- (2)}$$

$\frac{1}{y} = u$ అనుకొనుము---------- (3)

x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$\frac{-1}{y^2}\ \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = \frac{-du}{dx} \text{---------} (4)$$

(3) మరియు (4)లను (2)లో ప్రతిక్షేపించగా,

$$\frac{-du}{dx} + \frac{y}{x} = x\sin x$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx}\ \frac{-u}{x} = -x\sin x \text{----------} (5)$$

u లో (5) సరళ అవకలన సమీకరణము

ఇక్కడ $\mathrm{P} = \frac{-1}{x} \qquad \mathrm{Q} = -x\sin x$

$$\int \mathrm{P}\,dx = \int \frac{-1}{x}dx = -\log|x| = \log\frac{1}{x}$$

సమాకలన గుణకము $= e^{\int \mathrm{P}\,dx} = e^{\log\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$

సాధారణ సాధన (1)

$$u\cdot\frac{1}{x} = \int -x\sin x\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$= \int -\sin x\ dx = \cos x + \mathrm{C}$$

$\therefore$ సాధారణ సాధన (1) $\frac{1}{xy} = \cos x + \mathrm{C}$

$x = \pi$ అయితే $y = 1$ అని ఇచ్చియున్నారు.

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi} = \cos\pi + \mathrm{C}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi} = -1 + \mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{C} = \frac{1}{\pi} + 1 = \frac{\pi+1}{\pi}$$

$\therefore$ దత్త సమీకరణమునకు $x = \pi,\quad y = 1$ అయినప్పుడు

ప్రత్యేక సాధన

$$\frac{1}{xy} = \cos x + \frac{\pi + 1}{\pi}$$

2.3.20 సమస్య :- $\frac{dy}{dx}\left(x^2 y^3 + xy\right) = 1$ను సాధించుము.

సాధన :- దత్త సమీకరణము $\frac{dy}{dx}\left(x^2 y^3 + xy\right) = 1$ -------------- (1)

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = x^2 y^3 + xy$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} - xy = x^2 y^3$$

x^2 తో భాగించగా

$$\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dy} - \frac{1}{x} y = y^3 \text{ ----------- (2)}$$

$\frac{1}{x} = u$ అనుకొనుము ----------(3)

y దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$\frac{-1}{x^2}\frac{dx}{dy} = \frac{du}{dy} \text{ ---------- (4)}$$

(5) మరియు (4)లను (2)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$-\frac{du}{dx} - uy = y^3$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dy} + uy = -y^3 \text{ ----------(5)}$$

u లో (5) సరళ అవకలన సమీకరణము

ఇక్కడ $\mathrm{P} = y \quad \mathrm{Q} = -y^3$

$$\int \mathrm{P}\, dy = \int y\, dy = \frac{y^2}{2}$$

సమాకలన గుణకము $= e^{\int \mathrm{P}\, dy} = e^{y^2/2}$

సాధారణ సాధన

$$u \cdot e^{y^2/2} = \int -y^3 \cdot e^{y^2/2}\, dy$$

$$= 2\int e^{\frac{y^2}{2}} \cdot \frac{y^2}{2} \cdot -y\ dy$$

$\dfrac{y^2}{2} = t$ అనుకొనుము.

$$\Rightarrow y\, dy = dt$$

$$\therefore u \cdot e^{y^2/2} = 2\int e^t \cdot t - dt$$

$$= -2\left[t\int e^t\, dt - \int\left(1\int e^t dt\right)dt\right]$$

$$= -2te^t + 2e^t + \mathrm{C}$$

$$= -y^2\, e^{y^2/2} + 2e^{y^2/2} + \mathrm{C}$$

$\therefore$ సాధారణ సాధన (1) $\dfrac{1}{x}e^{y^2/2} = -\,y^2\, e^{y^2/2} + 2\,e^{y^2/2} + \mathrm{C}$

2.3.21 సమస్య :- $\dfrac{dy}{dx} + \left(2x\tan^{-1} y - x^3\right)\left(1 + y^2\right) = 0$ ను సాధించుము.

సాధన :- దత్త సమీకరణము $\dfrac{dy}{dx} + \left(2x\tan^{-1} y - x^3\right)\left(1 + y^2\right) = 0$ ------------- (1)

$\left(1 + y^2\right)$ తో భాగించగా

$$\frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dx}+\left(2x\tan^{-1}y-x^3\right)=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dx}+2x\tan^{-1}y=x^3 \text{ -----------(2)}$$

$\tan^{-1}y=u$ అనుకొనుము ----------(3)

x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$\frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx} \text{----------- (4)}$$

(3) మరియు (4)లను (2)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\frac{du}{dx}+2xu=x^3 \text{---------- (5)}$$

u లో (5) సరళ అవకలన సమీకరణము

ఇక్కడ $P=2x$ $\quad Q=x^3$

$$\int P\,dx=\int 2x\ dx=x^2$$

సమాకలన గుణకము $e^{\int P\,dx}=e^{x^2}$

సాధారణ సాధన (5)

$$u\cdot e^{x^2} = \int x^3\cdot e^{x^2}\ dx$$

$$=\frac{1}{2}\int e^{x^2}\cdot x^2\cdot 2x\ dx$$

$x^2=t$ అయితే $2x\ dx=dt$ అనుకొనుము.

$$\therefore u\cdot e^{x^2}=\frac{1}{2}\int e^t\cdot t\ dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[t\int e^t\,dt-\int\left(1\int e^t dt\right)dt\right]$$

$$=\frac{1}{2}t\,e^t-\frac{1}{2}e^t+\mathrm{C}$$

$$=\frac{x^2e^{x^2}}{2}-\frac{e^{x^2}}{2}+\mathrm{C}$$

సాధారణ సాధన (1)

$$\tan^{-1}y\cdot e^{x^2}=\frac{x^2e^{x^2}}{2}-\frac{e^{x^2}}{2}+\mathrm{C}$$

2.3.22 సమస్య :- $\frac{dy}{dx}=(\sin x-\sin y)\frac{\cos x}{\cos y}$ సాధించుము.

సాధన :- దత్త సమీకరణము $\frac{dy}{dx}=(\sin x-\sin y)\frac{\cos x}{\cos y}$ ---------- (1)

$$\Rightarrow\cos y\cdot\frac{dy}{dx}=\sin x\,\cos x-\sin y\,\cos x$$

$$\Rightarrow\cos y\cdot\frac{dy}{dx}+\sin y\cdot\cos x=\sin x\,\cos x \text{ ---------- (2)}$$

$\sin y=u$ అనుకొనుము --------- (3)

x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$\cos y\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx} \text{ ----------- (4)}$$

(3) మరియు (4)లను (2)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\frac{du}{dx}+u\cos x=\sin x\,\cos x \text{ ---------- (5)}$$

u లో (5) సరళ అవకలన సమీకరణము

ఇక్కడ $\mathrm{P}=\cos x$ $\quad\mathrm{Q}=\sin x\,\cos x$

$$\int \mathrm{P}\, dx = \int \cos x \; dx \; = \sin x$$

సమాకలన గుణకము $= e^{\int \mathrm{P}\, dx}$

$$= e^{\sin x}$$

సాధారణ సాధన (5)

$$u \cdot e^{\sin x} = \int \sin x \, \cos x \; e^{\sin x} \, dx$$

$\sin x = t$ అయితే $\cos x \; dx = dt$ అనుకొనుము.

$$\therefore u \, e^{\sin x} \; = \int e^t t \; dt$$

$$= t \int e^t dt - \int \left(1 \int e^t \; dt\right) dt$$

$$= t \, e^t - e^t + \mathrm{C}$$

$$= \sin x \; e^{\sin x} - e^{\sin x} + \mathrm{C}$$

$\therefore$ సాధారణ సాధన (1)

$$\sin y \cdot e^{\sin x} = e^{\sin x}\left(\sin x - 1\right) + \mathrm{C}$$

2.4 స్వీయ అంచనాత్మక ప్రశ్నలు :-

1. $\left(x^2 - 1\right)\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 1$ ను సాధించుము.

2. $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = e^{-x^2}$ ను సాధించుము.

3. $x\dfrac{dy}{dx} + 2y - x^2 \log x = 0$ ను సాధించుము.

4. $dx + xdy = e^{-y} \sec^2 y \; dy$ ను సాధించుము.

2.5 స్వీయ అంచనాత్మక ప్రశ్నలకు జవాబులు :-

1. $$\frac{dy}{dx}+\frac{2x}{x^2-1}\,y=\frac{1}{x^2-1}$$

ఇక్కడ $P=\dfrac{2x}{x^2-1}$ $\quad Q=\dfrac{1}{x^2-1}$

ఇప్పుడు $e^{\int P\,dx}=e^{\int \frac{2x}{x^2-1}dx}=e^{\log\left(x^2-1\right)}=x^2-1$

సాధారణ సాధన $y\cdot e^{\int P\,dx}=\int Q\ e^{\int P\,dx}\,dx$

$$\Rightarrow y\cdot\left(x^2-1\right)=\int\frac{1}{x^2-1}\cdot x^2-1\,dx=\int 1\,dx=x+C$$

2. $P=2x$ $\qquad Q=e^{-x^2}$

$e^{\int P\,dx}=e^{\int 2x\ dx}=e^{x^2}$

సాధారణ సాధన $y\cdot e^{x^2}=\int e^{-x^2}\cdot e^{x^2}\,dx=\int 1\,dx=x+C$

3. $$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=x\log x$$

ఇక్కడ $P=\dfrac{2}{x}$ $\qquad Q=x\log x$

ఇప్పుడు $e^{\int P\,dx}=e^{\int 2/x\ dx}=e^{2\log x}=e^{\log x^2}=x^2$

సాధారణ సాధన $y\cdot x^2=\int x\ \log x\cdot x^2dx$

$$=\log x\left[x^3dx-\int\frac{1}{x}\int x^3dx\right]$$

$$= \frac{x^4 \log x}{4} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^4}{4}\, dx$$

$$= \frac{x^4 \log x}{4} - \frac{x^4}{16} + C$$

4. $\frac{dx}{dy} + x = e^{-y} \sec^2 y$

ఇక్కడ $P = 1$ $\quad Q = e^{-y} \sec^2 y$

$e^{\int P\, dy} = e^{\int 1 dy} = e^{y}$

సాధారణ సాధన $x \cdot e^{y} = \int e^{-y} \sec^2 y \cdot e^{y} dy$

$$= \int \sec^2 y\; dy = \tan y + C$$

2.6 సంగ్రహము :-

ఈ పాఠ్య భాగమునందు సరళ అవకలన సమీకరణము, బెర్నోలీ రూపము మరియు తత్సంబధమైన సమస్యలను చర్చించినాము.

2.7 సాంకేతిక పదములు :-

సరళ అవకలన సమీకరణాలు, బెర్నోలీ రూపము, సమాకలన గుణకము.

2.8 అభ్యాసములు :-

2.8.1 అభ్యాసము 2A :-

1. $(1+x)\frac{dy}{dx} - xy = 1 - x$ సాధించుము.

2. $\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x$ సాధించుము.

3. $\sin 2x \frac{dy}{dx} - y = \tan x$ సాధించుము.

4. $\frac{dy}{dx}-\left(\frac{2}{x}\right)y = x+\frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ సాధించుము.

5. $\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}+2xy = x\sqrt{1-x^2}$ సాధించుము.

6. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x\log x}=\frac{\sin 2x}{\log x}$ సాధించుము.

7. $x^3\frac{dy}{dx}+\left(2-3x^2\right)y = x^3$ సాధించుము.

8. $\left(y-e^{\sin^{-1}x}\right)\frac{dx}{dy}+\sqrt{1-x^2}=0,\ |x|<1$ సాధించుము.

9. $x\left(x^2+1\right)\frac{dy}{dx}=y\left(1-x^2\right)+x^3\log x$ సాధించుము.

10. $y^2dx+\left(3xy-1\right)dy=0$ సాధించుము.

11. $\left(x+\tan y\right)dy=\sin 2y\,dx$ సాధించుము.

12. $\frac{dy}{dx}+2y\tan x=\sin x$ సాధించుము,

$y=0$ అయినప్పుడు $x=\frac{\pi}{3}$

13. $\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx}+2xy=\frac{1}{1+x^2}$ ను సాధించుము,

$y=0$ అయినప్పుడు $x=1$

14. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=x^2$ సాధించుము,

$y=1$ అయినప్పుడు $x=1$

2A జవాబులు :-

1. $ye^{-x}(x+1) = xe^{-x} + C$

2. $y \cdot e^{\tan x} = e^{\tan x}(\tan x - 1) + C$

3. $y = \tan x + C\sqrt{\tan x}$

4. $2y = x^2 \log x^2 + x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right) + C\,x^2$

5. $\dfrac{y}{1-x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C$

6. $2y \log x + \cos 2x = C$

7. $2y = x^3 + C\,x^3\; e^{1/x^2}$

8. $y \cdot e^{\sin^{-1} x} = \dfrac{1}{2} e^{2\sin^{-1} x} + C$

9. $\dfrac{y\left(x^2+1\right)}{x} = \dfrac{x^2 \log x}{2} - \dfrac{x^2}{4} + C$

10. $xy^3 = \dfrac{y^2}{2} + C$

11. $x \cot y = \log \tan y + C$

12. $y \cdot \sec^2 x = \sec x - 2$

13. $y\left(1+x^2\right) = \tan^{-1} x - \dfrac{\pi}{4}$

14. $4xy = x^4 + 3$

2.8.2 అభ్యాసము 2B :-

1. $\left(1-x^2\right)\dfrac{dy}{dx} + xy = xy^2$ సాధించుము.

2. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x-1} = xy^{1/3}$ సాధించుము.

3. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = y^2 x$ సాధించుము.

4. $\dfrac{dy}{dx} - y \tan x = \dfrac{\sin x \cos^2 x}{y}$ సాధించుము.

5. $2y \cos y^2 \dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2}{x+1} \sin y^2 = (x+1)^3$ సాధించుము.

6. $\dfrac{dy}{dx} = e^{x-y}\left(e^x - e^y\right)$ సాధించుము.

7. $x\dfrac{dy}{dx} + y = y^2 x^3 \cos x$ సాధించుము.

8. $x\dfrac{dy}{dx} + y\log y = x\,y\,e^x$ సాధించుము.

9. $xy^2\dfrac{dy}{dx} - 2y^3 = 2x^3$ సాధించుము,

   $y = 1$ అయినపుడు $x = 1$.

10. $x^2 y - x^3\dfrac{dy}{dx} = y^4 \cos x$ సాధించుము,

    $x = \pi$ అయినపుడు $y = \pi$.

2B సమాధానాలు :-

1. $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{y} = \dfrac{-\left(x^2-1\right)^{3/2}}{3} + \mathrm{C}$

2. $y^{2/3}(x-1)^{2/3} = \dfrac{1}{4}(x-1)^{8/3}$

3. $\dfrac{1}{xy} = -x + \mathrm{C}$

4. $y^2\cos^2 x = \dfrac{-2}{5}\cos^5 x + \mathrm{C}$

5. $\dfrac{\sin y^2}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{2}(x+1)^2 + \mathrm{C}$

6. $e^y \cdot e^{e^x} = e^{e^x}\left(e^x - 1\right) + \mathrm{C}$

7. $\dfrac{1}{xy} = -x\sin x - \cos x + \mathrm{C}$

8. $x\log y = xe^x - e^x + \mathrm{C}$

9. $\dfrac{y^3}{x^6} = \dfrac{-2}{x^3} + 3$

10. $x^3 - y^3 = 3y^3 \sin x$

2.10 మాదిరి ప్రశ్నలు :-

ఈ క్రింది అవకలన సమీకరణాలు సాధించుము.

1. $\left(1-x^2\right)\dfrac{dy}{dx}+xy=ax$

2. $\left(1+y^2\right)dx=\left(\tan^{-1}y-x\right)dy$

3. $\left(x+2y^3\right)\dfrac{dy}{dx}=y$

4. $\dfrac{dy}{dx}\left(x^2y^3+xy\right)=1$

5. $\dfrac{dy}{dx}=e^{x-y}\left(e^x-e^y\right)$

2.11 సంప్రదించవలసిన గ్రంథాలు :-

Text Book of Mathematics, Vol. I	:	S. Chand & Co.
Text Book of Mathematics, Vo. I	:	Deepthi Publications
Introduction to Ordinary Differential Equations	:	Earl.A. Coddington

పాఠ్య రచయిత

Sri. P.S. Chakravarthy

పాఠం - 3

సంపూర్ణ అవకలన సమీకరణాలు

3.1 పాఠం యొక్క లక్ష్యం:

ఈ పాఠం చదివిన తరువాత విద్యార్థి సంపూర్ణ అవకలన సమీకరణాలు మరియు సంపూర్ణ అవకలన సమీకరణాల సరణుల గూర్చి తెలుసుకొని తత్సంబంధమైన సమస్యలను ఎలా సాధించాలో తెలుసుకొనుటకు వీలవుతుంది.

3.2 పాఠ్యాంశము యొక్క స్వరూపము:

పాఠము నందలి అంశములు:

3.3.1 ఉపోద్ఘాతము:

ఒక స్వతంత్ర చలరాశి $'x'$, రెండు పరతంత్ర చలరాశులు y, z లను కలిగియున్న ప్రథమ పరిమాణ ఏకఘాత సమీకరణపు సాధారణ రూపం $P + Q\frac{dy}{dx} + R\frac{dz}{dx} = 0$, ఇచ్చట P, Q, R లు x, y, z లలో ప్రమేయాలు.

దీనినే $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ గా వ్రాయవచ్చు.

3.3.2 నిర్వచనం :- P, Q, R లు x, y, z అను చలరాశులలో ప్రమేయాలైతే $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ అను రూపంలోని సమీకరణాన్నే సంపూర్ణ అవకలన సమీకరణం అంటాం.

$\frac{\partial \phi}{\partial x} = P \cdot K(x, yx, z); \frac{\partial \phi}{\partial y} = Q \cdot K(x, yx, z); \frac{\partial \phi}{\partial z} = R \cdot K(x, y, z)$ అగునట్లు $\phi(x, y, z)$ అను ప్రమేయం వ్యవస్థితమైతే పై సంపూర్ణ అవకలన సమీకరణాన్ని సమాకలనీయం అంటాం.

3.3.3 సమాకలనీయ నియమం :-

$Pdx + Qdy + Rdz = 0$ అను సంపూర్ణ అవకలన సమీకరణం సమాకలనీయం కావడానికి ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమం

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0$$

3.3.4 సంపూర్ణ అవకలన సమీకరణం సాధించుటకు :- దత్త సంపూర్ణ అవకలన సమీకరణం

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0 \text{ ---------- } (1)$$

(i) సమీకరణం (1) సమాకలనీయ నియమాన్ని సంతృప్తి పరచినదో లేదో సరి చూడండి.

(ii) ఆ నియమాన్ని తృప్తిపరిస్తే, సమీకరణము (1)లోని చలరాశులు x, y, z లలో మనకు అనుకూలమైన ఒక చలరాశి $'z'$ను తాత్కాలికంగా స్థిరమని భావిద్దాం.

(iii) ఇపుడు $dz = 0$ కనుక సమీకరణం (1) నుంచి

$Pdx + Qdy = 0$ --------- (2) అవుతుంది. మరియు (2)ను సాధిస్తే

సాధన $f(x, y) = \phi(z) - (3)$ అనుకోండి.

ఈ సాధనలో $\phi(z)$ అనునది x, y దృష్ట్యా స్థిరరాశి అవుతూ $'z'$లో ప్రమేయం అవుతుంది.

(iv) ఇపుడు సమీకరణం (3) ను x, y, z ల దృష్ట్యా సంపూర్ణ అవకలనం చేసి (1)తో సరిపోలిస్తే $\phi(Z)$ కనుగొనవచ్చు. చివరికి ఈ $\phi(Z)$ను (3)లో ప్రతిక్షేపిస్తే మనకు కావలసిన (1) యొక్క సాధన వస్తుంది.

3.3.5 గమనిక : -

(1) x, y, z ప్రకారం $f(x, y, z)$ యొక్క సంపూర్ణ అవకలజం $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$ అవుతుంది. దీనినే df తో సూచిస్తారు.

(2) కొన్ని సందర్భవలలో దత్త అవకలన సమీకరణమును యధార్థ అవకలన సమీకరణంగా మార్చడం ద్వారా గని లేదా అందులోని పదాలను సమాకలనానికి అనుకూలంగా సమూహాలుగా విభజించటం ద్వారా గాని దానిని సాధించవచ్చు.

3.4 సంపూర్ణ అవకలన సమీకరణాల సరణి:

3.4.1 సంపూర్ణ అవకలన సమీకరణాల సరణులు :

రెండు సంపూర్ణ అవకలన సమీకరణాలు

$P_1dx + Q_1dy + R_1dz = 0$ మరియు

$$P_2dx + Q_2dy + R_2dz = 0$$

అయితే వీటిని $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ రూపంలో వ్రాయవచ్చు.

(P, Q, R లు x, y, z లలో ప్రమేయాలు)

ఉదా॥ : $xdx + zdy + ydz = 0$ మరియు

$$ydx + xdy + zdz = 0$$

అను రెండు సంపూర్ణ అవకలన సమీకరణాలను ఈ క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చు.

$$\frac{dx}{yx - z^2} = \frac{dy}{xz - y^2} = \frac{dz}{yz - x^2}$$

3.4.2 $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ సమీకరణాల సాధన :-

దత్త సమీకరణాల సరణి $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ ------------- (1)

P, Q, R లు x, y, z లలో ప్రమేయాలు

పై సమీకరణం నుండి

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}; \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}; \frac{dz}{R} = \frac{dx}{P} \text{ ----------- (2)}$$

అని గమనించవచ్చు.

ఈ మూడు సమీకరణాల్లో ఏ రెండింటినుంచైనా మూడోదాన్ని పొందవచ్చు కనుక

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}; \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (A) \qquad \frac{dx}{P} = \frac{dz}{R}; \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \cdots\cdots\cdots (B)$$

$$\frac{dz}{R} = \frac{dx}{P}; \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} \cdots\cdots\cdots (C)$$

$(A), (B), (C)$ లలో దేన్నైనా దత్త సమీకరణాల సరణి (1)కు సర్వ సమానంగా భావించవచ్చు. కావున $(A), (B), (C)$ లలో ఏదైనా ఒక దానిని సాధిస్తే అదే దత్త సరణికి కూడా సాధన అవుతుంది.

(1) యొక్క సాధారణ సాధన కొరకు రెండు పద్ధతులు తెలుసుకొందాం.

(ఎ) జట్లు కట్టే పద్ధతి (Method of Grouping)

(బి)) గుణకాల పద్ధతి (Method of Multipliers)

3.4.3 జట్లు కట్టే పద్ధతి :-

సందర్భం (i) :- 3.4.2లోని (A), (B), (C) లలో ఏదైనా ఒక సమితి యొక్క రెండు సమీకరణాలు, చలరాశుల విభజన ద్వారా సాధించగలిగితే ఏర్పడే రెండు స్వతంత్ర్య సాధనలూ కలసి సమీకరణాల సరణి (1)నకు సాధారణ సాధన అవుతుంది.

సందర్భం (ii) :- (A), (B), (C) సమీకరణాల సమితులలో ఏదో ఒకటి మాత్రమే సమాకలనీయమైతే దాని నుండి సాధన కనుక్కోవాలి. ఈ సాధననుపయోగించి ఆ సమితిలోని రెండో సమీకరణాన్ని సూక్ష్మీకరించి మరొక సాధన కనుక్కోవచ్చు. ఈ రెండు సాధనలూ కలసి దత్త సమీకరణాల సరణి (1)నకు సాధారణ సాధన అవుతుంది.

3.4.4 గుణకాల పద్ధతి :-

దత్త సమీకరణాల సరణి $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$ ------- (1)

(2)లోని ఏ సమీకరణమూ సమాకలనీయం కాకపోతే ఇలా వ్రాయవచ్చు.

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{Z}=\frac{\ell_1 dx+m_1 dy+n_1 dz}{\ell_1 P+m_1 Q+n_1 R}=\frac{\ell_2 dx+m_2 dy+n_2 dz}{\ell_2 P+m_2 Q+n_2 R}$$

ఇక్కడ ℓ_1, m_1, n_1 మరియు ℓ_2, m_2, n_2 లు స్థిరరాశులు లేదా x, y, z లలో ప్రమేయాలు అవుతాయి.

(i) ℓ_1, m_1, n_1 మరియు ℓ_2, m_2, n_2 (వీటినే గుణకాలంటారు)లను $\ell_1 P+m_1 Q+n_1 R=0$ మరియు $\ell_2 P+m_2 Q+n_2 R=0$ అయ్యే విధంగా ఎన్నుకోగలిగితే మనము

$\ell_1 dx+m_1 dy+n_1 dz=0$ మరియు $\ell_2 dx+m_2 dy+n_2 dz=0$ అను సమీకరణాలు పొందవచ్చు.

ఈ రెండు సమీకరణాలు సాధిస్తే వచ్చే రెండు స్వతంత్ర సాధనలూ కలసి (1) యొక్క సాధారణ సాధన అవుతుంది.

(ii) ℓ_1, m_1, n_1, ℓ_2, m_2, n_2 లను

$$\ell_1 P+m_1 Q+n_1 R\neq 0\ ,\quad \frac{\ell_1 dx+m_1 dy+n_1 dz}{\ell_1 P+m_1 Q+n_1 R}=d\phi \quad \text{మరియు}$$

$$\ell_2 P+m_2 Q+n_2 R\neq 0,\quad \frac{\ell_2 dx+m_2 dy+n_2 dz}{\ell_2 P+m_2 Q+n_2 R}=d\psi$$

అయ్యే విధంగా ఎన్నుకోగలిగితే

$\phi(x,y,z)=C_1,\ \psi(x,y,z)=C_2$ కలసి (1)నకు సాధారణ సాధన అవుతుంది.

సాధించిన సమస్యలు :-

3.4.5 $dx+dy+(x+y+z+1)dz=0$ సాధించండి.

సాధన : దత్త సమీకరణం

$$dx+dy+(x+y+z+1)dz=0 \text{ --------- } (1)$$

ఇచ్చుట $P=1,\ Q=1,\ R=x+y+z+1$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial P}{\partial y}=0,\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial Q}{\partial x}=0,\ \frac{\partial R}{\partial x}=1,\ \frac{\partial R}{\partial y}=1$$

ఇపుడు $P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$

$$=1(0-1)+1(1-0)+(x+y+z+1)(0-0)$$

$$=-1+1=0$$

కావున సమాకలనీయ నియమాన్ని తృప్తి పరిచింది.

'z'ను స్థిరంగా భావిస్తే, $dz=0$ అవుతుంది.

$\therefore (1)$ నుండి $dx+dy=0$

$$\Rightarrow \int dx+\int dy=\int 0$$

$$\Rightarrow x+y=\phi(z) \text{ -------- } (2)$$

$$\Rightarrow x+y-\phi(z)=0$$

x,y,z ల దృష్ట్యా సంపూర్ణ అవకలనం చేయగా

$$dx+dy-\phi'(z)dz=0 \text{ ----------- } (3)$$

(1), (3) సరిపోల్చగా

$$\Rightarrow 1 = 1 = \frac{x+y+z+1}{-\phi'(z)}$$

$$\Rightarrow \phi'(z) + x + y + z + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dz} + \phi = -1 - z$$ ((2) నుండి)

ఇది ϕలో సరళ సమీకరణం

సమాకలన గుణకం $= e^{\int dz} = e^z$

$\therefore$ సాధారణ సాధన $e^z\phi = \int(-1-z)e^z\,dz$

$$\Rightarrow e^z\phi + e^z z = c$$

$$\Rightarrow e^z(x+y+z) = c$$ ((2) నుండి)

ఇదే (1) యొక్క సాధారణ సాధన.

3.4.6 : $\left(2x^2 + 2xy + 2xz^2 + 1\right)dx + dy + 2zdz = 0$ ను సాధించండి.

సాధన : దత్త సమీకరణం

$$\left(2x^2 + 2xy + 2xz^2 + 1\right)dx + dy + 2z\,dz = 0 \text{ ----------- (1)}$$

ఇక్కడ $P = 2x^2 + 2xy + 2xz^2 + 1,\ Q=1,\ R=2z$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 4xz,\ \frac{\partial P}{\partial y} = 2x,\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial x} = 0$$

ఇపుడు $P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$

$$= P(0-0) + 1(0-4xz) + 2z(2x-0)$$

$$= -4xz + 4xz$$

$$= 0$$

$\therefore$ సమాకలనీయ నియమాన్ని తృప్తి పరిచినది.

'x'ను స్థిరంగా భావిస్తే, $dx = 0$ అవుతుంది.

$\therefore (1)$ నుండి $dy + 2zdz = 0$

$$\Rightarrow \int dy + 2\int z\,dz = \int 0$$

$$\Rightarrow y + z^2 = \phi(x) \text{------- (2)}$$

$$\Rightarrow y + z^2 - \phi(x) = 0$$

x, y, z ల దృష్ట్యా సంపూర్ణ అవకలనం చేయగా

$$-\phi'(x)dx + dy + 2z\,dz = 0 \text{ ----------- (3)}$$

(1), (3) సరిపోల్చగా

$$\frac{-\phi'(x)}{2x^2 + 2xy + 2xz^2 + 1} = \frac{1}{1} = \frac{2z}{2z}$$

$$\Rightarrow \phi'(x) + 2x^2 + 2xy + 2xz^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dx} + 2x^2 + 2x\left(y + z^2\right) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dx} + 2x\phi = -2x^2 - 1 \quad \text{((2) నుండి)}$$

ఇది ϕలో సరళ సమీకరణం

సమాకలన గుణకం $e^{\int 2xdx} = e^{x^2}$

కావున సాధన $e^{x^2}\phi = -\int e^{x^2}\left(2x^2 + 1\right)dx$ $\qquad x^2 = t$ అనుకొనుము

$$= -\int e^t(2t + 1)\frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$2xdx = dt$

$dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$

$$= -\int e^t\left[\sqrt{t} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\right]dt$$

$$\Rightarrow e^{x^2}\phi = -e^t\sqrt{t} + C$$

$$\Rightarrow e^{x^2}\phi = -e^{x^2}x + C$$

$$\Rightarrow \phi = -x + Ce^{-x^2}$$

$$\Rightarrow x + y + z^2 = Ce^{-x^2}$$

ఇదే (1) యొక్క సాధారణ సాధన.

3.4.7 : $z^2dx + \left(z^2 - 2yz\right)dy + \left(2y^2 - 4z - zx\right)dz = 0$ సాధించండి.

సాధన :- దత్త సమీకరణము

$$z^2dx + \left(z^2 - 2yz\right)dy + \left(2y^2 - yz - zx\right)dz = 0 \text{ ---------- (1)}$$

ఇక్కడ $P = z^2 \quad Q = z^2 - 2yz \quad R = 2y^2 - yz - zx$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 2z \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \cdot \frac{\partial Q}{\partial z} = 2z - 2y \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = 4y - Z, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = -Z$$

ఇపుడు $P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$

$$= z^2(2z - 2y - 4y + z) + \left(z^2 - 2yz\right)(-z - 2z) + \left(2y^2 - yz - zx\right)(0 - 0)$$

$$= 3z^3 - 6yz^2 - 3z^3 + 6yz^2 + 0 \quad = 0$$

$\therefore$ సమాకలనీయ నియమాన్ని తృప్తిపరిచింది.

z ను స్థిరంగా భావిస్తే $dz = 0$ అవుతుంది.

$\therefore (1)$ నుండి $z^2dx + \left(z^2 - 2yz\right)dy = 0$

$$\Rightarrow \int z^2dx + \int\left(z^2 - 2yz\right)dy = \int 0$$

$$\Rightarrow z^2x + z^2y - y^2z = \phi(z) \text{ ---------- (2)}$$

$$\Rightarrow z^2x + z^2y - y^2z - \phi(z) = 0$$

x, y, z ల దృష్ట్యా సంపూర్ణ అవకలనం చేయగా

$$z^2 dx + \left(z^2 - 2yz\right)dy + \left(2xz + 2yz - y^2 - \phi'(z)\right)dz = 0 \text{ ---------- (3)}$$

(1), (3) సరిపోల్చగా

$$\frac{z^2}{z^2} = \frac{z^2 - 2yz}{z^2 - 2yz} = \frac{2xz + 2yz - y^2 - \phi'(z)}{2y^2 - yz - zx}$$

$$\Rightarrow \frac{-\phi'(z) - y^2 + 2xz + 2yz}{2y^2 - yz - zx} = 1$$

$$\Rightarrow \phi'(z) + 3y^2 - 3yz - 3xz = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dz} - \frac{3\phi}{z} = 0 \quad \text{((2) నుండి)}$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dz} = \frac{3\phi}{z}$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{\phi} = \frac{3dz}{z}$$

$$\Rightarrow \int \frac{d\phi}{\phi} = 3\int \frac{dz}{z}$$

$$\Rightarrow \log\phi = 3\log 2 + \log C$$

$$\Rightarrow \phi = z^3 C$$

(2) నుండి $\Rightarrow z^2 x + z^2 y - y^2 z = z^3 C$

$$\Rightarrow xz + yz - y^2 = cz^2$$

ఇదే (1) యొక్క సాధారణ సాధన.

3.4.8 : $\left(z + z^3\right)\cos x\, dx - \left(z + z^3\right)dy + \left(1 - z^2\right)\left(y - \sin x\right)dx = 0$ ను సాధించండి.

సాధన : దత్త సమీకరణం

$$\left(z + z^3\right)\cos x\ dx - \left(z + z^3\right)dy + \left(1 - z^2\right)\left(y - \sin x\right)dz = 0 \text{----------- (1)}$$

ఇక్కడ $P=\left(z+z^3\right)\cos x \qquad Q=-\left(z+z^3\right),\quad R=\left(1-z^2\right)\left(y-\sin x\right)$

$$\frac{\partial P}{\partial z}=\cos x\left(1+3z^2\right)\ \ \frac{\partial P}{\partial y}=0,\ \frac{\partial Q}{\partial z}=-\left(1+3z^2\right)$$

$\frac{\partial Q}{\partial x}=0,\ \frac{\partial R}{\partial y}=\left(1-z^2\right)\left(1-0\right)=\left(1-z^2\right)$ మరియు $\frac{\partial R}{\partial x}=\left(1-z^2\right)\left(-\cos x\right)$

ఇపుడు $P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$

$$=\left(z+z^3\right)\cos x\left(-1-3z^2-1+z^2\right)-\left(z+z^3\right)\left(-\cos x+z^2\cos x-\cos x-3z^2\cos x\right)$$

$$+\left(1-z^2\right)\left(y-\sin x\right)\left(0-0\right)$$

$$=\left(z+z^3\right)\cos x\left(-2-2z^2\right)-\left(z+z^3\right)\cos x\left(-2-2z^2\right)$$

$$=0\cdot$$

$\therefore$ సమాకలనీయ నియమాన్ని తృప్తిపరిచింది.

'z'ను స్థిరంగా భావిస్తే $dz=0$ అవుతుంది.

$\therefore$ (1) నుండి $\left(z+z^3\right)\cos x\,dx-\left(z+z^3\right)dy=0$

సమాకలనం చేయగా

$$\left(z+z^3\right)\left[\int\cos x dx-\int dy\right]=\int 0$$

$\Rightarrow\left(z+z^3\right)\left(\sin x-y\right)=\phi\left(z\right)$ ---------- (2)

$$\Rightarrow\left(z+z^3\right)\left(\sin x-y\right)-\phi\left(z\right)=0$$

x, y, z ల దృష్ట్యా సంపూర్ణ అవకలనం చేయగా

$\left(z+z^3\right)\left(\cos x-0\right)dx+\left(z+z^3\right)\left(0-1\right)dy+\left(\sin x-y\right)\left(1+3z^2\right)-\phi'\left(z\right)dz=0$ ----------- (3)

(1), (3) సరిపోల్చగా

$$\frac{\left(z+z^3\right)\cos x}{\left(z+z^3\right)\cos x}=\frac{-\left(z+z^3\right)}{-\left(z+z^3\right)}=\frac{(\sin x-y)\left(1+3z^2\right)-\phi'(z)}{\left(1-z^2\right)(y-\sin x)}$$

$$\Rightarrow \frac{(\sin x-y)\left(1+3z^2\right)-\phi'(z)}{\left(1-z^2\right)(y-\sin x)}=1$$

$$\Rightarrow \phi'(z)+\left(1-z^2\right)(y-\sin x)+(y-\sin x)\left(1+3z^2\right)=0$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dz}+(y-\sin x)\left(2z^2+2\right)=0$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dz}-\frac{2\phi}{z}=0 \quad \text{((2) నుండి)}$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{\phi}=2\frac{dz}{z} \quad \Rightarrow \quad \int\frac{d\phi}{\phi}=2\int\frac{dz}{z}$$

$$\Rightarrow \log\phi=2\log z+\log c$$

$$\Rightarrow \phi=cz^2$$

(2) నుండి $\left(z+z^3\right)(\sin x-y)=cz^2$

$$\Rightarrow \left(z^2+1\right)(\sin x-y)=cz$$

ఇదియే (1) యొక్క సాధారణ సాధన

3.4.9 : $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dz}{z}$ ను సాధించండి.

సాధన : $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{y}$ తీసుకొనగా

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dy}{y}$$

$$\Rightarrow \log x=\log y+\log c_1 \quad \Rightarrow x-c_1y=0 \text{ ---------- (1)}$$

మరియు $\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$

$$\Rightarrow \int\frac{dy}{y}=\int\frac{dz}{z}$$

$$\Rightarrow \log y=\log z+\log c_2$$

$$\Rightarrow y-c_2z=0 \text{ ------------ (2)}$$

$\therefore$ దత్త సరణి సాధారణ సాధన $x-c_1y=0;\ y-c_2z=0$

3.4.10 : $\frac{dx}{y^2}=\frac{dy}{x^2}=\frac{dz}{x^2y^2z^2}$ ను సాధించండి.

సాధన : దత్త సరణి

$$\frac{dx}{y^2}=\frac{dy}{x^2}=\frac{dz}{x^2y^2z^2}$$

$\frac{dx}{y^2}=\frac{dy}{x^2}$ తీసుకొనగా

$$\Rightarrow x^2dx=y^2dy$$

$$\int x^2dx=\int y^2dy$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{3}=\frac{y^3}{3}+\frac{c_1}{3}$$

$$\Rightarrow x^3-y^3-c_1=0 \text{ ------------- (1)}$$

మరియు $\frac{dy}{x^2}=\frac{dz}{x^2y^2z^2}$

$$\Rightarrow y^2dy=\frac{dz}{z^2}$$

$$\Rightarrow \int y^2dy=\int\frac{dz}{z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{y^3}{3} = \frac{-1}{z} + c_2 \text{ ---------- (2)}$$

$\therefore$ దత్త సరణి సాధారణ సాధన $x^3 - y^3 - c_1 = ;\ \frac{y^3}{3} + \frac{1}{z} = c_2$

3.4.11 : $\frac{xdx}{y^2z} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{y^2}$

సాధన : దత్త సరణి

$$\frac{xdx}{y^2z} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{y^2}$$

$\frac{xdx}{y^2z} = \frac{dy}{xz}$ తీసుకొనగా

$$\Rightarrow x^2dx = y^2dy$$

$$\Rightarrow \int x^2dx = \int y^2dy$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{3} = \frac{y^3}{3} + \frac{c_1}{3} \quad \Rightarrow x^3 - y^3 = c_1 \text{ ----------- (1)}$$

మరియు $\frac{xdx}{y^2z} = \frac{dz}{y^2}$

$$\Rightarrow x\,dx = z\,dz$$

$$\Rightarrow \int x\,dx = \int z\,dz$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{z^2}{2} + \frac{c_2}{2} \quad \Rightarrow x^2 - z^2 = c_2 \text{ ---------- (2)}$$

$\therefore$ దత్త సరణి సాధారణ సాధన (1), (2) i.e. $x^3 - y^3 = c_1;\ x^2 - z^2 = c_2$

3.4.12 : $\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{z}$ ను సాధించండి.

సాధన : దత్త సరణి

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{z}$$

$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x}$ తీసుకొనగా

$$\Rightarrow x\,dx = y\,dy$$

$$\int x\,dx = \int y\,dy$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2}=\frac{y^2}{2}+\frac{{c_1}^2}{2} \Rightarrow x^2-y^2={c_1}^2 \text{ ----------- (1)}$$

మరియు $\frac{dy}{x}=\frac{dz}{z}$ తీసుకొనగా

$$\Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{{c_1}^2+y^2}}=\frac{dz}{z} \quad \text{((1) నుండి)}$$

సమాకలనం చేయగా

$$\int \frac{dy}{\sqrt{{c_1}^2+y^2}}=\frac{dz}{z}$$

$$\Rightarrow \log\left(y+\sqrt{{c_1}^2+y^2}\right)=\log z+\log c_2$$

$$\Rightarrow \left(y+\sqrt{{c_1}^2+y^2}\right)=c_2 z$$

$$\Rightarrow y+x=c_2 z \text{ .... (2)} \quad \text{((1) నుండి)}$$

$\therefore$ దత్త సరణి సాధారణ సాధన (1), (2) i.e. $x^2-y^2={c_1}^2;\ (y+x)=c_2 z$

3.4.13 : $\dfrac{dx}{-y^2-z^2}=\dfrac{dy}{xy}=\dfrac{dz}{zx}$ ను సాధించండి.

సాధన : దత్త సమీకరణాల సరణి

$$\frac{dx}{-y^2-z^2}=\frac{dy}{xy}=\frac{dz}{zx}$$

$\dfrac{dy}{xy}=\dfrac{dz}{zx}$ ను తీసుకొనగా

$$\Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$$

$$\Rightarrow \int\frac{dy}{y}=\int\frac{dz}{z} \Rightarrow \log\, y=\log\, z+\log\, c_1$$

$$\Rightarrow y=c_1 z\ ....(1)$$

మరియు $\dfrac{dx}{-y^2-z^2}=\dfrac{dz}{zx}$ తీసుకొనగా

$$\Rightarrow \frac{dx}{-c_1{}^2z^2-z^2}=\frac{dz}{zx}$$

$$\Rightarrow xdx=\frac{-z^2\left(c_1{}^2+1\right)}{z}dz$$

సమాకలనం చేయగా $\int x\,dx=-\left(c_1{}^2+1\right)\int z\,dz$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2}=-\left(c_1{}^2+1\right)\frac{z^2}{2}+\frac{c_2}{2}$$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2=c_2$ --------- (2) ((1) నుండి)

$\therefore$ దత్త సరణి సాధారణ సాధన (1), (2) i.e., $y=c_1 z;\ x^2+y^2+z^2=c_2$

3.4.14 : $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{-2}=\frac{dz}{3x^2\sin(y+2x)}$ ను సాధించండి.

సాధన : దత్త సరణి $dx=\frac{-dy}{2}=\frac{dz}{3x^2\ \sin\ (y+2x)}$

$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{-2}$ అనుకుందాము

$\Rightarrow\ -2\int dx=\int dy\Rightarrow y+2x=-c_1$ .... (1)

$\frac{dx}{1}=\frac{dz}{3x^2\sin(y+2x)}$ అనుకుంటే

$\Rightarrow dx=\frac{dz}{3x^2\sin c_1}$ ((1) నుండి)

$\Rightarrow\ 3\sin c_1\int x^2dx=\int dz$

$\Rightarrow 3(\sin c_1)\frac{x^3}{3}=z+c_2\ \Rightarrow x^3\sin(y+2x)-z=c_2$ ---------- (2)

$\therefore$ దత్త సరణి సాధారణ సాధన (1), (2) i.e., $y+2x=c_1$, $x^3\ \sin\ (y+2x)-z=c_2$

3.4.15 : $\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}=\frac{dz}{2x-3y}$ సాధించండి.

సాధన : దత్త సమీకరణాల సరణి $\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}=\frac{dz}{2x-3y}$

$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}$ తీసుకొనగా

$\Rightarrow xdx=-ydy$

$\Rightarrow\int xdx=-\int y\,dy\Rightarrow\ x^2+y^2=c_1^2$ -------- (1)

$\frac{dx}{y}=\frac{dz}{2x-3y}$ తీసుకుందాము

$$\Rightarrow \frac{2x-3y}{y}dx = dz$$

$$\Rightarrow \left[\frac{2x}{\sqrt{{c_1}^2 - x^2}} - 3\right]dx = dz$$

సమాకలనం చేయగా $-\int \frac{-2x}{\sqrt{{c_1}^2 - x^2}}\,dx - 3\int dx = \int dz$

$$\Rightarrow -2\sqrt{{c_1}^2 - x^2} - 3x = z + c_2$$

$\Rightarrow z + 3x + 2y + c_2 = 0$ --------- (2) ((1) నుండి)

$\therefore$ దత్త సరణి సాధారణ సాధన (1), (2) i.e., $x^2 + y^2 = c_1^2$, $3x + 2y + z + c_2 = 0$

3.4.16 : $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{-z}$ ను సాధించండి.

సాధన : దత్త సరణి $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{-z}$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{-z}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dz}{z}$$

$$\Rightarrow \log x + \log z = \log c_1$$

$$\Rightarrow xz = c_1 \; ....(1)$$

$\Rightarrow$ 1, 1 లను గుణకాలుగా తీసుకుంటే

దత్త సరణిలోని ప్రతి భిన్నము $= \frac{-dx + dy + dz}{-x + (x+z) - z}$

$$= \frac{-dx + dy + dz}{0}$$

$$\Rightarrow -dx + dy + dz = 0$$

సమాకలనం చేయగా $-\int dx + \int dy + \int dz = \int 0$

$$\Rightarrow -x + y + z = c_2 \text{ --------- } (2)$$

$\therefore$ దత్త సరణి సాధారణ సాధన (1), (2) i.e., $xz = c_1, \quad -x + y + z = c_2$.

3.4.17 : $\dfrac{dx}{1+y} = \dfrac{dy}{1+x} = \dfrac{dz}{z}$ ను సాధించండి.

సాధన : దత్త సరణి $\dfrac{dx}{1+y} = \dfrac{dy}{1+x} = \dfrac{dz}{z}$

$\dfrac{dx}{1+y} = \dfrac{dy}{1+x}$ ను తీసుకొనగా

$$\Rightarrow (1+x)dx = (1+y)dy$$

$$\Rightarrow \int (1+x)dx = \int (1+y)dy$$

$$\Rightarrow x + \frac{x^2}{2} = y + \frac{y^2}{2} + \frac{c_1}{2}$$

$$\Rightarrow 2x - 2y + x^2 - y^2 = c_1$$

1, 1, 0లను గుణకాలుగా తీసుకొనగా

ప్రతి భిన్నం $= \dfrac{dx + dy + 0\,dz}{(1+y) + (1+x) + 0 \cdot z}$

$$= \frac{dx + dy}{2 + x + y}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx + dy}{2 + x + y}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int \frac{d(x+y)}{x+y+2}$$

$$\Rightarrow \log z = \log(2 + x + y) + \log c_2$$

$$\Rightarrow z = (2 + x + y)c_2 \text{ ------------ } (2)$$

$\therefore$ దత్త సరణి సాధారణ సాధన (1), (2) i.e., $2x-2y+x^2-y^2=c_1$

$$z-c_2\left(2+x+y\right)=0$$

3.4.18 : $\dfrac{dx}{x^2}=\dfrac{dy}{y^2}=\dfrac{dz}{(x+y)z}$ ను సాధించండి.

సాధన : దత్త సరణి $\dfrac{dx}{x^2}=\dfrac{dy}{y^2}=\dfrac{dz}{(x+y)z}$

$\dfrac{dx}{x^2}=\dfrac{dy}{y^2}$ ను తీసుకొనగా

$$\int\frac{dx}{x^2}=\int\frac{dy}{y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{x}=\frac{-1}{y}+C_1 \Rightarrow x-y=C_1xy \cdot\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

1, -1, 0 లను గుణకాలుగా తీసుకొనగా

ప్రతిభిన్నం $=\dfrac{dx-dy+0\ dz}{x^2+(-1)y^2+0(x+y)z}$

$$\Rightarrow \frac{dz}{(x+y)z}=\frac{dx-dy}{x^2-y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{z}=\frac{dx-dy}{x-y}$$

సమాకలనం చేయగా $\displaystyle\int\frac{dz}{z}=\int\frac{dx-dy}{x-y}$

$$\Rightarrow \log z=\log(x-y)+\log c_2$$

$\Rightarrow z=c_2(x-y)$ ----------- (2)

$\therefore$ దత్త సరణి సాధారణ సాధన (1), (2)

i.e., $x-y=c_1xy,\ z=c_2\left(x-y\right)$

3.4.19 : $\dfrac{dx}{-y^2-z^2}=\dfrac{dy}{xy}=\dfrac{dz}{zx}$ ను సాధించండి.

సాధన : దత్త సరణి $\dfrac{dx}{-y^2-z^2}=\dfrac{dy}{xy}=\dfrac{dz}{zx}$

$\dfrac{dy}{xy}=\dfrac{dz}{zx}$ తీసుకొనగా

సమాకలనం చేయగా

$y=c_1z$ ---------- (1)

x, y, z లను గుణకాలుగా తీసుకొనగా

ప్రతి భిన్నం $=\dfrac{xdx+ydy+zdz}{x\left(-y^2-z^2\right)+y\cdot xy+z\cdot zx}$

$=\dfrac{xdx+ydy+zdz}{0}$

$\Rightarrow xdx+ydy+zdz=0$

సమాకలనం చేయగా $x^2+y^2+z^2=c_2$ ---------- (2)

$\therefore$ దత్త సరణి సాధన (1), (2)

i.e., $y=c_1z$, $x^2+y^2+z^2=c_2$

3.4.20 : $\dfrac{dx}{x^2-y^2-z^2}=\dfrac{dy}{2xy}=\dfrac{dz}{2xz}$ సాధించండి.

సాధన : దత్త సరణి $\dfrac{dx}{x^2-y^2-z^2}=\dfrac{dy}{2xy}=\dfrac{dz}{2xz}$

$\dfrac{dy}{2xy}=\dfrac{dz}{2xz}$ తీసుకొనగా

$\Rightarrow \dfrac{dy}{y}=\dfrac{dz}{z}$

సమాకలనం చేయగా $\Rightarrow y = c_1 z$ ---------- (1)

x, y, z లను గుణకాలుగా తీసుకొనగా

ప్రతి భిన్నం $= \dfrac{xdx + ydy + zdz}{x\left(x^2 - y^2 - z^2\right) + y \cdot 2xy + z \cdot 2xz}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{2xy} = \frac{xdx + ydy + zdz}{x\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}$$

సమాకలనం చేయగా $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int d\left[\log\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right]$

$$\Rightarrow \log y = \log\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + \log c_2$$

$$\Rightarrow y = c_2\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$ ------------ (2)

$\therefore$ దత్త సరణి సాధారణ సాధన (1), (2)

$$\text{i.e., } y = c_1 z,\ y = c_2\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

3.4.21 : $\dfrac{dx}{x(y - z)} = \dfrac{dy}{y(z - x)} = \dfrac{dz}{z(x - y)}$ సాధించండి.

సాధన : దత్త సరణి $\dfrac{dx}{x(y - z)} = \dfrac{dy}{y(z - x)} = \dfrac{dz}{z(x - y)}$

1, 1, 1 లను గుణకాలుగా తీసుకొనగా

ప్రతి భిన్నం $= \dfrac{dx + dy + dz}{x(y - z) + y(z - x) + z(x - y)}$

$$= \frac{dx + dy + dz}{0}$$

$$\Rightarrow dx + dy + dz = 0$$

సమాకలనం చేయగా $x + y + z = c_1$ ----------- (1)

$\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ లను గుణకాలుగా తీసుకొనగా,

$$\text{ప్రతి భిన్నం} = \frac{\frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy + \frac{1}{z}dz}{\frac{1}{x}x(y-z) + \frac{1}{y}y(z-x) + \frac{1}{z}z(x-y)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy + \frac{1}{z}dz = 0$$

సమాకలనం చేయగా $\log x + \log y + \log z = \log c_2$ అవుతుంది.

$$xyz = c_2 \text{ ---------- } (2)$$

$\therefore$ దత్త సరణి సాధారణ సాధన $x + y + z = c_1,\ xyz = c_2$.

3.4.22 : $\frac{dx}{z^2 - 2yz - y^2} = \frac{dy}{xy + xz} = \frac{dz}{xy - xz}$ సాధించండి.

సాధన : దత్త సరణి $\frac{dx}{z^2 - 2yz - y^2} = \frac{dy}{xy + xz} = \frac{dz}{xy - xz}$

$\frac{dy}{xy + xz} = \frac{dz}{xy - xz}$ తీసుకొనగా

$$\Rightarrow \frac{dy}{y+z} = \frac{dz}{y-z}$$

$$\Rightarrow ydy - zdy = ydz + zdz$$

$$\Rightarrow ydy - zdz = ydz + zdy = d(yz)$$

సమాకలనం చేయగా

$$\int ydy - \int zdz = \int d(yz)$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2} = yz + \frac{c_1}{2}$$

$$\Rightarrow y^2 - z^2 - 2yz = c_1 \text{ ------- } (1)$$

x, y, z లను గుణకాలుగా తీసుకొనగా

$$\text{ప్రతి భిన్నం } = \frac{xdx + ydy + zdz}{x\left(z^2 - 2yz - y^2\right) + y(xy + xz) + z(xy - xz)}$$

$$= \frac{xdx + ydy + zdz}{0}$$

$$\Rightarrow xdx + ydy + zdz = 0$$

సమాకలనం చేయగా

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} = \frac{c_2}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = c_2 \text{ ---------- (2)}$$

$\therefore$ దత్త సరణి సాధారణ సాధన $y^2 - z^2 - 2yz = c_1$, $x^2 + y^2 + z^2 = c_2$

3.4.23 : $\dfrac{dx}{y+z} = \dfrac{dy}{z+x} = \dfrac{dz}{x+y}$ ను సాధించండి.

సాధన : దత్త సరణి $\dfrac{dx}{y+z} = \dfrac{dy}{z+x} = \dfrac{dz}{x+y}$

$$\text{ప్రతి భిన్నం } = \frac{dx - dy + 0 \cdot dz}{(y+z) - (z+x) + 0(x+y)}$$

$$= \frac{0dx + dy - dz}{0(y+z) + (z+x) - (x+y)}$$

$$= \frac{dx + dy + dz}{(y+z) + (z+x) + (x+y)}$$

(1, -1, 0 , 0, 1, -1 మరియు 1, 1, 1 లను గుణకాలుగా తీసుకొనగా)

$$= \frac{dx - dy}{y - x} = \frac{dy - dz}{z - y} = \frac{dx + dy + dz}{2(x + y + z)}$$

$$\Rightarrow \frac{dx-dy}{y-x}=\frac{dy-dz}{z-y}$$ తీసుకొనగా

$$\Rightarrow \frac{dx-dy}{x-y}=\frac{dy-dz}{y-z}$$

సమాకలనం చేయగా $\log(x-y)=\log(y-z)+\log c_1$

$$\Rightarrow (x-y)=c_1(y-z) \text{ ------------- (1)}$$

$$\frac{dx-dy}{y-x}=\frac{dx+dy+dz}{2(x+y+z)}$$ తీసుకొనగా

$$\frac{2s(x-y)}{(x-y)}=\frac{-d(x+y+z)}{(x+y+z)}$$

సమాకలనం చేయగా $\log(x-y)^2+\log(x+y+z)=\log c_2$

$$\Rightarrow (x-y)^2(x+y+z)=c_2 \text{ ------------ (2)}$$

$\therefore$ దత్త సరణి సాధారణ సాధన

$$(x-y)=c_1(y-z),\ (x-y)^2(x+y+z)=c_2$$

3.5 స్వీయ అంచనాత్మక ప్రశ్నలు సాధనలు:

1. $\left(y^2+z^2-x^2\right)dx-2xydy-2xzdz=0$ సమీకరణం సమాకలనం అగునో, కాదో చూడండి.

ఈ క్రింది వానిని సాధించండి.

2. $yz\,dx=zxdy+y^2dz$
3. $(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz=0$
4. $yz(1+x)dx+xz(1+y)dy+xy(1+z)dz=0$
5. $xdy-ydx-2x^2zdz=0$
6. $(x-y)dx-xdy+zdz=0$
7. $2yzdx-3zxdy-4xydz=0$

8. $(yz+2x)dx+(xz+2y)dy+(xy+2z)dz=0$

9. $(y+z)dx+dy+dz=0$

10. $(x+z)^2 dy+y^2(dx+dz)=0$

3.5.1 స్వయం నిర్ణయాత్మక ప్రశ్నలకు సాధనలు :-

3.5.1. దత్త అవకలన సమీకరణం $\left(y^2+z^2-x^2\right)dx-2xydy-2xzdz=0$

ఇచ్చుట $P=y^2+z^2-x^2$ $\quad Q=-2xy$ $\quad R=-2xz$

$$\frac{\partial Q}{\partial z}=0\cdot\frac{\partial R}{\partial y}=0\cdot\frac{2R}{\partial x}=-2z$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2y \quad \frac{\partial P}{\partial z}=2z \text{ మరియు } \frac{\partial Q}{\partial x}=-2y$$

ఇపుడు $P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{2R}{2y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$

$$=P(0-0)-2xy(-2z-2z)-2xz(2y+2y)$$

$$=0+8xyz-8xyz$$

$$=0$$

$\therefore$ సమాకలనీయతా నియమం తృప్తిపరచబడినది.

$\therefore$ దత్త సమీకరణం సమాకలనీయం.

3.5.2. దత్త సమీకరణం $yz\,dx=zxdy+y^2dz$

పదాలను అనుకూల సమూహాలుగా విభజిస్తే

$$z(ydx-xdy)=y^2dz$$

$$\Rightarrow\frac{ydx-xdy}{y^2}=\frac{dz}{z}$$

సమాకలనం చేయగా $\int d\left(\frac{x}{y}\right) = \int \frac{dz}{z}$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \log z + \log c$$

$\Rightarrow cz = e^{x/y}$ అవుతుంది.

3.5.3. $(y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz = 0$

$$\Rightarrow ydx + zdx + zdy + xdy + xdz + ydz = 0$$

పదాలను అనుకూల సమూహాముగా విభజిస్తే

$$(ydx + xdy) + (ydz + zdy) + (zdx + xdz) = 0$$

$$\Rightarrow d(xy) + d(yz) + d(zx) = 0$$

సమాకలనం చేయగా $\Rightarrow xy + yz + zx = c$ ఇదే దత్త సమీకరణ సాధారణ సాధన.

3.5.4. దత్త సమీకరణం $yz(1+x)dx + xz(1+y)dy + xy(1+z)dz = 0$

xyz తో భాగించగా $\left(\frac{1}{x}+1\right)dx + \left(\frac{1}{y}+1\right)dy + \left(\frac{1}{z}+1\right)dz = 0$

సమాకలనం చేయగా $\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx + \int\left(\frac{1}{y}+1\right)dy + \int\left(\frac{1}{z}+1\right)dz = 0$

$$\Rightarrow \log x + \log y + \log z = x + y + z = c$$

$\Rightarrow \log xyz + (x+y+z) = c$ ఇది సాధారణ సాధన.

3.5.5. దత్త సమీకరణం

$$xdy - ydx - 2x^2zdz = 0$$

x^2 తో భాగించగా

$$\Rightarrow \frac{xdy - ydx}{x^2} - 2zdz = 0$$

$$\Rightarrow d\left(\frac{y}{x}\right) - \int 2z\,dz = \int 0$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} - z^2 = c$$ ఇది సాధారణ సాధన.

3.5.6. దత్త సమీకరణం

$$xdx - ydx - xdy + zdz = 0$$

$$\Rightarrow xdx - (ydx + xdy) + zdz = 0$$ (అనుకూల సమూహంగా విభజించి)

$$\Rightarrow xdx - d(xy) + zdz = 0$$

సమాకలనం చేయగా

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} - xy + \frac{z^2}{2} = c$$ ఇది సాధారణ సాధన.

3.5.7. దత్త సమీకరణం

$$2yzdx - 3zxdy - 4xydz = 0$$

xyz తో భాగించగా

$$\Rightarrow \frac{2}{x}dx - \frac{3}{y}dy - \frac{4}{z}dz = 0$$

సమాకలనం చేయగా $\Rightarrow 2\int \frac{1}{x}dx - 3\int \frac{1}{y}dy - 4\int \frac{1}{z}dz = \int 0$

$$\Rightarrow 2\log x - 3\log y - 4\log z = \log c$$

$$\Rightarrow \log\left[\frac{x^2}{y^3 z^4}\right] = \log c$$

$$\Rightarrow x^2 = cy^3 z^4$$ ఇది సాధారణ సాధన.

3.5.8. దత్త సమీకరణం $yzdx + 2xdx + xzdy + 2ydy + xydz + 2zdz = 0$

$$\Rightarrow d(xyz) + 2xdx + 2ydy + 2zdz = 0$$

సమాకలనం చేయగా $\Rightarrow \int d(xyz) + \int 2xdx + \int 2ydy + \int 2zdz = \int 0$

$\Rightarrow xyz + x^2 + y^2 + z^2 = c$

ఇది సాధారణ సాధన

3.5.9. దత్త సమీకరణం

$(z+y)dx + dy + dz = 0$

$(y+z)$తో భాగించగా

$$\Rightarrow dx + \frac{dy+dz}{y+z} = 0$$

$$\Rightarrow dx + d\left[\log(y+z)\right] = 0$$

సమాకలనం చేయగా $\Rightarrow x + \log(y+z) = c$

$\Rightarrow (y+z) = c\,e^{-x}$ ఇదే దత్త సమీకరణ సాధారణ సాధన

3.5.10. దత్త సమీకరణం $(x+z)^2 dy + y^2(dx+dz) = 0$

$(x+z)^2 y^2$ తో భాగిస్తే

$$\Rightarrow \frac{dy}{y^2} + \frac{dx+dz}{(x+z)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y^2} + d\left(\frac{-1}{x+z}\right) = 0$$

సమాకలనం చేయగా $\Rightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y^2} + \int d\left(\frac{-1}{x+z}\right) = \int 0$

$$\Rightarrow \frac{-1}{y} - \frac{1}{x+z} = c$$

$$\Rightarrow (x+y+z) + cy(x+z) = 0$$

ఇది దత్త సమీకరణ సాధారణ సాధన

3.6 సంగ్రహం:

ఈ పాఠంలో మనం సంపూర్ణ అవకలన సమీకరణాలు మరియు సంపూర్ణ అవకలన సమీకరణాల సరణులు, వాటికి సంబంధించిన సమస్యలను చర్చించాము.

3.7 సాంకేతిక పదాలు:

సంపూర్ణ అవకలన సమీకరణాలు, సంపూర్ణ అవకలన సమీకరణాల సరణులు, సంపూర్ణ అవకలనం, సమాకలనీయత, జట్లు కట్టే పద్ధతి, గుణకాల పద్ధతి.

3.8 అభ్యాసం:

ఈ క్రింది సంపూర్ణ అవకలన సమీకరణాలు సమాకలనీయమైతే సాధించండి.

1) $(yz-2x)dx+(xz-2y)dy+(xy-2z)dz=0$

2) $(yz+2x)dx+(xz-2z)dy+(xy-2y)dz=0$

3) $(a-z)(ydx+xdy)+xydz=0$

4) $(x-3y-z)dx+(2y-3x)dy+(z-x)dz=0$

5) $zydx+(x^2y-zx)dy+(x^2z-xy)dz=0$

6) $3x^2dx+3y^2dy-(x^3+y^3+c^{2z})dz=0$

7) $(y^2+yz)dx+(z^2+zx)dy+(y^2-xy)dz=0$

8) $xz^3dx-zdy+2ydz=0$

9) $(y^2+z^2-x^2)dx-2xydy-2xzdz=0$

10) $2yzdx+3xdy-xy(1+z)dz=0$

11) $(x^2z-y^3)dx+3xy^2dy+x^3dz=0$

ఈ క్రింది సంపూర్ణ అవకలన సమీకరణాల సరణులను సాధించండి.

12) $\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}=\frac{dz}{z^2}$

13) $\frac{dx}{z^2y}=\frac{dy}{z^2x}=\frac{dz}{y^2x}$

14) $\frac{xdx}{y^3z}=\frac{dy}{x^2z}=\frac{dz}{y^3}$

15) $\frac{dx}{z}=\frac{dy}{-z}=\frac{dz}{x(yz-2x)}$

16) $\frac{dx}{xy}=\frac{dy}{y^2}=\frac{dz}{x(yz-zx)}$

17) $\frac{dx}{x+4y-3z}=\frac{dy}{3}=\frac{dz}{4}$

18) $\frac{dx}{x(y^2-z^2)}=\frac{dy}{y(z^2-x^2)}=\frac{dz}{z(x^2-y^2)}$

19) $\frac{dx}{y-xz}=\frac{dy}{yz+x}=\frac{dz}{x^2+y^2}$

20) $\frac{dx}{x(y^2-z^2)}=\frac{dy}{-y(z^2+x^2)}=\frac{dz}{z(x^2+y^2)}$

21) $\frac{dx}{z(x+y)}=\frac{dy}{z(x-y)}=\frac{dz}{x^2+y^2}$

22) $\frac{dx}{x^2+y^2}=\frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{(x+y)z}$

23) $\frac{dx}{y^2+yz+z^2}=\frac{dy}{z^2+zx+x^2}=\frac{dz}{x^2+xy+y^2}$

అభ్యాసానికి సమాధానాలు

1) $xyz = c + x^2 + y^2 + z^2$

2) $xyz = c + 2yz - x^2$

3) $xy = c(z - a)$

4) $x^2 + 2y^2 + z^2 - 6xy - 2xz = c$

5) $x\left(y^2 + z^2 - 2c\right) = 2yz$

6) $x^3 + y^3 = e^{2z} + ce^z$

7) $y(x + z) = c(y + z)$

8) $2y = x^2z^2 + 2cz^2$

9) $x^2 + y^2 + z^2 = cx$

10) $x^2y = cze^z$

11) $x^2z + y^3 = cx$

12) $x - y = c_1xy;\ y - z = c_2yz$

13) $x^2 - y^2 = c_1;\ y^3 - z^3 = c_2$

14) $x^4 - y^4 = c_1;\ x^2 - y^2 = c_2$

15) $x + y = c_1;\ e^{2x} = \left(c_1{}^2 + z^2\right)c_2$

16) $x = c_1y;\ e^x = \left(z - 2c_1\right)c_2$

17) $4y - 3z = c_1;\ (x + 4y - 3z)^3 = e^y c_2$

18) $x^2 + y^2 + z^2 = c_1;\ xyz = c_2$

19) $xy - z = c_1;\ x^2 - y^2 + z^2 = c_2$

20) $x^2 + y^2 + z^2 = c_1;\ yz = c_2x$

21) $x^2 - y^2 - z^2 = c_1;\ 2xy - z^2 = c_2$

22) $x + y = c_1 z;\ 2y = c_2\left(x^2 - y^2\right)$

23) $(y - x) = c_1(z - x);\ (y - x) = c_2(z - y)$

3.10 మాదిరి ప్రశ్నలు:

1. $x\,dx + z\,dy + (y + 2z)\,dz = 0$ సమీకరణం సమాకలనీయమైతే సాధించండి.

ఈ క్రింది సంపూర్ణ అవకలన సమీకరణాల సరణులను సాధించండి.

2. $\dfrac{dx}{yz} = \dfrac{dy}{zx} = \dfrac{dz}{xy}$

3. $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{z} = \dfrac{dz}{-y}$

4. $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{-x} = \dfrac{dz}{2x - 3y}$

5. $\dfrac{dx}{y - z} = \dfrac{dy}{z - x} = \dfrac{dz}{x - y}$

6. $\dfrac{dx}{mz - ny} = \dfrac{dy}{nx - \ell z} = \dfrac{dz}{\ell y - mx}$

3.11 సంప్రదించవలసిన గ్రంథాలు:

1) Vol - I - Deepthi Publications : A Text Book of Mathematics.

2) Vol. II - S.Chand - A Text Book of Mathematics

3) Differential Equations by N.Ch.S.N. Iyengar

పాఠ్య రచయిత

Sri. P.S. Chakravarthy

పాఠం - 4

ప్రథమ పరిమాణ ఏకాధిక ఘాత అవకలన సమీకరణాలు

4.1 పాఠం యొక్క లక్ష్యం:

ఈ పాఠం చదివిన తరువాత విద్యార్థి ప్రథమ పరిమాణ ఏకాధిక ఘాత అవకలన సమీకరణాలను మరియు తత్సంబంధమైన సమస్యలను సాధించుట తెలుసుకొంటారు.

4.2 పాఠం యొక్క స్వరూపం:

ఈ పాఠంలో క్రింది అంశాలు ఉంటాయి.

4.3 ఉపోద్ఘాతం:

ఈ పాఠంలో సౌకర్యం కోసం $\frac{dy}{dx}$ ను ‘p’ తో సూచిస్తాము. $f(x,y,p)=0$ రూపంలోని సమీకరణాన్ని ప్రథమ పరిమాణ ఏకాధిక ఘాత అవకలన సమీకరణం అంటాం.

పరిమాణం 1, ఘాతం $n(>1)$ గా గల అవకలన సమీకరణం

సాధారణ రూపం $P^n + A_1P^{n-1} + A_2P^{n-2} + \cdots\cdots + A_{n-1}P + A_n = 0 \ (n>1)$

ఇక్కడ $A_1, A_2, \cdots, A_n$ లు x, y లలో ప్రమేయాలు.

ఈ సమీకరణాలు సాధించుటకు నాలుగు ప్రత్యేక పద్ధతులను ఈ అధ్యాయములో వివరిస్తాము.

(1) 'P' కోసం సాధించగల సమీకరణాలు

(2) 'Y' కోసం సాధించగల సమీకరణాలు

(3) 'x' కోసం సాధించగల సమీకరణాలు

(4) క్లైరో సమీకరణం

4.4 'P' కోసం సాధించ గల సమీకరణాలు:

దత్త సమీకరణం $P^n + A_1P^{n-1} + A_2P^{n-2} + \cdots\cdots + A_{n-1}P + A_n = 0 (n > 1)$ ---------- (1) ఈ సమీకరణాన్ని 'P' లో ప్రథమ పరిమాణ కారణ రాశులుగా విభజించ గలిగితే (1)ను 'P' కోసం సాధించగల సమీకరణం అంటాం.

అపుడు (1)ని

$\left[P - f_1(x, y)\right]\left[P - f_2(x, y)\right]\cdots\cdots\left[P - f_n(x, y)\right] = 0$ అనే రూపంలో వ్రాయగలము.

$$\Rightarrow P - f_1(x, y) = 0,\ P - f_2(x, y) = 0 \cdots\cdots P - f_n(x, y) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = f_1(x, y) \frac{dy}{dx} = f_2(x, y) \cdots\cdots \frac{dy}{dx} = f_n(x, y)$$

ప్రతి కారణాంకాన్ని సాధిస్తే 'n' సాధనలు వస్తాయి, అవి

$$F_1(x, y, c_1) = 0,\ F_2(x, y, c_2) = 0 \cdots\cdots F_n(x, y, c_n) = 0$$

$\therefore$ (1) యొక్క సాధన

$F_1(x, y, c_1) \times F_2(x, y, c_2) \times \cdots\cdots \times F_n(x, y, c_n) = 0$ అవుతుంది.

కాని (1) ప్రథమ పరిమాణ సమీకరణం, కాబట్టి

యాదృచ్ఛిక స్థిరరాసుల సంఖ్య ఒకటియే కావాలి. అందువల్ల సార్వత్రికకు భంగం కలుగకుండా $c_1 = c_2 = \cdots\cdots = c_n = c$ అనుకోవచ్చు.

$\therefore$ $F_1(x, y, c) \times F_2(x, y, c) \times \cdots\cdots \times F_n(x, y, c) = 0$ (1) కు సాధారణ సాధన అవుతుంది.

4.5.1 Y కోసం సాధించగల సమీకరణాలు: $f(x,y,p)=0$ ------- (1) అనునది దత్త అవకలన సమీకరణము.

పై సమీకరణాన్ని 'P' లో ప్రథమ పరిమాణ కారణాంకాలుగా విభజించలేనపుడు మరియు Y ని x, P లలో ప్రమేయంగా వ్రాయగల్గితే ఆ సమీకరణాన్ని 'Y' కోసం సాధించగల సమీకరణం అంటాం.

$y=F(x,p)$ -------- (2) అయితే

ఈ సమీకరణాన్ని 'x' ప్రకారం అవకలనం చేయగా, x, P లలో ఒక అవకలన సమీకరణం ఏర్పడుతుంది మరియు దీని సాధన

$\phi(x,p,c)=0$ --------- (3) అనుకొనుము.

ఇపుడు (2), (3)ల నుండి 'P'ను తొలగిస్తే (1) యొక్క సాధారణ సాధన $\psi(x,y,c)=0$ రూపంలో పొందవచ్చు.

('C' యాదృచ్ఛిక స్థిరరాశి)

4.5.2 గమనిక :

(1) (2) మరియు (3) సమీకరణాల నుండి 'P' ను తొలగించడం సాధ్యం కాకపోతే $f(x,y,p)=0$, $\phi(x,p,c)=0$ కలసి (1)కు సాధారణ సాధన అవుతుంది.

(2) (1) యొక్క సాధారణ సాధన $x=f_1(p,c)$, $y=f_2(p,c)$ రూపంలో కూడా వ్రాయవచ్చు. దీనినే పరామితీయ రూపంలోని సాధన అంటాం. ఇక్కడ 'P' పరామితి.

(3) యాదృచ్ఛిక స్థిరరాశి లోపించిన సాధననే అసాధారణ సాధన అంటారు. (పాఠ్య భాగం - 1లోని నిర్వచనం చూడండి).

(4) దత్త అవకలన సమీకరణం 'x'ను కలిగి యుండకపోతే అనగా సమీకరణం $f(y,p)=0$ రూపంలో ఉంటుంది. అపుడు దీనిని 'P' కోసం సాధించగలిగితే $p=\phi(y)$గా వ్రాసి చలరాశుల విభజన పద్ధతి ద్వారా సాధించవచ్చు. 'Y' కోసం సాధించగలిగితే $y=\psi(P)$ గా వ్రాసి చలరాశుల విభజన పద్ధతి ద్వారా సాధించవచ్చు.

(5) దత్త సమీకరణం x, Y లలో సమ ఘాతమైతే $f\left(p,\frac{y}{x}\right)=0$ గా సమ ఘాత సమీకరణఆల సాధన పద్ధతి ద్వారా సాధించవచ్చు.

4.6.1 'x' కోసం సాధించ గల సమీకరణాలు:

దత్త అవకలన సమీకరణం $f(x,y,p)=0$ --------- (1)

(1)ను $x=F(y,p)$ ----------- (2) గా వ్రాయగల్గితే అపుడు

(1)ను 'x' కోసం సాధించగల సమీకరణం అంటాం.

(2)ను 'y' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా y, P లలో అవకలన సమీకరణం ఏర్పడుతుంది. దీనిని $\frac{1}{p} = g\left(y, p, \frac{dp}{dy}\right)$ గా వ్రాయవచ్చు. మరియు సాధన $\phi(y, p, c) = 0$ -------- (3) అనుకొనుము.

ఇపుడు (2), (3)ల నుండి 'P'ను తొలగించగా (1) యొక్క సాధారణ సాధన $\psi(x, y, c) = 0$ రూపంలో పొందవచ్చు.

4.6.2 గమనిక : (2), (3)ల నుండి 'P'ను తొలగించలేక పోతే (2), (3) కలసి (1) యొక్క సాధారణ సాధన అవుతుంది.

దత్త అవకలన సమీకరణంలో 'y' లోపిస్తే అనగా $f(x, p) = 0$ రూపంలో ఉంటే దానిని 'P' కోసం సాధించగలిగితే $P = \phi(x)$ గా వ్రాసి చలరాశుల విభజన పద్ధతి ద్వారా సాధించవచ్చు. లేదా 'x' కోసం సాధించగలిగితే $x = \psi(P)$ గా వ్రాసి పైన వివరించిన విధంగా సాధించవచ్చు.

4.7 క్లైరో సమీకరణము:

$y = px + \phi(p)$ రూపంలో ఉన్న అవకలన సమీకరణాన్నే క్లైరో సమీకరణం అంటాం.

క్లైరో సమీకరణాన్ని 'y' కోసం సాధించవచ్చు.

$$y = px + \phi(p) \text{ ---------- (1)}$$

దీనిని 'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dx}x + p + \phi'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx}\left(x + \phi'(p)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = 0 \text{ -------- (2)} \qquad x + \phi'(p) = 0 \text{ --------- (3)}$$

అసాధారణ సాధనను ఇచ్చే (3)ను వదలి వేయవచ్చు.

సాధారణ సాధన కొరకు (2)ను సాధించాలి.

$$\frac{dp}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow dp = 0$$

సమాకలనం చేయగా

$\Rightarrow p = c$ (c యాదృచ్ఛిక స్థిరరాశి)

(1) నుండి 'P'ను తొలగిస్తే

(1) యొక్క సాధారణ సాధన $y = cx + \phi(c)$ అవుతుంది.

4.7.2 **గమనిక :** క్లేరో సమీకరణం $y = px + \phi(p)$లోని 'P'ను 'c'తో స్థానభ్రంశం చేయడం ద్వారా దానిని సాధారణ సాధన పొందవచ్చు.

4.7.3 సాధించిన సమస్యలు:

$p^2 + 2py\cot x = y^2$ ను సాధించండి.

సాధన : దత్త అవకలన సమీకరణం

$p^2 + 2py\cot x - y^2 = 0$ ------------ (1)

ఇది 'P'లో వర్గ సమీకరణం

$$\therefore p = \frac{-2y\cot x \pm \sqrt{4y^2\cot^2 x + 4y^2}}{2}$$

$$\Rightarrow p = -y\cot x \pm y\sqrt{\cot^2 x + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y(-\cot x \pm \operatorname{cosec} x)$$

చలరాశులు విభజించి సమాకలనం చేయగా

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \cot x\,dx \pm \int \operatorname{cosec} x\,dx$$

$$\Rightarrow \log c + \log y = -\log \sin x \pm \log \tan x/2$$

$$\Rightarrow \log|cy\sin x| = \log\left|\operatorname{Tan} x/2\right|$$

$$\Rightarrow |cy\sin x| = \left|\tan x/2\right|$$

$\Rightarrow c^2y^2\sin^2 x - \tan^2 x/2 = 0$ ఇదియే (1) యొక్క సాధారణ సాధన

4.7.4 : $xy\left(p^2+1\right)=\left(x^2+y^2\right)p$ ను సాధించండి.

సాధన : దత్త సమీకరణం

$$xyp^2-x^2p-y^2p+xy=0 \text{ ---------- (1)}$$

$$\Rightarrow xp(yp-x)-y(yp-x)=0$$

$$\Rightarrow (yp-x)(xp-y)=0$$

$$\Rightarrow yp-x=0; \qquad xp-y=0$$

$$\begin{array}{r|l} y\dfrac{dy}{dx}=x & x\dfrac{dy}{dx}=y \\ \Rightarrow ydy=xdx & \Rightarrow \dfrac{dy}{y}=\dfrac{dx}{x} \\ \Rightarrow \int ydy=\int xdx & \\ \Rightarrow \dfrac{y^2}{2}=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{c}{2} & \Rightarrow \int\dfrac{dy}{y}=\int\dfrac{dx}{x} \\ & \Rightarrow \log y=\log x+\log c \Rightarrow y=cx \end{array}$$

$\therefore$ (1)కు సాధారణ సాధన $\left(y^2-x^2-c\right)(y-cx)=0$

4.7.5 : $xyp^2+\left(x^2+xy+y^2\right)p+\left(x^2+xy\right)=0$ ను సాధించండి.

సాధన : దత్త సమీకరణం

$$xyp^2+x^2p+xyp+x^2+y^2p+xy=0 \text{ --------- (1)}$$

$$\Rightarrow xp(yp+x)+x(yp+x)+y(yp+x)=0$$

$$\Rightarrow (yp+x)(xp+x+y)=0$$

$$\Rightarrow yP+x=0 \;;\; xP+x+y=0$$

$$\Rightarrow y\frac{dy}{dx}+x=0$$
$$\Rightarrow ydy=-xdx$$
$$\Rightarrow \int ydy=-\int xdx$$
$$\Rightarrow \frac{y^2}{2}=\frac{-x^2}{2}+\frac{c}{2}$$
$$\Rightarrow y^2+x^2-c=0$$

$$\Rightarrow x\frac{dy}{dx}+x+y=0$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=-1$$

ఇది 'y'లోని ప్రథమ పరిమాణ సరళ సమీకరణం

సమాకలన గుణకం $= e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\log x} = x$

$\therefore$ సాధన $yx=-\int xdx$

$$\Rightarrow xy=\frac{-x^2}{2}+\frac{c}{2}$$
$$\Rightarrow 2xy+x^2-c=0$$

$\therefore$(1)కు సాధారణ సాధన $\left(y^2+x^2-c\right)\left(2xy+x^2-c\right)=0$

4.7.6 : $p^3+\left(2x-y^2\right)p^2=2xy^2p$ ను సాధించండి.

సాధన : దత్త అవకలన సమీకరణం

$p^3+\left(2x-y^2\right)p^2-2xy^2p=0$ ---------- **(1)**

$$\Rightarrow p\left[p^2+2xp-y^2p-2xy^2\right]=0$$
$$\Rightarrow p\left[p[p+2x]-y^2(p+2x)\right]=0$$
$$\Rightarrow p(p+2x)\left(p-y^2\right)=0$$
$$\Rightarrow p=0;\quad p+2x=0;\ p-y^2=0$$

$P=0$ తీసుకొంటే

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=0\Rightarrow dy=0$$

సమాకలనం చేయుగా $y=c \Rightarrow y-c=0$

$p+2x=0$ నుండి

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + 2x = 0 \quad \Rightarrow dy + 2xdx = 0$$

$$\Rightarrow \int dy + \int 2xdx = \int 0$$

$$\Rightarrow \left(y + x^2 - c\right) = 0$$

$p - y^2 = 0$ నుండి

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - y^2 = 0 \quad \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = dx$$

$$\Rightarrow \int y^{-2} dy = \int dx \quad \Rightarrow \frac{-1}{y} = x + c \Rightarrow (xy + cy + 1) = 0$$

$\therefore$ (1) కు సాధారణ సాధన $(y - c)\left(y + x^2 - c\right)(xy + cy + 1) = 0$

4.7.7 : $xy^2\left(p^2 + 2\right) = 2py^3 + x^3$

సాధన : దత్త సమీకరణం

$xy^2p^2 - 2py^3 + 2xy^2 - x^3 = 0$ -------- (1)

ఇది 'P'లో వర్గ సమీకరణం

$$\therefore p = \frac{2y^3 \pm \sqrt{4y^6 - 4 \cdot xy^2\left(2xy^2 - x^3\right)}}{2xy^2}$$

$$\Rightarrow p = \frac{2y^3 \pm 2y\sqrt{y^4 - 2x^2y^2 + x^4}}{2xy^2}$$

$$\Rightarrow p = \frac{y^2 \pm \sqrt{\left(y^2 - x^2\right)^2}}{xy}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 \pm \left(y^2 - x^2\right)}{xy}$$

$\frac{dy}{dx}=\frac{2y^2-x^2}{xy}$ నుండి

ఇది సమఘాత అవకలన సమీకరణం

$\frac{y}{x}=v$ అనుకొంటే $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$ అవుతుంది.

ఇపుడు $v+x\frac{dv}{dx}=\frac{2v^2-1}{v}$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx}=\frac{2v^2-1-v^2}{v}$$

$$\Rightarrow \frac{vdv}{v^2-1}=\frac{dx}{x}$$

సమాకలనం చేయగా $\Rightarrow \frac{1}{2}\int\frac{2vdv}{v^2-1}=\int\frac{dx}{x}$

$$\Rightarrow \log\left(v^2-1\right)=2\log x+\log c$$

$$\Rightarrow v^2-1=x^2c \Rightarrow y^2-x^2-x^4c=0$$

$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{xy}$ తీసుకొనగా

$$\Rightarrow ydy=xdx$$

సమాకలనం చేయగా $\int y\,dy=\int x\,dx$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+\frac{c}{2} \quad \Rightarrow \left(y^2-x^2-c\right)=0$$

$\therefore$ (1) యొక్క సాధారణ సాధన $\left(y^2-x^2-x^4c\right)\left(y^2-x^2-c\right)=0$

4.7.8 : $xp^2 - 2yp + x = 0$ ను సాధించండి.

సాధన : దత్త సమీకరణం

$$xp^2 - 2yp + x = 0 \text{ --------- } (1)$$

ఇది 'P'లో వర్గ సమీకరణం

$$\therefore p = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4x^2}}{2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - x^2}}{x}$$

ఇది ప్రథమ పరిమాణ సమఘాత సమీకరణం

$\frac{y}{x} = v$ అనుకొంటే $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ అవుతుంది.

అపుడు

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{vx \pm \sqrt{v^2x^2 - x^2}}{x}$$

$$\Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = v \pm \sqrt{v^2 - 1}$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \pm\sqrt{v^2 - 1}$$

చలరాశులు విభజించి సమాకలనం చేయగా

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 - 1}} = \pm \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \log\left(v + \sqrt{v^2 - 1}\right) = \pm \log x + \log c$$

$$\Rightarrow \left(v + \sqrt{v^2 - 1}\right)x = c; \qquad \frac{v + \sqrt{v^2 - 1}}{x} = c$$

$$\Rightarrow y+\sqrt{y^2-x^2}-c=0 \qquad y+\sqrt{y^2-x^2}-cx^2=0$$

$\therefore$ (1)కు సాధారణ సాధన $\left(y+\sqrt{y^2-x^2}-c\right)\left(y+\sqrt{y^2-x^2}-cx^2\right)=0$

4.7.9 : $px+y-p^2x^4=0$ సాధించండి.

సాధన : దత్త సమీకరణం

$y=p^2x^4-px$ ------ (1)

ఇది 'y' కోసం సాధించగల సమీకరణం

(1)ను 'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx}=\left[2p\frac{dp}{dx}x^4+p^2\cdot 4x^3\right]-\left[\frac{dp}{dx}x+p\right]$$

$$\Rightarrow p-4p^2x^3+p+x\frac{dp}{dx}-2px^4\frac{dp}{dx}=0$$

$$\Rightarrow 2p\left(1-2px^3\right)+x\frac{dp}{dx}\left(1-2px^3\right)=0$$

$$\Rightarrow \left(1-2px^3\right)\left(2p+x\frac{dp}{dx}\right)=0$$

$$\Rightarrow 1-2px^3=0 \text{ ------ (2)} \qquad 2p+x\frac{dp}{dx}=0 \text{ ------------ (3)}$$

$\frac{dp}{dx}$ లోపించిన (2)వ సమీకరణం అసాధారణ సాధన ఇస్తుంది. కాబట్టి దానిని వదిలివేయవచ్చు.

(3) నుండి $2p=-x\frac{dp}{dx}$

$$\Rightarrow \frac{2dx}{x}=\frac{-dp}{p}$$

$$\Rightarrow 2\int\frac{dx}{x}=-\int\frac{dp}{p} \quad \Rightarrow 2\log x+\log p=\log c$$

$$\Rightarrow p=\frac{c}{x^2} \text{ ....}(4)$$

(1), (4)ల నుండి 'p'ను తొలగిస్తే

(1) యొక్క సాధారణ సాధన $y=c^2x^2-\frac{c}{x}$ అవుతుంది.

4.7.10 : $xp^2-2yp+x=0$ ను సాధించండి.

సాధన : దత్త అవకలన సమీకరణం

$$2yp=xp^2+x \text{ ------- } (1)$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{2}\left[\frac{xp^2}{p}+\frac{x}{p}\right]$$

'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left[p+x\frac{dp}{dx}+\frac{p-x\frac{dp}{dx}}{p^2}\right]$$

$2p^2$ తో గుణించగా $\Rightarrow 2p^3=p^2\left(p+x\frac{dp}{dx}\right)+p-x\frac{dp}{dx}$

$$\Rightarrow x\frac{dp}{dx}\left(p^2-1\right)-p\left(p^2-1\right)=0$$

$$\Rightarrow \left(p^2-1\right)\left(x\frac{dp}{dx}-p\right)=0$$

$$\Rightarrow p^2-1=0 \text{ ------ } (2) \quad : \quad x\frac{dp}{dx}-p-0 \text{ --------- } (3)$$

అసాధారణ సాధనను ఇచ్చే (2)ను వదలి వేయవచ్చు.

(3) నుండి $x\frac{dp}{dx}=p$

$$\Rightarrow \frac{dp}{p}=\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \log p = \log x + \log c \Rightarrow p = cx \text{ ---------- (4)}$$

(1), (4)ల నుండి pను తొలగించగా, (1) యొక్క సాధారణ సాధన,

$$2ycx = x(cx)^2 + x$$

$$\text{i.e.} \quad 2cxy = c^2x^3 + x$$

4.7.11 : $xp^3 - 2yp^2 + 4x^2 = 0$ ను సాధించండి.

సాధన : దత్త సమీకరణం

$$2yp^2 = xp^3 + 4x^2 \text{ ---------- (1)}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}\left[xp + 4\frac{x^2}{p^2}\right]$$

'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[p + x\frac{dp}{dx} + 4\left(\frac{2xp^2 - x^2 2p\frac{dp}{dx}}{p^4}\right)\right]$$

$2p^4$తో గుణించగా $\Rightarrow 2p^5 = p^4\left(p + x\frac{dp}{dx}\right) + 4\left(2xp^2 - 2x^2p\frac{dp}{dx}\right)$

$$\Rightarrow xp\frac{dp}{dx}\left(p^3 - 8x\right) - p^2\left(p^3 - 8x\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(p^3 - 8x\right)\left(xp\frac{dp}{dx} - p^2\right) = 0$$

$$p^3 - 8x = 0 \text{ ------- (2)} \qquad xp\frac{dp}{dx} - p^2 = 0 \text{ -------- (3)}$$

అసాధారణ సాధననిచ్చే (2)ను వదిలివేయవచ్చు.

(3) నుండి $xp\frac{dp}{dx} = p^2$

$$\Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \log p = \log x + \log c \ \Rightarrow p = cx \text{ ------- (4)}$$

(1), (4) నుండి p ను తొలగించగా, (1) యొక్క సాధారణ సాధన

$$2y(cx)^2 = x(cx)^3 + 4x^2$$

$$\Rightarrow 2c^2y = c^3x^2 + 4$$

4.7.12 : $\left(8p^3 - 27\right)x = 12p^2y$

సాధన : దత్త సమీకరణం

$$y = \frac{\left(8p^3 - 27\right)x}{12p^2} \text{ ---------- (1)}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2px}{3} - \frac{9x}{4p^2}$$

'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}\left[p + x\frac{dp}{dx}\right] - \frac{9}{4}\left[\frac{p^2 - 2xp\frac{dp}{dx}}{p^4}\right]$$

$12p^4$తో గుణించగా $\Rightarrow 12p^5 = 8p^4\left(P + x\frac{dp}{dx}\right) - 27\left(p^2 - 2xp\frac{dp}{dx}\right)$

$$\Rightarrow 2xp\frac{dp}{dx}\left(4p^3 + 27\right) - p^2\left(4p^3 + 27\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(4p^3 + 27\right)\left(2xp\frac{dp}{dx} - p^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow 4p^3 + 27 = 0 \text{ ------- (2)} \qquad 2xp\frac{dp}{dx} - p^2 = 0 \text{ ------- (3)}$$

(3) నుండి $2xp\frac{dp}{dx}=p^2 \quad =0$

చలరాశులు విభజించి సమాకలనం చేయగా

$$2\int\frac{dp}{p}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \; 2\log p=\log x+\log c \;\; \Rightarrow p^2=cx \text{ -------- (4)}$$

(1), (4)ల నుండి p ను తొలగించగా (1) యొక్క సాధారణ సాధన

$$y=\frac{2\sqrt{c}}{3}\,x^{3/2}-\frac{9}{4c}$$

4.7.13 : $y=xp^2+p$ ను సాధించండి.

సాధన : దత్త సమీకరణం

$$y=xp^2+p \text{ -------- (1)}$$

'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx}=p^2+2xp\frac{dp}{dx}+\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow(2xp+1)\frac{dp}{dx}+p^2-p=0$$

$$\Rightarrow\left(p^2-p\right)\frac{dx}{dp}+2xp=-1 \text{ -------- (2)}$$

ఇది 'x'లో ప్రథమ పరిమాణ సరళ సమీకరణం

సమాకలన గుణకం $=e^{\int\frac{2dp}{p-1}}=e^{2\log(p-1)}=(p-1)^2$

(2) యొక్క సాధారణ సాధన $x(p-1)^2=\int\frac{-(p-1)^2}{p(p-1)}dp$

$$\Rightarrow x(p-1)^2 = \int\left(-1+\frac{1}{p}\right)dp$$

$$\Rightarrow x(p-1)^2 = -p+\log p+\log c \Rightarrow e^{x(p-1)^2+p} = pc \text{ ---------- (3)}$$

$\therefore$ దీనిని ఉపయోగించి p ను తొలగించడం సాధ్యం కాదు కావున

(1), (3) కలసి (1)కు సాధారణ సాధన అవుతాయి.

4.7.14 : $e^y = p^3 + p$ ను సాధించండి.

సాధన : దత్త సమీకరణం

$$e^y = p^3 + p \text{ ---------- (1)}$$

x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$e^y \frac{dy}{dx} = \left(3p^2+1\right)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \left(p^3+p\right)p = \left(3p^2+1\right)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow dx = \frac{3p^2+1}{p^2\left(p^2+1\right)}\,dp$$

$$\Rightarrow \int dx = \int\left[\frac{3}{p^2+1}+\frac{1}{p^2\left(p^2+1\right)}\right]dp$$

$$\Rightarrow x = 3\int\frac{dp}{p^2+1}+\int\frac{\left(p^2+1\right)-p^2}{p^2\left(p^2+1\right)}\,dp$$

$$\Rightarrow x = 3\tan^{-1}p+\int\frac{dp}{p^2}-\int\frac{dp}{p^2+1}$$

$$\Rightarrow x = 2\tan^{-1}p-\frac{1}{p}+c$$

$\therefore e^y = p^3+p$ మరియు $x = 2\tan^{-1}p-\frac{1}{p}+c$ కలసి (1)కు సాధారణ సాధన అవుతాయి.

4.7.15 : $y = yp^2 + 2px$ ను సాధించండి.

సాధన : దత్త సమీకరణం

$$y\left(1-p^2\right) = 2px \text{ ....} (1)$$

i.e. $y = \dfrac{2px}{1-p^2}$ ------ (1)

x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = 2\left[\frac{\left(p + x\dfrac{dp}{dx}\right)\left(1-p^2\right) + 2p\dfrac{dp}{dx}px}{\left(1-p^2\right)^2}\right]$$

$$\Rightarrow \left(1-p^2\right)p = 2\left(1-p^2\right)p + 2x\left(1-p^2\right)\frac{dp}{dx} + 4xp^2\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow 2x\frac{dp}{dx}\left(2p^2+1-p^2\right) + p\left(1-p^2\right)\left(2-1+p^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(p^2+1\right)\left(2x\frac{dp}{dx} + p\left(1-p^2\right)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(p^2+1\right) = 0 - (2) \qquad 2x\frac{dp}{dx} + p\left(1-p^2\right) = 0 \text{---------} (3)$$

మనకు కావలసినది సాధారణ సాధన కావున (2)ను వదలి వేయవచ్చు.

(3)ను సాధించగా

$$2x\frac{dp}{dx} = p\left(1-p^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2dp}{p\left(1-p^2\right)} = \frac{dx}{x}$$

సమాకలనం చేయగా $\Rightarrow 2\displaystyle\int \frac{dp}{p\left(1-p^2\right)} = \int \frac{dx}{x}$

$$\Rightarrow 2\int \frac{1-p^2+p^2}{p\left(1-p^2\right)}dp = \log x + \log c$$

$$\Rightarrow 2\int \frac{dp}{p} + 2\int \frac{p\,dp}{1-p^2} = \log cx$$

$$\Rightarrow 2\log p - \log\left(1-p^2\right) = \log cx \quad \Rightarrow \frac{p^2}{1-p^2} = cx$$

$\therefore$ **(1)** యొక్క సాధారణ సాధన $y = \frac{2px}{1-p^2}$ మరియు $\frac{p^2}{1-p^2} = cx$

4.7.16 : $y = a + bp + cp^2$ ను సాధించండి.

సాధన : దత్త సమీకరణం

$y = a + bp + cp^2$ ---------- **(1)**

x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = b\frac{dp}{dx} + 2cp\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow (b+2cp)\frac{dp}{dx} - p = 0$$

$$\Rightarrow (b+2cp)\frac{dp}{dx} = p$$

సమాకలనం చేయగా $\int \frac{(b+2cp)}{p}\,dp = \int dx$

$$\Rightarrow b\log p + 2cp = x + c$$

$$\Rightarrow x = b\log p + 2cp - c$$

$\therefore$ **(1)** కు సాధారణ సాధన $y = a + bp + cp^2$, $x = b\log p + 2cp - c$.

4.7.17 : $p^3 - 4xyp + 8y^2 = 0$ ను సాధించండి.

సాధన : దత్త అవకలన సమీకరణం

$$p^3 - 4xyp + 8y^2 = 0$$

ఇది ' x ' కోసం సాధించగల సమీకరణం

$$\Rightarrow x = \frac{1}{4}\left[\frac{p^2}{y} + \frac{8y}{p}\right]$$

' y ' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{4}\left[\frac{2p\frac{dp}{dy}y - p^2}{y^2} + 8 \cdot \frac{p - y\frac{dp}{dy}}{p^2}\right]$$

$4y^2p^2$తో గుణించగా $\Rightarrow 4y^2p = p^2\left(2py\frac{dp}{dy} - p^2\right) + 8y^2\left(p - y\frac{dp}{dy}\right)$

$$\Rightarrow 2y\frac{dp}{dy}\left(p^3 - 4y^2\right) + p\left(4y^2 - p^3\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(p^3 - 4y^2\right)\left(2y\frac{dp}{dy} - p\right) = 0$$

$\Rightarrow p^3 - 4y^2 = 0$ -------- (2) $\qquad 2y\frac{dp}{dy} - p = 0$ --------- (3)

సాధారణ సాధన కొరకు (3)ను సాధించగా

$$2y\frac{dp}{dy} = P$$

చలరాశులు విభజించి సమాకలనం చేయగా

$$2\int\frac{dp}{p} = \int\frac{dy}{y}$$

$\Rightarrow 2\log p = \log y + \log c \quad \Rightarrow p^2 = cy$ --------- (4)

(1), (4)ల నుండి pను తొలగించగా

(1) యొక్క సాధారణ సాధన $4xy\sqrt{cy} = cy\sqrt{cy} + 8y^2$

$$\Rightarrow 4\sqrt{e}(x-c) = 8\sqrt{y}$$

వర్గం చేయగా $\Rightarrow$ $c(x-c)^2 = 4y$

4.7.18 : $p^3 - (y+3)p + x = 0$ను సాధించండి.

సాధన : దత్త సమీకరణం

$x = (y+3)p - p^3$ --------- (1)

y దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = p + (y+3)\frac{dp}{dy} - 3p^2\frac{dp}{dy}$$

pతో గుణించగా $\Rightarrow$ $1 = p^2 + p(y+3)\frac{dp}{dy} - 3p^3\frac{dp}{dy}$

$$\Rightarrow p\frac{dp}{dy}\left(y+3-3p^2\right) + p^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow p\left(y+3-3p^2\right) + \left(p^2-1\right)\frac{dy}{dp} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dp} + \frac{p}{p^2-1}y = \frac{3p^3-3p}{p^2-1}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dp} + \frac{p}{p^2-1}y = 3p \quad \text{------ (2)}$$

ఇది yలో సరళ సమీకరణం

సమాకలన గుణకం $= e^{\int \frac{pdp}{p^2-1}} = e^{\log\sqrt{p^2-1}} = \sqrt{p^2-1}$

$\therefore$(2) యొక్క సాధన $y\sqrt{p^2-1} = \int 3p\sqrt{p^2-1}\,dp$

$$= 3\int q^2 dq \quad (\because \text{ ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి ద్వారా } p^2 - 1 = q^2 \text{ అనుకొనుము}$$

$$= q^3 + c \qquad \Rightarrow pdp = qdq)$$

$$\Rightarrow y\sqrt{p^2-1} = \left(p^2-1\right)^{3/2} + c$$

$$\Rightarrow y = \left(p^2-1\right) + c\left(p^2-1\right)^{-1/2}$$

$\therefore$ (1) యొక్క సాధారణ సాధన $x = (y+3)p - p^3, \quad y = \left(p^2-1\right) + c\left(p^2-1\right)^{\frac{-1}{2}}$

4.7.19 : $\left(x - \tan^{-1} p\right)\left(1+p^2\right) = 0$ ను సాధించండి.

సాధన : దత్త సమీకరణం

$$x - \tan^{-1} p = \frac{p}{1+p^2}$$

$$\Rightarrow x = \tan^{-1} p + \frac{p}{1+p^2} \text{ -------- (1)}$$

y దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1+p^2}\frac{dp}{dy} + \frac{\frac{dp}{dy}\left(1+p^2\right) - 2p^2\frac{dp}{dy}}{\left(1+p^2\right)^2}$$

$p\left(1+p^2\right)^2$ తో గుణించగా $\Rightarrow \left(1+p^2\right)^2 = p\left(1+p^2\right)\frac{dp}{dy} + p\left(1+p^2-2p^2\right)\frac{dp}{dy}$

$$\Rightarrow 2p\frac{dp}{dy} = \left(1+p^2\right)^2$$

చలరాశులు విభజించి సమాకలనం చేయగా

$$\int \frac{2pdp}{\left(1+p^2\right)^2} = \int dy \qquad \Rightarrow c - \left(1+p^2\right)^{-1} = y$$

$\therefore$(1) యొక్క సాధారణ సాధన $x = \tan^{-1} p + \dfrac{p}{p^2+1}$ మరియు $y = c - \left(p^2+1\right)^{-1}$

4.7.20 : $4xp^2 + 4yp - y^4 = 0$ ను సాధించండి.

సాధన : దత్త సమీకరణం

$4p^2x = y^4 - 4yp$ ------ (1)

$$x = \frac{1}{4}\left[\frac{y^4}{p^2} - \frac{4y}{p}\right]$$

y దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{4}\left[\frac{4y^3p^2 - 2p\frac{dp}{dy}y^4}{p^4} - \frac{4p - 4y\frac{dp}{dy}}{p^2}\right]$$

$4p^4$తో గుణించగా $\Rightarrow \quad 4p^3 = 4y^3p^2 - 2py^4\frac{dp}{dy} - p^2\left(4p - 4y\frac{dp}{dy}\right)$

$$\Rightarrow 2yp\frac{dp}{dy}\left(2p - y^3\right) - 4p^2\left(2p - y^3\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(2p - y^3\right)\left(2yp\frac{dp}{dy} - 4p^2\right) = 0$$

$\Rightarrow 2p - y^3 = 0$ ---------- (2) $\qquad 2yp\frac{dp}{dy} - 4p^2 = 0$ -------- (3)

(3)ను సాధించగా $\dfrac{dp}{p} = \dfrac{2dy}{y}$

$$\Rightarrow \int\frac{dp}{p} = 2\int\frac{dy}{y}$$

$\Rightarrow \log p = 2\log y + \log c \Rightarrow p = cy^2$ -------- (4)

(1), (4)ల నుండి pను తొలగించగా

(1) యొక్క సాధారణ సాధన $\quad 4x\left(cy^2\right)^2 + 4y\left(cy^2\right) - y^4 = 0$

$$\Rightarrow 4c\left(1 + cxy\right) - y = 0$$

4.7.21 : $xp^3 - bp = a$ ను సాధించండి.

సాధన : దత్త సమీకరణం

$$xp^3 = a + bp$$

$$\Rightarrow x = \frac{a}{p^3} + \frac{b}{p^2} \text{ --------- } (1)$$

y దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dx}{dy} = \left[\frac{-3a}{p^4} - \frac{2b}{p^3}\right]\frac{dp}{dy}$$

p తో గుణించగా $\Rightarrow \quad 1 = \left(\frac{-3a}{p^3} - \frac{2b}{p^2}\right)\frac{dp}{dy}$

చలరాశులు విభజించి సమాకలనం చేయగా

$$\int dy = -3a\int p^{-3}dp - 2b\int p^{-2}dp$$

$$\Rightarrow y = \frac{3a}{2p^2} + \frac{2b}{p} + c$$

$\therefore$ (1) యొక్క సాధారణ సాధన $x = \frac{a}{p^3} + \frac{b}{p^2}$ మరియు $y = \frac{3a}{2p^2} + \frac{2b}{p} + c$

4.7.22 : $(px - y)(py + x) = 2p$ ను సాధించండి.

సాధన : దత్త సమీకరణం

$$(px - y)(py + x) = 2p \text{ ---------- } (1)$$

$x^2 = X,\ y^2 = Y$ అనుకొనుము.

$\Rightarrow 2xdx = dX,\ 2ydY = dy\ ;\ \frac{dy}{dx} = p,\ \frac{dY}{dX} = P$ తో సూచిస్తే

$$\therefore \frac{dY}{dX} = \frac{2ydy}{2xdx} \Rightarrow P = \frac{yp}{x} \ \left(\because X = x^2\right)$$

(1) ను xy తో గుణించగా $\Rightarrow y(px-y)(py+x)x = 2pxy$

$$\Rightarrow \left(pxy - y^2\right)\left(pxy + x^2\right) = 2pxy$$

$$\Rightarrow (PX - Y)(PX + X) = 2PX$$

$$\Rightarrow PX - Y = \frac{2P}{P+1}$$

$$\Rightarrow Y = PX - \frac{2P}{P+1}$$ ఇది క్లైరో సమీకరణం

$\therefore$ (1) కు సాధారణ సాధన $Y = cX - \dfrac{2c}{c+1} \Rightarrow y^2 = cx^2 - \dfrac{2c}{c+1}$

4.7.23 : $y = 2px + p^2y$ ను సాధించండి.

సాధన : దత్త సమీకరణం

$y = 2px + p^2y$ -------- (1)

ఈ క్రింది ప్రక్షేపణల ద్వారా (1)ను క్లైరో రూపంలో మార్చుదాం.

$$x = X,\ y^2 = Y,\ \frac{dy}{dx} = p,\ \frac{dY}{dX} = P$$

$$\Rightarrow dx = dX,\ 2ydy = dY$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{2ydy}{dx} \Rightarrow P = 2yp \Rightarrow PX = 2pxy$$

(1) ను y తో గుణించగా $y^2 = 2pxy + p^2y^2$

$$\Rightarrow \quad Y = PX + \left(\frac{P}{2}\right)^2$$

ఇది క్లైరో సమీకరణం

$\therefore$ (1)కు సాధారణ సాధన $Y = cX + \dfrac{c^2}{4}$ i.e. $y^2 = cx + \dfrac{c^2}{4}$

4.8 స్వీయ అంచనాత్మక ప్రశ్నలు:

ఈ క్రింది వాటిని సాధించండి

1. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 10\left(\frac{dy}{dx}\right) + 21 = 0$

2. $6\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 7\left(\frac{dy}{dx}\right) - 3 = 0$

3. $4xp^2 = (3x-a)^2$

4. $y^2 - xyp - x^2p^2 = 0$

5. $x^2p^2 + xyp - 6y^2 = 0$

6. $x + yp^2 = (1+xy)p$

7. $y - x = xp + p^2$

8. $y = p\cos p - \sin p$

9. $y = px + \sqrt{1+p^2}$

10. $\sin(y - px) = p$

11. $y^2 - 2pxy + p^2x^2 - p^2 = a^2$

4.8.1 స్వీయ అంచనాత్మక సాధనలు :

4.8.1 : దత్త అవకలన సమీకరణం

$p^2 - 10p + 21 = 0$ ---------- **(1)** ఇది p కోసం సాధించగల సమీకరణం

$\Rightarrow p^2 - 3p - 7p + 21 = 0$

$\Rightarrow p(p-3) - 7(p-3) = 0$

$\Rightarrow (p-3)(p-7) = 0$

$\Rightarrow p - 3 = 0, \qquad p - 7 = 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3 \qquad \frac{dy}{dx} = 7$$

రెండింటినీ సాధించగా $dy = 3dx \qquad dy = 7dx$

$$\int dy = 3\int dx \qquad \int dy = 7\int dx$$

$$\Rightarrow y = 3x + c \qquad \Rightarrow y = 7x + c$$

$\therefore$ (1) కు సాధారణ సాధన $(y - 3x - c)(y - 7x - c) = 0$

4.8.2 : దత్త సమీకరణం

$6p^2 - 7p - 3 = 0$ .... (1)

$$\Rightarrow 6p^2 - 9p + 2p - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (2p - 3)(3p + 1) = 0$$

$$\Rightarrow 2p - 3 = 0, \quad 3p + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2\frac{dy}{dx} = 3 \qquad 3\frac{dy}{dx} = -1$$

రెండింటినీ సాధించగా

$$2dy = 3dx \qquad 3dy = -dx$$

సమాకలనం చేయగా సాధనలు

$$2y = 3x + c \qquad 3y = -x + c$$

$\therefore$ (1)కు సాధారణ సాధన $(2y - 3x - c)(3y + x - c) = 0$

4.8.3 : దత్త సమీకరణం

$4xp^2 = (3x - a)^2$ ------------ (1)

$$\Rightarrow p^2 = \left(\frac{3x - a}{2\sqrt{x}}\right)^2$$

$$\Rightarrow p = \pm\frac{3x - a}{2\sqrt{x}}$$

సాధించగా $dy = \pm\frac{1}{2}\left(\frac{3x-a}{\sqrt{x}}\right)dx$

$$\Rightarrow \int dy = \pm\frac{1}{2}\int\left(3x^{\frac{1}{2}} - ax^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$\Rightarrow y + c = \pm\frac{1}{2}\left(2x^{\frac{3}{2}} - 2ax^{\frac{1}{2}}\right)$$

వర్గం చేయగా $\Rightarrow (y+c)^2 = x(x-a)^2$ ఇదే (1)కు సాధారణ సాధన

4.8.4 : దత్త సమీకరణం

$$y^2 - xyp - x^2p^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2p^2 + xyp - y^2 = 0$$

ఇది Pలో వర్గ సమీకరణం

$$\therefore p = \frac{-xy \pm \sqrt{x^2y^2 + 4x^2y^2}}{2x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-xy\left(1 \pm \sqrt{5}\right)}{2x^2}$$

చలరాశులు విభజించి సమాకలనం చేయగా

$$2\int\frac{dy}{y} = -\left(1 \pm \sqrt{5}\right)\int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow 2\log y + \left(1 \pm \sqrt{5}\right)\log x = \log c$$

$$\Rightarrow \log y^2 x^{\left(1+\sqrt{5}\right)} = \log c$$

$$\Rightarrow y^2 x^{\left(1\pm\sqrt{5}\right)} = c$$

$\therefore$ దత్త సమీకరణ సాధారణ సాధన $\left(y^2 x^{1+\sqrt{5}} - c\right)\left(y^2 x^{1-\sqrt{5}} - c\right) = 0$

4.8.5 : దత్త సమీకరణం

$$x^2p^2 + xyp - 6y^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2p^2 + 3xyp - 2xyp - 6y^2 = 0$$

$$\Rightarrow xp(xp+3y) - 2y(xp+3y) = 0$$

$$\Rightarrow (xp+3y)(xp-2y) = 0$$

$$\Rightarrow x\frac{dy}{dx} + 3y = 0 \qquad : \qquad x\frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

పై సమీకరణాన్ని చలరాశులను విభజించి సమాకలనం చేయగా

$$\int \frac{dy}{y} + 3\int \frac{dx}{x} = \int 0 \qquad \int \frac{dy}{y} - 2\int \frac{dx}{x} = \int 0$$

$$\Rightarrow \log y + 3\log x = \log c \qquad \log y - 2\log x = \log c$$

$$yx^3 = c \qquad y/x^2 = c$$

$\therefore$ దత్త సమీకరణం సాధారణ సాధన $\left(x^3y - c\right)\left(y - cx^2\right) = 0$

4.8.6 : దత్త సమీకరణం

$$yp^2 - p - xyp + x = 0 \text{ ---------- (1)}$$

$$\Rightarrow p(yp-1) - x(yp-1) = 0$$

$$\Rightarrow (yp-1)(p-x) = 0$$

$$\Rightarrow yp - 1 = 0 \qquad p - x = 0$$

$$\Rightarrow y\frac{dy}{dx} = 1 \qquad \frac{dy}{dx} = x$$

చలరాశుల విభజన ద్వారా పై సమీకరణాలు సాధించగా

$$\int ydy = \int dx \qquad \int dy = \int x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = x + c \qquad\qquad y = \frac{x^2}{2} + c$$

$\therefore$ (1)కు సాధారణ సాధన $\left(y^2 - 2x - 2c\right)\left(2y - x^2 - 2c\right) = 0$

4.8.7 : దత్త సమీకరణం

$y = x + xp + p^2$ **--------- (1)**

ఇది y కోసం సాధించగల సమీకరణం

x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = 1 + p + x\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow (x + 2p)\frac{dp}{dx} + 1 = 0$$

$\frac{dx}{dp}$ తో గుణించగా $\frac{dx}{dp} + x = -2p \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

ఇది x లో సరళ సమీకరణం

సమాకలన గుణకం $e^{\int dp} = e^p$

సాధన

$$xe^p = -2\int pe^p dp$$

$$\Rightarrow e^p\left(x + 2p - 2\right) = c \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$\therefore$ (1), (3) కలసి (1)కు సాధారణ సాధన అవుతాయి.

4.8.8 : దత్త సమీకరణం

$y = p\cos p - \sin p$ **--------- (1)**

x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dx}\cos p - p\sin p\frac{dp}{dx} - \cos p\frac{dp}{dx}$$

$\Rightarrow dx = -\sin p\, dp$

$\Rightarrow \int dx = -\int \sin p\, dp$

$\Rightarrow x = \cos p + c \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

$\therefore$ **(1), (2)** కలసి **(1)**కు సాధారణ సాధన అవుతాయి.

4.8.9 : దత్త సమీకరణం

$$y = px + \sqrt{1+p^2}$$

ఇది క్లేరో సమీకరణం

$\therefore$ సాధారణ సాధన $y = cx + \sqrt{1+c^2}$

4.8.10 : దత్త సమీకరణం

$$\sin(y - px) = p$$

$\Rightarrow y - px = \sin^{-1} p$

$\Rightarrow y = px + \sin^{-1} p$

ఇది క్లేరో సమీకరణం

$\therefore$ సాధారణ సాధన $y = cx + \sin^{-1} c$ i.e. $\sin(y - cx) = c$

4.8.11 : దత్త సమీకరణం

$$y^2 - 2pxy + p^2x^2 - p^2 = a^2$$

$\Rightarrow (y - px)^2 = a^2 + p^2$

$\Rightarrow (y - px) = \pm\sqrt{a^2 + p^2}$

$\Rightarrow y = px \pm \sqrt{a^2 + p^2}$

ఇది క్లేరో సమీకరణం

$\therefore$ సాధారణ సాధన $y = cx \pm \sqrt{a^2 + c^2}$

4.9 సంగ్రహం:

ఈ పాఠంలో మనం ప్రథమ పరిమాణ ఏకాధిక ఘాత అవకలన సమీకరణాలు వాటికి సంబందించిన సమస్యలు గూర్చి చర్చించాం.

4.10 సాంకేతిక పదాలు:

p కోసం సాధించగల సమీకరణాలు, y కోసం సాధించగల సమీకరణాలు, x కోసం సాధించగల సమీకరణాలు, క్లేరో రూపం.

4.11 అభ్యాసం:

ఈ క్రింది వాటిని సాధించండి.

1. $p^2x^2 = y^2$
2. $6p^2 + 11p - 10 = 0$
3. $p^2 + 4px - 5x^2 = 0$
4. $x^2p^2 + 3xyp + 2y^2 = 0$
5. $yp^2 + (x - y)p - x = 0$
6. $4y^2p^2 + 2pxy(3x + 1) + 3x^3 = 0$
7. $p^2 + x^3y - x^3p - yp = 0$
8. $p^2 - (x + y)p + xy = 0$
9. $xyp^2 - (x^2 - y^2)p - xy = 0$
10. $(x + 2y)p^3 + 3(x + y)p^2 + (y + 2x)p = 0$
11. $xyp^2 + p(3x^2 - 2y^2) - 6xy = 0$
12. $x^2p^2 - 2xyp + 2y^2 - x^2 = 0$
13. $2xp^3 - 6yp^2 + x^4 = 0$

14. $x^3p^2 + x^2yp + 4 = 0$

15. $x - yp = ap^2$

16. $y = 3xp + 4p^3$

17. $y - 2px = \mathrm{Tan}^{-1}\left(xp^2\right)$

18. $y = 2px - xp^2$

19. $y = 2px + p^3$

20. $y = x + p^2$

21. $y^2 \log y = xpy + p^2$

22. $2px = 2\mathrm{Tan}y + p^3 \cos^2 y$

23. $p^2 - 2xp + 1 = 0$

24. $\sin px \cos y = \cos px \sin y + p$

25. $x^2(y - px) = yp^2 \quad \left(\text{put } x^2 = X,\ y^2 = Y\right)$

26. $y = 2px + y^2p^3 \quad \left(\text{put } x = X,\ y^2 = Y\right)$

27. $xy(y - px) = x + yp \quad \left(\text{put } x^2 = X,\ y^2 = Y\right)$

అభ్యాసానికి సమాధానాలు.

1. $(y - cx)(xy - c) = 0$ (c యాదృచ్ఛిక స్థిరరాశి)
2. $(3y - 2x - 3c)(2y + 5x - 2c) = 0$
3. $\left(2y + 5x^2 - 2c\right)\left(2y - x^2 - 2c\right) = 0$
4. $(xy - c)\left(x^2y - c\right) = 0$
5. $(y - x - c)\left(x^2 + y^2 - c\right) = 0$
6. $\left(y^2 + x^3 - c\right)\left(2y^2 + x^2 - c\right) = 0$
7. $\left(y - ce^x\right)\left(y - ce^{-x} + x - 1\right) = 0$

8. $\left(2y - x^2 - 2c\right)\left(y - ce^x\right) = 0$

9. $(xy - c)\left(y^2 - x^2 - 2c\right) = 0$

10. $(y - c)(x + y - c)\left(xy + x^2 + y^2 - c\right) = 0$

11. $\left(y - cx^2\right)\left(y^2 + 3x^2 - c\right) = 0$

12. $\left[\arcsin\left(\frac{y}{x}\right) - \log cx\right]\left[\arcsin\left(\frac{y}{x}\right) + \log cx\right] = 0$

13. $6c^2y - 2c^3x^3 - 1 = 0$

14. $c^2 + cxy + 4x = 0$

15. $x - yp - ap^2 = 0;\ x\sqrt{p^2 - 1} + ap\cosh^{-1}p - cp = 0$

16. $x = cp^{\frac{-3}{2}} - \frac{12}{7}p^2;\ y = cp^{-\frac{1}{2}} - \frac{8}{7}p^3$

17. $y = 2\sqrt{cx} + \mathrm{Tan}^{-1}c$

18. $(y + c)^2 = 4cx$

19. $y - 2px - p^3 = 0;\ 4xp^2 + 3p^4 - c = 0$

20. $x = 2p + \log(p - 1) - c;\ y = p^2 + 2p + 2\log(p - 1) - c$

21. $\log y = cx + c^2$

22. $2cx = 2\sin y + c^2$

23. $y = \frac{p^2}{4} - \frac{\log p}{2} + c;\ p^2 - 2xp + 1 = 0$

24. $y = cx - \sin^{-1}c$

25. $y^2 = cx^2 + c^2$

26. $y^2 = 2cx + c^3$

27. $y^2 = cx^2 + c + 1$

4.13 మాదిరి ప్రశ్నలు:

ఈ క్రింది వాటిని సాధించండి.

1. $xp^2 = (x-a)^2$
2. $p^2 - 7p + 10 = 0$
3. $(p - xy)(p - x^2)(p - y^2) = 0$
4. $y = 2xp + x^2 p^4$
5. $y = a\sqrt{1+p^2}$
6. $y = 2px - p^2$
7. $x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = a$
8. $x = y + a \log p$
9. $x = 4p + 4p^3$
10. $y = px + \frac{a}{p}$
11. $y = (x-a)p - p^2$
12. $y - x\frac{dy}{dx} = e^{\frac{dy}{dx}}$
13. $x = 2p^3 + \frac{y}{p}$
14. $p = \log(px - y)$
15. $p = \text{Tan}(px - y)$

4.14 సంప్రదించవలసిన పుస్తకాలు:

1. Vol-I - Deepthi Publications (A Text Book of Mathematics)
2. Vol-I - S.Chand (Text Book of Mathematics)
3. Differential Equations by N.Ch.S.N. Iyengar

పాఠ్య రచయిత

Sri. P.S. Chakravarthy

పాఠము - 5

ఏకాధిక పరిమాణ స్థిర గుణకము గల సరళ అవకలన సమీకరణములు

5.1 పాఠ్య లక్ష్యం:

ఇంతకు ముందు పాఠములలో ప్రథమ పరిమాణ మరియు ప్రథమ తరగతి సరళ అవకలన సమీకరణములను సాధించుటను నేర్చుకున్నాము. ఈ పాఠములో స్థిర గుణకాలున్న ఏకాధిక పరిమాణ సరళ వకలన సమీకరణములను సాధించుటను నేర్చుకుంటాము. ఈ సమీకరణములు భౌతిక శాస్త్రము మరియు ఇంజనీరింగ్ వంటి శాస్త్రముల అధ్యయనములో ఎక్కువగా వాడతారు.

5.2 పాఠ్య నిర్మాణం:

ఈ పాఠములో ఈ క్రింది అంశములు పొందు పరచబడినవి.

5.3 ఉపోద్ఘాతము:

సామాన్య అవకలన సమీకరణములను రెండు పెద్ద తరగతులుగా విభజించిన అవి సరళ సమీకరణములు మరియు అసరళ సమీకరణములు. సాధారణముగా అసరళ సమీకరణములు సాధించుట కష్టము. సరళ సమీకరణములు సాధనలు వాటి

నుపయోగించే వీలుగా సాధారణ ధర్మాలను కలిగి ఉంటాయి. ముఖ్యమైన అన్ని సరళ సమీకరణములను సాధించుటకు ప్రామాణిక పద్ధతులు ఉన్నవి. రెండవ పరిమాణ సరళ అవకలన సమీకరణములను యాంత్రిక శాస్త్రము మరియు విద్యుత్ వలయ సిద్ధాంతములలో ఉపయోగిస్తారు.

5.4 సరళ అవకలన సమీకరణములు:

5.4.1 సరళ (లేక ఋజు లేక ఏక ఘాతీయ) అవకలన సమీకరణము:-

$a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n$ వాస్తవ సంఖ్యలు, $a_0 \neq 0$, అంతరము I లో $Q(x)$ అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయమైనప్పుడు

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots\cdots + a_n y = Q(x)$$ ను

n - వ పరిమాణం గల స్థిర గుణక సరళ (లేక ఋజు లేక ఏకఘాతీయ) సమీకరణం అంటారు. $a_0 = 1$ అనుకొనడం వల్ల సార్వత్రికతకు లోపం రాదు. కనుక సాధారణ సరళ అవకలన సమీకరణము ఈ క్రింది రూపములో ఉండును.

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots\cdots + a_n y = Q(x) \text{ ----------- (1)}$$

(1)లో $Q(x) = 0$ అయినప్పుడు వచ్చు సమీకరణము

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots\cdots + a_n y = 0 \text{ --------------- (2)}$$ ను

శూన్య సమానక అవకలన సమీకరణంఅంటారు. (1)వ సమీకరణమును అశూన్య సమానక అవకలన సమీకరణం అంటాం.

5.4.2 అవకలన పరిక్రియ:-

$$D = \frac{d}{dx}$$ అనుకుంటే

$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \cdots\cdots, \frac{d^n y}{dx^n}$ లు వరుసగా $Dy, D^2 y, \cdots\cdots, D^n y, \cdots$ గా వ్రాయవచ్చును.

s మరియు t లు అవకలనీయ ప్రమేయాలు మరియు c స్థిర సంఖ్య అయితే

$$D(s+t) = Ds + Dt$$

$$D(cs) = cDs$$

అవుతాయి. కావున (1)వ సమీకరణమును ఈ క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును.

$$\left(D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \cdots\cdots + a_n\right) y = Q.$$

ఇప్పటి వరకు వివిధ రచయితలు (2)వ సమీకరణాన్ని సమఘాతీయ సరళ అవకలన సమీకరణమని అంటారు. ఈ విధమైన నిర్వచనంలో ఘాంతాకాల ప్రసక్తి లేకపోయినప్పటికి నామకరణంలో "సమఘాత" అనే పదాన్ని వాడడం సందర్భానికి తగినట్లుగా లేదని ఇక్కడ మనము "శూన్య సమానక" అనే పదాన్ని వాడడం జరిగింది.

L ఒక పరిక్రియ $L = D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_n$ అయితే సమీకరణములను $L(y) = Q$ గా వ్రాయవచ్చును.

ఇచ్చట L ను సరళ అవకలన పరిక్రియ అంటారు. ఒక సరళ అవకలన పరిక్రియ ఈ క్రింది ధర్మాలను పాటిస్తుంది.

c స్థిర సంఖ్య మరియు y_1, y_2 లు x లో ప్రమేయాలు అయితే

(i) $L(cy) = cL(y)$

(ii) $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$

5.5 శూన్య సమానక సరళ అవకలన సమీకరణాల సాధన:

ఇప్పుడు శూన్య సమానక అవకలన సమీకరణము యొక్క సాధనల యొక్క స్వభావమును చర్చిస్తాము.

5.5.1 సిద్ధాంతము: $L[y] = 0,$ సమీకరణానికి y_1 మరియు y_2 లు సాధనకై c స్థిర సంఖ్య అయితే $y_1 + y_2$ మరియు cy_1 లు సాధనలు.

ఉపపత్తి: దత్తాంశము ప్రకారము $L[y_1] = 0$ మరియు $L[y_2] = 0$ మనము $L[\gamma_1 + \gamma_2] = 0$ మరియు $L(cy_1) = 0$ అని నిరూపించితే సరిపోతుంది.

5.4.2 లోని (i), (ii) సరళ అవకలనీయ పరిక్రియ ధర్మాలను బట్టి

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] = 0 + 0 = 0$$

మరియు $L[cy_1] = cL[y_1] = c \cdot 0 = 0$

5.5.2 సరళ సంయోగము: $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n$ లు x లో ప్రమేయాలు మరియు $c_1, c_2, \cdots\cdots, c_n$ లు స్థిర సంఖ్యలు అయితే

$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots\cdots + c_n\, y_n$ ను

$y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, y_n$ ల ఋజు సంయోగము అంటాము.

5.5.1 సిద్ధాంతము నుండి ఈ క్రింది ఉప సిద్ధాంతమును రాయవచ్చును.

5.5.3 ఉప సిద్ధాంతము: $y_1, y_2, \cdots, y_n$ లు $L[y]=0$కు సాధనలు అయితే $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ల యొక్క సరళ సంయోగము $\sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ కూడా $L[y]=0$కు సాధన.

5.5.4 సూచన : సిద్ధాంతము 5.5.1 శూన్య సమానక సరళ అవకలనీయ సమీకరణాలకు మాత్రమే వర్తిస్తుంది. కాని అశూన్య సమానక అవకలన సమీకరణాలకు వర్తించదు. ఈ క్రింది ఉదాహరణలను గమనించండి.

(i) $y=1+\sin x$ మరియు $y=1+\cos x$ లు అశూన్య సమానక అవకలన సమీకరణము $y''+y=1$కు సాధనలు కాని $2(1+\cos x)$ మరియు $(1+\cos x)+(1+\sin x)$ లు $y''+y=1$ అవకలన సమీకరణమునకు సాధనలు కావు.

(ii) $y=x^2$ మరియు $y=1$ లు .... $y''y-xy'=0$ కు

సాధనలు అయితే $-x^2$ మరియు x^2+1 లు మాత్రము పై సమీకరణమునకు సాధనలు కావు.

$L[y]=0$ యొక్క సాధారణ సాధన కనుగొనుటకు ఈ క్రింది భావనలు ముందుగా తెలుసుకోవాలి.

5.5.5 నిర్వచనము: అంతరము I పై $c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n=0$ అయ్యేటట్లుగా $c_1, c_2, \cdots, c_n$ స్థిరాంకాలు (కనీసం ఒకటి సున్నా కాకుండా) వ్యవస్థితమైతే $y_1(x), y_2(x)\cdots, y_n(x)$ ప్రమేయాలను అంతరము I పై ఋజు ఆశ్రితములు అంటారు.

5.5.6 నిర్వచనము: అంతరము I పై ప్రమేయములు $y_1, y_2, \ldots, y_n$ లకు $c_1y_1+c_2y_2+\ldots+c_ny_n=0$, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ లు స్థిరాంకాలు అయినప్పుడు $c_1=c_2=\ldots=c_n=0$ అయితే $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ప్రమేయాలను ఋజు స్వతంత్రములు అంటారు.

5.5.7 నిర్వచనము: అంతరము I పై వాస్తవ ప్రమేయములు $y_1, y_2, \ldots, y_n$ లకు $(n-1)$ పరిమాణము ఉన్నట్లయితే

$$w(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$ గా నిర్వచించిన ప్రమేయమును

ఇచ్చిన ప్రేషమయముల యొక్క రాన్స్కియన్ అంటారు.

ఈ క్రింది ప్రవచింపబడిన సిద్ధాంతములు 5.5.9, 5.5.10 స్థిర గుణకాలు ఉన్న అవకలన సమీకరణములకు వర్తిస్తాయి. ఇక్కడ స్థిరాంకమును స్థిర ప్రమేయముగా భావిస్తాము మరియు స్థిర ప్రమేయము అవిచ్ఛిన్నము.

5.5.8 సిద్ధాంతము: $[a,b]$ అంతరము పై $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$ ప్రమేయములు ఋజు ఆశ్రితములు కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము ఆ అంతరము పై రాన్ స్కియన్ విలువ సున్న కావడం.

5.5.9 సిద్ధాంతము: $[a,b]$ అంతరము పై అవిచ్ఛిన్న గుణకములు $P_i(x)$ లతో ఉన్న శూన్య సమానక సమీకరణము

$$L[y] \equiv \left[D^n + P_1(x)D^{n-1} + \cdots\cdots + P_{n-1}^{(x)}D + P_n(x)\right]y = 0$$

నకు n సాధనలు $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n$ లని అనుకొనుము. అయితే $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n$ లు ఋజు స్వతంత్రములు కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $[a,b]$ అంతరము పై ఏ బిందువు వద్దనైనా రాన్ స్కియన్

$$w(y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots\cdots\cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots\cdots\cdots & y_n' \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots\cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$ శూన్యేతరము కావడం.

5.5.10 సిద్ధాంతము: $[a,b]$ అంతరము పై అవిచ్ఛిన్న గుణకములు, $P_i(x)$ లతో ఉన్న శూన్య సమానక సరళ సమీకరణము

$$L[y] \equiv \left[D^n + P_1(x)D^{n-1} + P_2(x)D^{n-2} + \cdots\cdots + P_{n-1}(x)D + P_n(x)\right]y = 0 \text{ ---------- (1)}$$ నకు

$y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n$ లు ఋజు స్వతంత్ర సాధనలు అయితే $[a,b]$ పై (1) యొక్క సాధారణ సాధన

$$y = c_1 y + c_2 y_2 + \cdots\cdots + c_n y_n = \sum_{i=1}^{n} c_i\, y_i\,,\; c_1, c_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, c_n$$ లు యాదృచ్ఛిక స్థిరాంకములు ---- (2) అగును.

యాదృచ్ఛిక స్థిరాంకముల ఎంపిక ద్వారా (1) యొక్క ప్రతి సాధనను (2) నుండి పొందవచ్చును.

5.5.11 సాధారణ సాధన: పై సిద్ధాంతముల దృష్ట్యా శూన్య సమానక సరళ అవకలన సమీకరణము $L(y) = 0$ కు n ఋజు స్వతంత్ర సాధనలు $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n$ లు అయితే శూన్య సమానక సరళ అవకలన సమీకరణము $L[y] = 0$ యొక్క అన్ని సాధనలు యాదృచ్ఛిక స్థిరాంకములు $c_1, c_2, \cdots\cdots, c_n$ లకు $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots\cdots + c_n y_n$ గా ఇవ్వబడినది.

కావున $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots\cdots + c_n y_n$ అనునది సాధారణ సాధన.

గమనిక: ఈ సాధన $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots\cdots + c_n y_n$ ను అవకలన సమీకరణము $L(y) = Q(x)$ యొక్క పూరక ప్రమేయము $(C.F.)$ అంటారు. పూరక ప్రమేయమును ముందు రాబోయే సమస్యలలో $C.F.$ గా సూచిస్తాము. ఇంకా పూరక ప్రమేయము $L(y) = 0$ యొక్క సాధారణ సాధన అని గమనించండి.

5.5.12 సహాయక సమీకరణము: శూన్య సమానక సరళ అవకలన సమీకరణము

$$L[y] \equiv \left(D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \cdots\cdots + a_n\right) y = 0 \text{ ----------- (1)}$$ తీసుకొనుము.

(1) యొక్క సాధన కొరకు $y = e^{mx}$ ప్రమేయమును తీసుకొనగా

$$Dy = me^{mx},\ D^2 y = m^2 e^{mx}, \cdots\cdots, D^n y = m^n e^{mx}$$

ఈ విలువలను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$e^{mx}\left(m^n + a_1 m^{n-1} + a_2 m^{n-a} + \cdots\cdots + a_n\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow m^n + a_1 m^{n-1} + a_2 n_1^{n-2} + \cdots\cdots + a_n = 0 \text{ ------------- (2)} \quad \left(\because e^{mx} \neq 0\right)$$

(1) యొక్క సాధన $y = e^{mx}$ కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము సమీకరణము (2)ను m తృప్తి పరచవలెను.

అవకలన సమీకరణము (1)కి సమీకరణము (2)ను సహాయక సమీకరణము అంటారు.

$f(D) = \left(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots\cdots + a_n\right)$ అయినపుడు $f(D)y = 0$ అనే అవకలన సమీకరణము యొక్క సహాయక సమీకరణము $f(m) = 0$ అవుతుంది.

i.e. $m^n + a_1 m^{n-1} + a_2 m^{n-2} + \cdots\cdots + a_n = 0$ దీనిని A.E. అని వ్రాస్తాము.

5.5.13 సిద్ధాంతము: స్థిర గుణకాలున్న శూన్య సమానక సరళ అవకల సమీకరణము

$L[y] \equiv \left(D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \cdots\cdots + a_n\right) y = 0$ యొక్క సహాయక సమీకరణానికి ఒక మూలము α అయియితే అవకలన సమీకరణము $L(y) = 0$కు $e^{\alpha x}$ సాధన అవుతుంది.

ఉపపత్తి: $L(y) = 0$ యొక్క సహాయక సమీకరణము $f(m) = 0$ అనుకొనుము.

$K > 0$ అయితే $\dfrac{d}{dx^k}\left(e^{\alpha x}\right) = \alpha^k e^{\alpha x}$

$$L\left(e^{\alpha x}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k \left(e^{\alpha x}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k e^{\alpha x} = f(\alpha) e^{\alpha x}$$

$$\therefore L\left(e^{\alpha x}\right) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = 0$$

5.5.14 సిద్ధాంతము: అవకలన సమీకరణము $L(y) = 0$ యొక్క సహాయక సమీకరణములోని గుణకములు వాస్తవములయి మరియు $a, b \in R$ కు $\alpha = a + ib$ అనునది సహాయక సమీకరణము యొక్క మూలము అయితే $L[y] = 0$ యొక్క సాధనలు, $e^{ax}\sin bx,\ e^{ax}\cos bx$ లు అవుతాయి.

ఉపపత్తి: అవకలన సమీకరణము $L[y]=0$ యొక్క సహాయక సమీకరణము $f(m)=0$ అనుకొనుము.

$f(m)=0$ యొక్క గుణకములు వాస్తవములు, $f(m)=0$ యొక్క మూలము α కనుక

$f(m)=0$ కు $\overline{\alpha}$ మూలము అవుతుంది.

పై సిద్ధాంతము 5.5.13 ప్రకారము $e^{\alpha x}, e^{\overline{\alpha}x}$ లు అవకలన సమీకరణము $L[y]=0$కు సాధనలు.

సిద్ధాంతము 5.5.14 ప్రకారము $e^{ax}\cos bx = \dfrac{e^{\alpha x}+e^{\bar{\alpha}x}}{2}, e^{\alpha x}\sin bx = \dfrac{e^{\alpha x}-e^{\bar{\alpha}x}}{2}$ లు $L[y]=0$ యొక్క సాధనలు.

5.5.15 నిర్వచనము: $f(m)=0$ సమీకరణమునకు మూలము α మరియు n సార్లు α పునరావృతమైతే n ను α యొక్క బాహుళ్యత అంటారు.

5.5.16 సిద్ధాంతము: సరళ అవకలన సమీకరణం $L[y]=0$ యొక్క సహాయక సమీకరణానికి విభిన్న మూలములు $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ అవుతూ α_i యొక్క బాహూళ్యత m_i అయితే

$$e^{\alpha_1 x}, xe^{\alpha_1 x}, \ldots, x^{m_1-1}e^{\alpha_1 x}\ ;\ e^{\alpha_2 x}, xe^{\alpha_2 x}, \ldots, x^{m_2-1}e^{\alpha_2 x}\ ;\ e^{\alpha_k x}, xe^{\alpha_k k}, \ldots, x^{m_k-1}e^{\alpha_k x}$$

లు అవకలన సమీకరణము $L(y)=0$కు ఋజు స్వాతంత్ర్య సాధనలు అవుతాయి.

$L(y)=0$కు n ఋజు స్వతంత్ర సాధనల సమితిని ఈ క్రింది విధముగా పొందుతాము.

(a) సహాయక సమీకరణము $f(m)=0$ యొక్క r బాహుళ్యత కలిగిన ప్రతి వాస్తవ మూలమునకు $e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, \cdots, x^{r-1}e^{\alpha x}$ ప్రమేయాలను చేరుస్తాము.

(b) r బాహుళ్యత కలిగిన ప్రతి సంకీర్ణ మూలము $\alpha = a+ib$ నకు

$$e^{ax}\cos bx, xe^{ax}\cos bx, \ldots, x^{r-1}e^{ax}\cos bx, e^{ax}\sin bx, xe^{ax}\sin bx, \ldots, x^{r-1}e^{ax}\sin bx$$

లను చేరుస్తాము.

5.6 పూరక ప్రమేయమును కనుగొనుటకు సూత్రములు:

$a_1, a_2, \cdots a_n$ లు స్థిరాఙ్కాలు అయిన అవకలన సమీకరణము

$(D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_n)y = 0$ ను సాధించుట.

$f(D) = D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_n$ అయితే ఈ సమీకరణమును $f(D)y=0$ అని వ్రాస్తాము.

పై అవకలన సమీకరణము యొక్క సహాయక సమీకరణము (A.E.) $f(m)=0$

$m^n + a_1 m^{n-1} + a_2 m^{n-2} + \cdots + a_n = 0$

$m_1, m_2, m_3, \cdots, m_n$ లు దాని మూలములు అనుకొందాము.

ఈ క్రింది సందర్భములలో మూలముల స్వభావాన్ని చర్చించుదాము.

5.7 Case (i) సహాయక సమీకరణమునకు వాస్తవ మరియు విభిన్న మూలాలు ఉన్నప్పుడు:

$f(D)y=0$ యొక్క A.E.; $f(m)=0$ అవుతుంది.

$m_1, m_2, \cdots, m_n$ లు n వాస్తవ మరియు విభిన్న మూలములు అనుకొనుము.

సిద్ధాంతము 5.5.16 ప్రకారము $f(D)y=0$ యొక్క సాధారణ సాధన

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_x e^{m_2 x} + \cdots + c_n e^{m_n x}$$

5.7.1 ఉదాహరణ: $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 6\dfrac{d^2y}{dx^2} + 11\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$ సాధించుము.

సాధన: ఇచ్చిన సమీకరణము $\left(D^3 + 6D^2 + 11D + 6\right)y = 0$

A.E. $m^3 + 6m^2 + 11m + 6 = 0 \Rightarrow (m+1)(m+2)(m+3) = 0$

$\Rightarrow m = -1, -2, -3$

సాధారణ సాధన $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{-3x}$

5.7.2 S.A.Q. : $\left(D^2 - 5D + 4\right)y = 0$ యొక్క సాధన కనుగొనుము.

5.7.3 ఉదాహరణ: $x=0$ అయినపుడు $y=0$ మరియు $\dfrac{dy}{dx}=0$ తో $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$ సాధించుము.

సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణము $\left(D^2 - 3D + 2\right)y = 0$

A.E. $m^2 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow (m-1)(m-2) = 0 \Rightarrow m = 1, 2$

సాధారణ సాధన $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$ ---------- (1)

$x=0$ అయినపుడు సమీకరణము (1) నుండి

$0=c_1+c_2$ ------- (2)

(1) నుండి $\dfrac{dy}{dx}=c_1e^x+2c_2e^{2x}$

$x=0$ అయినపుడు

$\dfrac{dy}{dx}=0$ ను ఉపయోగిస్తే $0=c_1+2c_2$ ------------ (3)

(2) మరియు (3)లను సాధించగా $c_1=c_2=0$

(1)యొక్క సాధన $y=0$.

5.7.2 ఉదాహరణ: $\left(D^4-2D^3-13D^2+38D-24\right)y=0$ సాధించుము.

సాధన: A.E. $m^4-2m^3-13m^2+38m-24=0$

$$\Rightarrow (m-1)(m-2)(m-3)(m+4)=0$$

$$\Rightarrow m=1,2,3,-4$$

సాధారణ సాధన $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3e^{3x}+c_4e^{-4x}$

5.8 Case (ii) సహాయక సమీకరణము యొక్క అన్ని మూలములు వాస్తవములు మరియు కొన్ని మూలములు పునరావృతమైనపుడు:

(1) $f(m)=0$ నకు రెండు సమాన మూలములు $m_1=m_2=m$ (అనుకొనుము) మరియు మిగిలిన మూలములు $m_3, m_4, \cdots, m_n$ లు విభిన్నములు అనుకొనుము. $f(D)y=0$ యొక్క సాధారణ సాధన.

$$y=(c_1+c_2x)e^{mx}+c_3e^{m_3x}+c_4e^{m_4x}+\cdots+c_ne^{m_nx}$$

(2) $f(m)=0$ నకు k మూలములు సమానము $m_1=m_2=\ldots\ldots\ldots\ldots m_k=\alpha$ (అనుకొనుము) మరియు మిగిలిన మూలములు $m_{k=1}, m_{k=2}, \ldots\ldots\ldots, m_n$ లు విభిన్నములు అనుకొనుము. $f(D)y=0$ యొక్క

సాధారణ సాధన $y=\left(c_1+c_2x+c_3x^2+\cdots+c_kx^{k-1}\right)^{e^{\alpha x}}+c_{k+1}e^{m_{k+1}x}+\cdots+c_ne^{m_nx}$

(3) α_i యొక్క బాహుళ్యత $=\sum m_i=n$ తో $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ లు $f(m)=0$ యొక్క విభిన్న మూలములు అయితే $f(D)y=0$ యొక్క సాధారణ సాధన

$$y=\left(c_1+c_2x+c_3x^2+\cdots+c_{m_1}\ x^{m_1-1}\right)e^{\alpha_1 x}+\left(c_{m_1+1}+c_{m_{1+2}}x+\cdots+c_{m_2}x^{m_2-1}\right)e^{\alpha_2 x}+\cdots$$

$$+\left(c_{m_{k-1}+1}+c_{m_{k-1+2}}x+\cdots+c_{m_k}x^{m_k-1}\right)e^{\alpha_k x}$$

5.8.1 ఉదాహరణ : $\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{dy}{dx}+2y=0$ సాధించుము.

సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణమును $\left(D^3-3D+2\right)y=0$ గా వ్రాయవచ్చును.

$$\Rightarrow \text{ A.E. } m^3-3m+2=0 \Rightarrow m=1,1,-2$$

సాధారణ సాధన $y=(c_1+c_2x)e^x+c_3e^{-2x}$

5.8.2 S.A.Q. : $\left(D^2-2D+1\right)y=0$ యొక్క పూరక ప్రమేయమును కనుగొనుము.

సాధన: ఇచ్చిన సమీకరణము $f(D)y=\left(D^2-2D+1\right)y=0$

$$\Rightarrow \text{A.E. } m^2-2m+1=0 \Rightarrow m=1,1$$

$\therefore$ పూరక ప్రమేయము లేదా సాధారణ సాధన $y=(c_1+c_2x)e^x$

5.8.3 ఉదాహరన : $16\frac{d^2y}{dx^2}+24\frac{dy}{dx}+9y=0$ సాధించుము.

సాధన: ఇచ్చిన సమీకరణమును $\left(16D^2+24D+9\right)y=0$ గా వ్రాయవచ్చును.

$$\Rightarrow \text{A.E. } 16m^2+24m+9=0 \Rightarrow (4m+3)^2=0$$

$$\Rightarrow m=\frac{-3}{4},\ \frac{-3}{4}$$

సాధారణ సాధన $y=(c_1+c_2x)e^{-3/4\,x}$

5.9 Case (iii):

సహాయక సమీకరణములో ఒక జత మూలములు కల్పితములు i.e. $m_1 = \alpha + i\beta$ మరియు $m_2 = \alpha - i\beta$, అయితే $\alpha + i\beta$ మూలమునకు సంబంధించు పూరక ప్రమేయములోని భాగము $e^{\alpha x}\left(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x\right)$. ఏదైనా వాస్తవ మూలము పునరావృతమైతే ఈ వాస్తవ మూలము కొరకు $\text{case}(ii)$లో విధముగా ప్రమేయములను చేర్చవలెను.

5.9.1 ఉదాహరణ: $2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$ సాధించుము.

సాధన: ఇచ్చిన సమీకరణము $\left(2D^2 - 5D + 4\right)y = 0$

$$\therefore \text{ A.E. } \quad 2m^2 - 5m + 4 = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{5 \pm i\sqrt{7}}{4}$$

సాధారణ సాధన $y = e^{\frac{5}{4}x}\left[c_1 \cos\frac{\sqrt{7}}{4}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{7}}{4}x\right]$

c_1 మరియు c_2 లు స్థిరాంకములు.

5.9.2 ఉదాహరణ: $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 10y = 0$ సాధించుము.

సాధన: ఇచ్చిన సమీకరణమును $\left(D^2 - 2D + 10\right)y = 0$గా వ్రాయవచ్చును.

$$\therefore \text{ A.E. } \quad m^2 - 2m + 10 = 0 \Rightarrow m = 1 \pm i3$$

సాధారణ సాధన $y = e^{x}\left[c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x\right]$

c_1, c_2 లు స్థిరాంకములు

5.10 Case (iv):

సహాయక సమీకరణములో రెండు జతల సంకీర్ణ మూలములు ఉంటే i.e. $m_1 = m_2 = \alpha + i\beta$, i.e. $m_1 = m_2 = \alpha + i\beta$, $m_3 = m_4 = \alpha - i\beta$ అయితే $\alpha + i\beta$ కు సంబంధించిన పూరక ప్రమేయములో భాగము

$$e^{\alpha x}\left[(c_1+c_2x)\cos\beta x+(c_3+c_4x)\sin\beta x\right]$$

c_1, c_2, c_3, c_4లు స్థిరాంకములు.

సహాయక సమీకరణములో r బాహుళ్యతతో సంకీర్ణ మూలము $m=\alpha+i\beta$ ఉన్నట్లయితే ఈ మూలమునకు సంబంధించిన పూరక ప్రమేయములోని భాగము

$$e^{\alpha x}\left[\left(c_0+c_1x+\cdots\cdots+c_{r-1}x^{r-1}\right)\cos\beta x+\left(d_0+d_1x+\cdots\cdots+d_{r-1}x^{r-1}\right)\sin\beta x\right]$$

$c_0, c_1, \cdots\cdots, c_{r-1}, d_0, d_1, \cdots\cdots, d_{r-1}$ లు యాదృచ్ఛిక స్థిరాంకములు.

5.10.1 ఉదాహరణ: $\left(D^4-4D^3+8D^2-8D+4\right)y=0$

సాధన: A.E. $m^4-4m^3+8m^2-8m+4=0$

$$\left(m^2-2m+2\right)^2=0$$

$$\Rightarrow m^2-2m+2=0,\ m^2-2m+2=0$$

$$\Rightarrow m=\frac{2\pm\sqrt{4\cdot 8}}{2},\ m=\frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}$$

$$m=1\pm i, 1\pm i$$

సంకీర్ణ మూలములు సమానము i.e. $m_1=m_2=1+i$

$$m_3=m_4=1-i$$

ఇచ్చిన సమీకరణమునకు సాధారణ సాధన

$$y=e^{x}\left[(c_1x+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x\right]$$

5.10.2 ఉదాహరణ: $\dfrac{d^4y}{dx^4}-2\dfrac{d^3y}{dx^3}+3\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+1=0$ సాధించుము.

సాధన: ఇచ్చిన సమీకరణమును $\left(D^4-2D^3+3D^2-2D+1\right)y=0$ గా వ్రాయవచ్చును.

$$\text{A.E. } m^4-2m^3+3m^2-2m+1=0\Rightarrow\left(m^2-2m+1\right)^2=0$$

$$\therefore m=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

సంకీర్ణ మూలములు సమానము

$$m_1=m_2=\frac{1+i\sqrt{3}}{2},\quad m_3=m_4=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

సాధారణ సాధన $y=e^{x/2}\left[(c_1+c_2x)\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+(c_3+c_4x)\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right]$

5.11 SAQలకు సమాధానములు:

5.7.2 S.A.Q.: A.E. $m^2 - 5m + 4 = 0 \Rightarrow m = 1, 4$

సాధారణ సాధన $y = c_1 e^x + c_2 e^{4x}$

5.8.2 S.A.Q.: A.E. $\left(m^2 - 2m + 1\right) = 0 \quad \Rightarrow (m-1)^2 = 0 \Rightarrow m = 1, 1$

సాధారణ సాధన $y = (c_1 + c_2 x) e^x$

5.12 సారాంశము:

ఈ క్రింది విధముగా $f(D)y = 0$ కు సాధారణ సాధన కనుగొనుట మరియు $f(D)y = Q$ కు పూరక ప్రమేయమును కనుగొనుట.

(i) సహాయక సమీకరణము $f(m) = 0$ గా వ్రాయుట.

(ii) సహాయక సమీకరణమును $m_1, m_2, \cdots, m_n$ మూలములు పొఇదుటకు సాధించుట.

(iii) ఈ క్రింది పట్టికనుపయోగించి మూలముల సంబంధిత పదాలను సాధారణ సాధనలో వ్రాయుట.

S.No.	మూలముల స్వభావము	C.F.లో పదాలు
1.	వాస్తవ మరియు విభిన్న మూలములు $m_1, m_2, \cdots\cdots, m_k$	$c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \cdots\cdots + c_k e^{m_k x}$
2.	అన్ని మూలములు వాస్తవములు మరియు ఒక మూలము రెండు సార్లు పునరావృతం మైతే i.e. $m_1 = m_2 = m$ అనుకొనుము.	సంబంధింత మూలమునకు C.F. లోని భాగము $(c_1 + c_2 x) e^{mx}$
3.	అన్ని మూలములు వాస్తవములు మరియు ఏదైనా ఒక మూలమునకు బాహుళ్యత r ఉంటే i.e. $m_1 = m_2 = \cdots\cdots = m_r = m$	సంబంధింత మూలమునకు C.F. లోని భాగము $\left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots\cdots + c_{r-1} x^{r-1}\right) e^{mx}$
4.	సహాయక సమీకరణములో పునరావృతము కాని సంకీర్ణమూలము $m = \alpha + i\beta$ (అనుకొనుము) ఉంటే	సంబంధింత మూలమునకు C.F. లోని భాగము $e^{\alpha x}\left(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x\right)$
5.	సహాయక సమీకరణములో ఒక సంకీర్ణ మూలము $m = \alpha + i\beta$ యొక్క బాహుళ్యత r అయితే	సంబంధింత మూలమునకు C.F. లోని భాగము $e^{\alpha x}\left[\left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots\cdots\cdot c_{r-1} x^{r-1}\right)\cos\beta x + \left(d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots\cdot + d_{r-1} x^{r-1}\right)\sin\beta x\right]$

5.13 సాంకేతిక పదములు:

శూన్య సమానక అవకలన సమీకరణము

అవకలన పరిక్రియ D

ఋజు స్వతంత్రములు

పూరక ప్రమేయము $(C.F.)$

ప్రత్యేక సమాకలని $(P.I.)$

సహాయక సమీకరణము $(A.E.)$

సంకీర్ణ సంయుగ్మము

5.14 అభ్యాసము:

ఈ క్రింది అవకలన సమీకరణములను సాధించుము.

(1) $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+y=0$

(2) $\frac{d^2y}{dx^2}-a^2y=0,\ a\neq 0$

(3) $\frac{d^3y}{dx^3}-4\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}-2y=0$

(4) $\left(D^3+6D^2+2D+8\right)y=0$

(5) $\left(D^2-7D+44\right)y=0$

(6) $\left(D^3-D^2-D-2\right)y=0$

(7) $\left(D^2-2aD+a^2+b^2\right)y=0$

(8) $\left(D^2+(a+b)D+ab\right)y=0$

(9) $\left(D^4+4D^3-5D^2-36D-36\right)y=0$

(10) $\left(D^2+D+1\right)^2y=0$

5.15 అభ్యాసమునకు సమాధానములు:

(1) $y = c_1 e^{(2+\sqrt{3})x} + c_2 e^{(2-\sqrt{3})x}$

(లేక)

$y = e^{2x}\left[c_1 \cosh\sqrt{3}x + c_2 \sinh\sqrt{3}x\right]$

(2) $y = c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax}$

(3) $y = (c_1 + c_2 x)e^{x} + c_3 e^{2x}$

(4) $y = \left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2\right)e^{-2x}$

(5) $y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{11x}$

(6) $y = c_1 e^{2x} + e^{\frac{1}{2}x}\left[c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right]$

(7) $y = e^{ax}\left[c_1 \cos bx + c_2 \sin bx\right]$

(8) $y = c_1 e^{-ax} + c_2 e^{-bx}$

(9) $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x} + (c_3 + c_1 x)e^{-2x}$

(10) $y = e^{-x/2}\left[(c_1 + c_2 x)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + (c_3 + c_4 x)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right]$

5.16 మాదిరి ప్రశ్నలు:

1. అవకలన సమీకరణము $\left(D^2 + a_1 D + a_2\right)y = 0$కు y_1 మరియు y_2లు రెండు సాధనలయితే $c_1 y_1 + c_2 y_2$ కూడా సాధన అని నిరూపించుము.
2. సహాయక సమీకరణము $(A.E.)$ $f(m) = 0$ కు α మూలము అయితే $f(D)y = 0$కు $e^{\alpha x}$ సాధన అవుతుందని చూపుము.
3. $\left(D^4 - 81\right)y = 0$ సాధించుము.

5.17 References :

1. Erwin Kroyszing, Advanced Engineering Mathematics Wiley Student Edition
2. Zafar Ahsan, Differential Equation and their application
3. Earl A. Coddington, An Introduction to ordinary Differetnial Equations, Prentice Hall of India.

Lesson Writer

Dr. B. Ramireddy

పాఠము - 6

స్థిరాంకాలు గుణకాలుగా గల అశూన్య సమానక సరళ అవకలన సమీకరణములు

6.1 పాఠ్య లక్ష్యం:

ఇంతకు ముందు ఈ పాఠములో స్థిరాంకాలు గుణకాలుగా గల శూన్య సమాన సరళ అవకలన సమీకరణములను సాధించుటను చర్చించాము. ఈ పాఠములో స్థిరాంకాలు గుణకాలుగా గల అశూన్య సమానక సరళ అవకలన సమీకరణములను సాధించుట చూద్దాము.

పాఠ్యాంశ నిర్మాణ క్రమం:

ఈ పాఠంలోని అంశాలు

6.1 **ఉపోద్ఘాతము**

6.2 **అసమఘాతీయ సరళ సమీకరణమునకు సాధారణ సాధన**

6.3 **ప్రత్యేక సమాకలని కనుగొనుటకు పద్ధతులు**

6.4 $Q(x) = e^{ax}$ **అయినపుడు పద్ధతి (1)**

6.5 $Q(x) = \cos(ax+b)$ **లేక** $\sin(ax+b)$ **అయినపుడు పద్ధతి (2)**

6.6 $Q(x) = x^m$ **అయినపుడు పద్ధతి (3)**

6.7 $Q(x) = e^{ax} \cdot V$ **అయినపుడు పద్ధతి (4)**

6.8 $Q(x) = xV$ **అయినపుడు పద్ధతి (5)**

6.9 **స్వయం మదింపు ప్రశ్నల** (Self Assessment Questions - S.A.Q.)**కు సమాధానములు**

6.10 **సారాంశం**

6.11 **సాంకేతిక పదాలు**

6.12 **అభ్యాసములు**

6.13 **అభ్యాసములకు సమాధానములు**

6.14 **మాదిరి ప్రశ్నలు**

6.15 **ప్రామాణిక గ్రంథాలు**

6.1 ఉపోద్ఘాతము:

ఈ పాఠములో మనము $f(D)y = Q(x)$ రూపంలోని అశూన్య సమానక సరళ అవకలన సమీకరణములను సాధించు పద్ధతులను తెలుసుకుందాము.

అశూన్య సమానక సరళ అవకలన సమీకరణములకు సాధారణ సాధన మరియు $Q(x) = e^{ax}$, $Q(x) = \cos(ax+b)$ లేక $\sin(ax+b)$, $Q(x) = x^m$, $Q(x) = e^{ax}V$, $Q(x) = x \cdot V$ అయినపుడు ప్రత్యేక సమాకలని కనుగొను పద్ధతులు.

6.2 స్థిరరాశులు గుణకాలుగా గల అసమఘాతీయ సరళ సమీకరణము యొక్క సాధారణ సాధన:

6.4.1 నిర్వచనము : స్థిరరాశులు గుణకాలుగా గల అశూన్య సమానక సరళ సమీకరణము యొక్క రూపము.

$$\left(D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \cdots\cdots + a_n\right) y = Q \text{ ----------- (1)}$$

ఇందులో $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ లు వాస్తవ స్థిర సంఖ్యలు మరియు $Q(x)$, అంతరము I పై స్వతంత్ర రాశు x లో అవిచ్ఛిన్న వాస్తవ ప్రమేయము.

6.4.2 సమీకరణము (1) యొక్క సాధారణ సాధన: $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ లు స్థిర సంఖ్యలు మరియు $Q(x)$ అవిచ్ఛిన్న వాస్తవ ప్రమేయముగా గల సరళ సమీకరణము

$f(D)y \equiv \left(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots\cdot + a_{n-1}D + a_n\right) y = Q(x) \not\equiv 0$ కు ఒక ప్రత్యేక సమాకలని y_P అయితే అప్పుడు $f(D)\left(y_p\right) = Q(x)$ అగును. మరియు $f(D)y = Q(x)$ కి y ఏదైనా సాధన అయితే

$$f(D)\left(y - y_p\right) = f(D)y - f(D)y_p$$

$$= Q - Q = 0$$

కావున అశూన్య సమానక సరళ సమీకరణము $f(D)y = 0$ కు $y = y_p$ సాధన. మరియు ఇది ఈ క్రింది రూపములో ఉండును.

$$y - y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots\cdots + c_n y_n$$

ఇచ్చట $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n$ లు సమీకరణము $f(D)y = 0$ కు స్వతంత్ర సాధనలు. $c_1, c_2, \cdots, c_n$ లు స్థిర సంఖ్యలు. సమీకరణము $f(D)y = Q(x)$ యొక్క ప్రతి సాధన y ను ఈ క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును.

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots\cdot + c_n y_n + y_P$$

i.e. $y = y_c + y_P$

ఇచ్చుట $y_c = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$, y_P లను సమీకరణము $f(D)y = Q(x)$ యొక్క పూరక ప్రమేయము (C.F.) మరియు y_p ప్రత్యేక సమాకలని సాధన $y = y_c + y_P$ ని స్థిర రాశులు గుణకాలుగా గల అశూన్య సమానక సమీకరణము $f(D)y = Q(x)$ యొక్క సాధారణ సాధన లేక సంపూర్ణ సాధన లేక సంపూర్ణ సమాకలని అంటారు.

గమనిక: ప్రత్యేక సమాకలని y_p లో యాదృచ్ఛిక స్థిరరాశులుండవు.

6.4.3 ప్రత్యేక సమాకలని (P.I.) కనుగొనుట

6.4.4 విలోమ పరికర్త : బహుపది పరికర్త $f(D)$ యొక్క విలోమ పరికర్తను $\frac{1}{f(D)}$ గా రాయవచ్చును. అంటే ఏదయినా అంతరము I పై స్వతంత్ర రాశి 'x' లో $Q(x)$ ప్రమేయమైతే

$$f(D)\left[\frac{1}{f(D)}Q\right] = Q = \frac{1}{f(D)}\left[f(D)(Q)\right] = Q$$

6.4.5 సిద్ధాంతము: $f(D)y = Q$ యొక్క ప్రత్యేక సమాకలని $\frac{1}{f(D)}Q$.

ఉపపత్తి: ఇచ్చిన సరళ రేఖా సమీకరణము

$$f(D)y = Q \text{ ---------- } (1)$$

$y = \frac{1}{f(D)}Q$ ను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$f(D)\left[\frac{1}{f(D)}Q\right] = Q$$

$$\Rightarrow Q = Q$$

సమీకరణము (1)కి $y = \frac{1}{f(D)}Q$ ఒక సాధన

దీనితో యాదృచ్ఛిక స్థిరరాశులు లేవు కావున $y = \frac{1}{f(D)}Q$ ని సమీకరణము $f(D)y = Q$ యొక్క ప్రత్యేక సమాకలని.

6.4.6 సిద్ధాంతము: $\frac{1}{D}Q = \int Q\,dx$

ఉపపత్తి: $\frac{1}{D}Q = y$ అనుకొనుము.

రెండు వైపులా D పరిక్రియను అనువర్తిస్తే

$$D\left[\frac{1}{D}Q\right] = Dy$$

$$\Rightarrow Q = Dy$$

$$Q = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow dy = Qdx$$

$$y = \int Qdx$$

6.4.7 సిద్ధాంతము: $(D-a)y = Q$. ఒక సరళరేఖా సమీకరణము యొక్క ప్రత్యేక సమాకలని ఈ క్రింది విధముగా వుండును.

$$\frac{1}{D-a}Q = e^{ax}\int Qe^{-ax}dx$$

ఉపపత్తి: $\frac{1}{D-a}Q = y$ అనుకొనుము.

రెండు వైపులా $(D-a)$ పరిక్రియను అనువర్తిస్తే

$$(D-a)\left(\frac{1}{D-a}Q\right) = (D-a)y$$

$$\Rightarrow Q = Dy - ay$$

లేక $\frac{dy}{dx} - ay = Q$

ఇది y లో ఒక సరళ సమీకరణము

సమాకలన గుణకం $I.F. = e^{-\int a\,dx} = e^{-ax}$ కనుక

దత్త సమీకరణం ప్రత్యేక సాధన

$$y \cdot e^{-ax} = \int Qe^{-ax}dx$$

లేదా $y = e^{ax}\int Q \cdot e^{-ax}dx$

కావున $\boxed{\dfrac{1}{D-a}Q = e^{ax}\int Qe^{-ax}dx}$

6.4.8 ఉదాహరణ: $\left(D^2+a^2\right)y = \sec ax$ ను సాధించుము. 'a' వాస్తవ సంఖ్య

సాధన: దత్త సమీకరణ సహాయక సమీకరణం

$$m^2 + a^2 = 0 \Rightarrow m = \pm ai$$

$\therefore$ కనుక పూరక ప్రమేయం $y_c = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax$

ప్రత్యేక సమాకలని $(\text{P.I.}) = y_P = \dfrac{1}{D^2+a^2}\sec ax$

$$y_P = \frac{1}{2ai}\left(\frac{1}{D-ai} - \frac{1}{D+ai}\right)\sec ax$$

ఇప్పుడు $\dfrac{1}{D-ai}\sec ax = e^{iax}\int \sec ax \cdot e^{-iax}dx$

$$= e^{iax}\int(\cos ax - i\sin ax)\frac{1}{\cos ax}dx \qquad \left(\because\ e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta\right)$$

$$= e^{iax}\int(1 - i\tan ax)dx$$

$$= e^{iax}\left[x + \frac{i}{a}\log\cos ax\right]$$

ఇదే విధముగా $\dfrac{1}{D+ai}\sec ax = e^{-iax}\left[x - \dfrac{i}{a}\log\cos ax\right]$

$$\therefore y_P = \frac{1}{2ai}\left[\frac{1}{D-ai}\sec ax - \frac{1}{D+ai}\sec ax\right]$$

$$= \frac{1}{2ai}\left[e^{iax}\left\{x+\frac{i}{a}\log\cos ax\right\} - e^{-iax}\left\{x-\frac{i}{a}\log\cos ax\right\}\right]$$

$$= x\left(\frac{e^{iax}-e^{-iax}}{2ai}\right)+\frac{1}{a^2}\log\cos ax\left[\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}\right]$$

$$= \frac{x}{a}\sin ax + \frac{1}{a^2}\cos ax \cdot \log\cos ax$$

$\therefore$ కనుక దత్త సమీకరణ సాధారణ సాధన

$$y = y_c + y_p$$

$$y = c_1\cos ax + c_2\sin ax + \frac{x}{a}\sin ax + \frac{1}{a^2}\cos ax\ \log\ \cos ax$$

6.4.9 నిర్వచనము: $\frac{1}{D-\beta}, \frac{1}{D-\alpha}$ లు రెండు విలోమ పరికర్తలు అయితే

$\frac{1}{(D-\beta)(D-\alpha)}Q = \frac{1}{(D-\beta)}\left[\frac{1}{(D-\alpha)}Q\right]$ గా నిర్వచించవచ్చును. ఇచ్చట α, β లు స్థిరరాశులు. $Q(x)$, x లో ప్రమేయము.

6.4.10 ఉదాహరణ : ఈ క్రింది వానిని కనుగొనుము.

(a) $\frac{1}{D}x^2$ (b) $\frac{1}{D^2}x^2$ (c) $\frac{1}{D^2}e^{4x}$ (d) $\frac{1}{D-2}e^{3x}$ (e) $\frac{1}{(D-2)(D-3)}e^{2x}$

సాధన : (a) $\frac{1}{D}x^2 = \int x^2dx = \frac{x^3}{3}$

(b) $\frac{1}{D^2}x^2 = \frac{1}{D}\int x^2dx = \frac{1}{D}\frac{x^3}{3} = \frac{1}{3}\int x^3dx = \frac{1}{3}\frac{x^4}{4} = \frac{x^4}{12}$

(c) $\frac{1}{D^2}e^{4x} = \frac{1}{D}\int e^{4x}dx = \frac{1}{D}\frac{e^{4x}}{4} = \frac{1}{4}\int e^{4x}dx = \frac{1}{4}\frac{e^{4x}}{4} = \frac{e^{4x}}{16}$

(d) $\frac{1}{D-2}e^{3x} = e^{2x}\int e^{3x}\ e^{-2x}dx = e^{2x}\int e^{x}dx = e^{2x}\cdot e^{x} = e^{3x}$

(e) $\frac{1}{(D-2)(D-3)}e^{2x} = \frac{1}{(D-2)} \cdot \left[\frac{1}{(D-3)}e^{2x}\right] = \frac{1}{(D-2)}\left[e^{3x}\int e^{2x} \cdot e^{-3x}dx\right]$

$$= \frac{1}{(D-2)}e^{3x} \cdot \int e^{-x}dx = \frac{1}{D-2}e^{3x} \cdot \left(-e^{-x}\right) = \frac{-1}{(D-2)}e^{2x}$$

$$= -e^{2x}\int e^{2x} \cdot e^{-2x}dx = -e^{2x} \cdot \int 1dx$$

$$= -e^{2x}x$$

6.4.11 SAQ : $\frac{1}{D+4}\cos x$ యొక్క ప్రత్యేక విలువను కనుగొనుము.

6.4.12 Working rule to solve differential equation $f(D)y = Q$ **:**

Step 1 : సహాయక సమీకరణము $f(m) = 0$ ను వ్రాయుము.

Step 2 : సహాయక సమీకరణము యొక్క మూలములు కనుగొనుము.

Step 3 : పూరక ప్రమేయము C.F. ను వ్రాయుము.

Step 4 : **6.4.5, 6.4.6, 6.4.7, 6.4.9**లను ఉపయోగించి ప్రత్యేక సమాకలని P.I.ను వ్రాయుము.

Step 5 : సాధారణ సాధన $y = C.F. + P.I.$ ను వ్రాయుము.

6.5 ప్రత్యేక సమాకలని P.I. కనుగొనే పద్ధతులు

దత్త అవకలన సమీకరణము

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots\cdots + a_n y = Q$$

పై సమీకరణమును ఈ క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును.

$$\left(D^n + a_1D^{n-1} + a_2D^{n-2} + \cdots\cdot + a_n\right)y = Q$$

i.e. $f(D)y = Q$, $f(D) = D^n + a_1, D^{n-1} + a_2D^{n-2} + \cdots\cdot + a_n$

$$\boxed{\therefore P.I. = \frac{1}{f(D)}Q}$$

6.6 పద్ధతి 1

a స్థిరరాశి $Q(x)=e^{ax}$, $f(D)=Q(x)$ సమీకరణము యొక్క ప్రత్యేక సమాకలని P.I.

$D(e^{ax})=ae^{ax}$ కావున

$D^2(e^{ax})=a^2e^{ax},\cdots, D^n(e^{ax})=a^ne^{ax}$

$\therefore\ (D^n+a_1D^{n-1}+a_2D^{n-2}+\cdots+a_n)e^{ax}=(a^n+a_1a^{n-1}+a_2a^{n-2}+\cdots+a_n)e^{ax}$

i.e. $f(D)e^{ax}=f(a)e^{ax}$

రెండు వైపులా $\dfrac{1}{f(D)}$, పరిక్రియను అనువర్తిస్తే

$$\frac{1}{f(D)}\left[f(D)e^{ax}\right]=\frac{1}{f(D)}\left[f(a)e^{ax}\right]$$

$$e^{ax}=f(a)\frac{1}{f(D)}e^{ax}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(D)}e^{ax}=\frac{1}{f(a)}e^{ax} \qquad f(a)\neq 0 \text{ అయినపుడు.}$$

$f(a)=0$, అయితే $f(D)=0$ కి a ఒక మూలం.

$\Rightarrow f(D)$కి $(D-a)$ కారణాంకము.

$\therefore f(D)=(D-a)\phi(D)$. ఇచ్చుట $\phi(a)\neq 0$ అనుకుంటే

అప్పుడు $\dfrac{1}{f(D)}e^{ax}=\dfrac{1}{(D-a)\phi(D)}e^{ax}=\dfrac{1}{(D-a)}\cdot\left(\dfrac{1}{\phi(D)}e^{ax}\right)$

$$=\frac{1}{(D-a)}\frac{1}{\phi(a)}e^{ax} \qquad (\because \phi(a)\neq 0)$$

$$=\frac{1}{\phi(a)}e^{ax}\int e^{ax}\cdot e^{-ax}dx$$

$$=\frac{1}{\phi(a)}e^{ax}\cdot\int 1dx$$

$$= \frac{1}{\phi(a)} e^{ax} \cdot x$$

$$\boxed{\therefore \frac{1}{f(D)} e^{ax} = x \cdot \frac{1}{f'(a)} e^{ax}} \qquad \begin{pmatrix} \because f(D) = (D-a)\phi(D) \\ f'(D) = (D-a)\phi'(a) + 1 \cdot \phi(D) \\ f'(a) = \phi(a) \end{pmatrix}$$

$f'(a) = 0$, $f''(a) \neq 0$ అయితే పై విధముగా చేయగా

$$\frac{1}{f(D)} e^{ax} = \frac{x^2}{2!} \frac{1}{f''(a)} e^{ax} \,, \qquad f''(a) \neq 0 \text{ అయితే}$$

6.6.1 సిద్ధాంతము: $\frac{1}{(D-a)^r} \cdot e^{ax} = \frac{x^r}{r!} e^{ax}$

సాధన: ఈ సిద్ధాంతమును **6.4.7** యొక్క ఉప సిద్ధాంతముగా తీసుకొనవచ్చును. ఇచ్చుట $Q = e^{ax}$ మరియు

$$\frac{1}{(D-a)r} Q = \frac{1}{(D-a)^{r-1}} \left[\frac{1}{(D-a)} Q \right]$$

6.6.2 SAQ : $(D-2)^3 y = e^{2x}$ యొక్క ప్రత్యేక సమాకలని కనుగొనుము.

6.6.3 ఉదాహరణ: $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$ లను సాంధించుము.

సాధన: దత్త సమీకరణము యొక్క పరికర్త రూపము

$(D^2 - 3D + 2)y = e^x$ i.e. $f(D)y = e^x$ ఇచ్చుట $f(D) = D^2 - 3D + 2 \cdot$

దత్త సమీకరణ సహాయ సమీకరణం

$$m^2 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow (m-1)(m-2) = 0 \Rightarrow m = 1, 2$$

దీని మూలాలు $m = 1, 2$

కనుక దత్త సమీకరణ పూరక ప్రమేయము

$$\therefore C.F. = y_c = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

దత్త సమీకరణ ప్రత్యేక సమాకలని $P.I = y_p = \frac{1}{f(D)}Q$

$$= \frac{1}{D^2 - 3D + 2}e^x = \frac{1}{(D-1)(D-2)}e^x$$

$$= \frac{1}{(D-1)}\left(\frac{1}{(D-2)}e^x\right)$$

$$= \frac{1}{(D-1)}\left(\frac{1}{1-2}e^x\right)$$ (పద్ధతి 6.6 చూడుము.)

$$= \frac{-1}{(D-1)}e^x = -\frac{x'}{1!}e^x = -xe^x$$

సాధారణ సాధన $y = C.F. + P.I.$

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} - xe^x$$

6.6.4 ఉదాహరణ: $(D^2 - 4)y = e^{2x} + e^{-4x}$ సాధించుము.

సాధన: ఇచ్చిన సమీకరణము $(D^2 - 4)y = e^{2x} + e^{-4x}$ i.e. $f(D)y = Q$

ఇక్కడ $f(D) = D^2 - 4,\ Q = e^{2x} + e^{-4x}$

A.E. $m^2 - 4 = 0$

దీని మూలాలు $m = \pm 2$

పూరక ప్రమేయం C.F. $= y_c = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$

ప్రత్యేక సమాకలని P.I. $= y_P = \frac{1}{f(D)}Q = \frac{1}{D^2 - 4}\left(e^{2x} + e^{-4x}\right)$

$$= \frac{1}{(D^2 - 4)}e^{2x} + \left(\frac{1}{D^2 - 4}\right)e^{-4x}$$

$$= \frac{1}{(D-2)(D+2)}e^{2x} + \frac{1}{(4^2 - 4)}e^{-4x}$$

$$=\left(\frac{1}{D-2}\right)\left(\frac{1}{D+2}e^{2x}\right)+\frac{1}{12}e^{-4x}$$

$$=\frac{1}{(D-2)}\left(\frac{1}{2+2}e^{2x}\right)+\frac{1}{12}e^{-4x}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{D-2}e^{2x}\right)+\frac{1}{12}e^{-4x}=\frac{1}{4}\frac{x^1}{1!}e^{2x}+\frac{1}{12}e^{-4x}$$

$$=\frac{x\cdot e^{2x}}{4}+\frac{e^{-4x}}{12}$$

సాధారణ సాధన $\quad y = C.F. + P.I. = y_c + y_p$

$$y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+\frac{xe^{2x}}{4}+\frac{e^{-4x}}{12}$$

6.6.5 ఉదాహరణ: $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4\dfrac{dy}{dx}+5y=-2\cosh x$ సాధించుము.

సాధన: ఇచ్చిన సమీకరణమును ఈ క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును.

$$\left(D^2+4D+5\right)y=-2\cosh x$$

$$f(D)y=Q,\ f(D)=D^2+4D+5,\quad Q=-2\cosh x$$

$$\text{A.E. } m^2+4m+5=0\Rightarrow m=-2\pm i$$

$$\therefore C.F.=y_a=e^{-2x}\left[c_1\cos x+c_2\sin x\right]$$

$$P.I.=y_P=\frac{1}{f(D)}Q=\frac{1}{\left(D^2+4D+5\right)}(-2\cosh x)$$

$$=\frac{1}{D^2+4D+5}\cdot\left[-\cancel{2}\cdot\frac{\left(e^x+e^{-x}\right)}{\cancel{2}}\right]\qquad\left(\because\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$$

$$=-\left[\frac{1}{D^2+4D+5}e^x+\frac{1}{D^2+4D+5}e^{-x}\right]$$

$$=-\left[\frac{1}{1+4+5}e^{x}+\frac{1}{1-4+5}e^{-x}\right]$$

$$=-\left[\frac{1}{10}e^{x}+\frac{1}{2}e^{-x}\right]$$

$\therefore$ సాధారణ సాధన $y=y_c+y_P$

$$y=e^{-2x}\left[c_1\cos x+c_2\sin x\right]-\left(\frac{e^{x}}{10}+\frac{e^{-x}}{2}\right)$$

6.7 పద్ధతి 2 :

$Q=\cos(ax+b)$ **లేదా** $\sin(ax+b)$ **అయితే** $f(D)y=Q$ **యొక్క P.I.**

$$D\sin(ax+b)=a\cos(ax+b)$$

$$D^2\sin(ax+b)=-a^2\sin(ax+b)$$

$$D^3\sin(ax+b)=-a^3\cos(ax+b)$$

$$D^4\sin(ax+b)=a^4\sin(ax+b)$$

i.e. $D^2\sin(ax+b)=-a^2\sin(ax+b)$

$$\left(D^2\right)^2\sin(ax+b)=\left(-a^2\right)^2\sin(ax+b)$$

$$\left(D^2\right)^r\sin(ax+b)=\left(-a^2\right)^r\sin(ax+b)$$

$$\therefore f\left(D^2\right)\sin(ax+b)=f\left(-a^2\right)\sin(ax+b)$$

ఇరువైపులా $\dfrac{1}{f\left(D^2\right)}$ ను ఉపయోగించగా

$$\frac{1}{f\left(D^2\right)}\cdot\left[f\left(D^2\right)\sin(ax+b)\right]=\frac{1}{f\left(D^2\right)}f\left(-a^2\right)\sin(ax+b)$$

లేక $\sin(ax+b)=f\left(-a^2\right)\dfrac{1}{f\left(D^2\right)}\sin(ax+b)$

$f\left(-a^2\right) \neq 0$ అయితే $f\left(-a^2\right)$, తో భాగించగా

$$\boxed{\frac{1}{f\left(D^2\right)}\sin(ax+b) = \frac{1}{f\left(-a^2\right)}\sin(ax+b)}$$

కావున $f\left(-a^2\right) \neq 0$ అయితే D^2 ను $-a^2$తో మార్చవచ్చును.

$f\left(-a^2\right) = 0,$ అయితే పై పద్ధతి అనుసరణీయం కాదు.

$\cos(ax+b) + i\sin(ax+b) = e^{i(ax+b)}$ కాబట్టి (ఆయిలర్ సిద్ధాంతము)

$$\therefore \frac{1}{f\left(D^2\right)}\sin(ax+b) = \frac{1}{f\left(D^2\right)}e^{i(ax+b)} \text{ యొక్క కల్పిత భాగము} \qquad \left(\because f\left(-a^2\right)=0\right)$$

$$§\ \frac{1}{f'\left(D^2\right)}e^{i(ax+b)} \text{ యొక్క కల్పిత భాగము} \qquad \left(D^2 = -a^2\right)$$

$$\therefore \frac{1}{f\left(D^2\right)}\sin(ax+b) = x\frac{1}{f'\left(-a^2\right)}\sin(ax+b) \quad f'\left(-a^2\right) \neq 0.$$

6.6మరియు **6.6.1**లోని పద్ధతి ప్రకారము

$f'\left(-a^2\right) = 0,$ అయితే $\dfrac{1}{f\left(D^2\right)}\sin(ax+b) = x^2 \cdot \dfrac{1}{f''\left(-a^2\right)}\sin(ax+b)$

అదే విధంగా $e^{(ax+b)}$ యొక్క వాస్తవ భాగము $\cos(ax+b)$ కావున

$$\frac{1}{f\left(D^2\right)}\cos(ax+b) = \frac{1}{f\left(-a^2\right)}\cos(ax+b), \ f\left(-a^2\right) \neq 0.$$

$f\left(-a^2\right) = 0$ అయితే $\dfrac{1}{f\left(D^2\right)}\cos(ax+b) = x \cdot \dfrac{1}{f'\left(-a^2\right)}\cos(ax+b)$ాఫీఱ్వా $f''\left(-a^2\right) \neq 0$

6.7.1 SAQ : $\left(D^2+2D+2\right)y = \sin x$ యొక్క ప్రత్యేక సమాకలని కనుగొనుము.

6.7.2 ప్రత్యామ్నాయ పద్ధతి : $f\left(-a^2\right) = 0$ అయితే $f\left(D^2\right)$కు $D^2 + a^2$ కారణాంకము. $\dfrac{1}{D^2+a^2}\sin(ax+b)$ కనుగొనుటకు అనుసరించదగిన పద్ధతి.

$$e^{iax} = \cos ax + i \sin bx$$

$$\frac{1}{D^2+a^2} e^{i(ax+b)} = \frac{1}{(D-ia)(D+ia)} e^{i(ax+b)}$$

$$= \frac{1}{(ia+ia)} \frac{1}{D-ia} e^{i(ax+b)}$$

$$= \frac{1}{2ia} \cdot \frac{x'}{1!} e^{i(ax+b)}$$

$$= \frac{-i}{2a} x \cdot [\cos(ax+b) + i \sin(ax+b)]$$

i.e. $\frac{1}{D^2+a^2}[\cos(ax+b) + i\sin(ax+b)] = -\frac{x}{2a}[i\cos(ax+b) - \sin(ax+b)]$

వాస్తవ మరియు కల్పిత భాగాలను సమానపర్చగా

$$\left(\frac{1}{D^2+a^2}\right)\cos(ax+b) = \frac{x}{2a}\sin(ax+b)$$

మరియు $\left(\frac{1}{D^2+a^2}\right)\sin(ax+b) = -\frac{x}{2a}\cos(ax+b)$

సూత్రము:

$$\frac{1}{D^2+a^2}\sin(ax+b) = \frac{x}{2}\left(-\frac{\cos(ax+b)}{a}\right) = \frac{x}{2}\int \sin(ax+b)dx$$

$$\frac{1}{D^2+a^2}\cos(ax+b) = \frac{x}{2}\left(\frac{\sin(ax+b)}{a}\right) = \frac{x}{2}\int \cos(ax+b)dx$$

6.7.3 **ఉదాహరణ:** $(D^3+1)y = \cos(2x-1)$ యొక్క P.I. కనుగొనుట. ఇచ్చిన సమీకరణమును ఈ క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును.

$$(D^3+4D)y = \sin 2x$$

$$\text{P.I.} = \frac{1}{D^3+4D}\sin 2x = \frac{1}{D\left(D^2+4\right)}\sin 2x$$

$$\left(\because D^2+4=0,\ D^2=-2^2,\ \frac{d}{dD}\left(D^3+4\right)=3D^2+4\right)$$

$$= x\frac{1}{3D^2+4}\sin 2x$$

$$= x\frac{1}{3\left(-2^2\right)+4}\sin 2x$$ ($D^2=-2^2=-4$ తీసుకొనుము)

$$= -\frac{x}{8}\sin 2x$$

6.7.5 ఉదాహరణ : $\left(D^2-4\right)y = \sin^2 x$ సాధించుము.

A.E. = $m^2-4=0 \Rightarrow m=-2,2$

C.F. = $y_c = c_1e^{-2x}+c_2e^{2x}$

$$\text{P.I.} = y_P = \frac{1}{D^2-4}\sin^2 x = \frac{1}{D^2-4}\left[\frac{(1-\cos 2x)}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{D^2-4}\left[\frac{1}{2}e^{0ax}-\frac{1}{2}\cos 2x\right]$$

$$\text{వ} \quad \frac{1}{D^2-4}\,\frac{1}{2}e^{0x}-\frac{1}{D^2-4}\,\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$= \frac{1}{-4}\cdot\frac{1}{2}e^{0x}-\frac{1}{-4-4}\frac{1}{2}\cos 2x$$ ($D^2=-2^2$ ను రెండవ భాగములో వ్రాయగా)

$$= -\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\cos 2x$$

సంపూర్ణ సాధన $y = y_c + y_p$

$$y = c_1e^{-2x}+c_2e^{2x}+\frac{1}{16}\cos 2x-\frac{1}{8}$$

6.7.6 ఉదాహరణ : $\left(D^3+2D^2+D\right)y=e^{2x}+\sin 2x$

A.E. = $m^3+2m^2+m=0 \Rightarrow m(m+1)^2=0 \Rightarrow m=0,-1,-1$

C.F. = $y_c=c_1e^{0x}+\left(c_2+c_3x\right)e^{-x}=c_1+\left(c_2+c_3x\right)e^{-x}$

P.I. $=y_p=\dfrac{1}{D^3+2D^2+D}\left[e^{2x}+\sin 2x\right]$

$$=\frac{1}{D^3+2D^2+D}e^{2x}+\frac{1}{D^3+2D^2+D}\sin 2x$$

$$=\frac{1}{2^3+2\cdot 2^2+2}e^{2x}+\frac{1}{D(-4)+2(-4)+D}\sin 2x$$

$$=\frac{1}{18}e^{2x}-\frac{1}{3D+8}\sin 2x$$

$$=\frac{1}{18}e^{2x}-\frac{3D-8}{(3D+8)(3D-8)}\sin 2x$$

$$=\frac{1}{18}e^{2x}-(3D-8)\cdot\frac{1}{9D^2-64}\sin 2x$$

$$=\frac{1}{18}e^{2x}-(3D-8)\frac{1}{9(-4)-4}\sin 2x \qquad (D^2=-2^2=-4 \text{ తీసుకొనుము})$$

$$=\frac{1}{18}e^{2x}-\frac{(3D-8)}{-100}\sin 2x$$

$$=\frac{1}{18}e^{2x}+\frac{3D\sin 2x-8\sin 2x}{100}$$

$$=\frac{1}{18}e^{2x}+\frac{1}{50}[3\cos 2x-4\sin 2x]$$

సంపూర్ణ సాధన $y=y_c+y_p$

$$y=c_1+\left(c_2+c_3x\right)e^{-x}+\frac{1}{18}e^{2x}+\frac{1}{50}[3\cos 2x-4\sin 2x]$$

6.7.7 ఉదాహరణ : $\left(D^4+3D^2-4\right)y=\cos 3x\cdot\cos 2x$

A.E. = $m^4+3m^2-4=0\Rightarrow\left(m^2+4\right)\left(m^2-1\right)=0$

$$m=-1,1,\pm 2i$$

C.F. = $y_c=c_1e^{-x}+c_2e^{x}+c_3\cos 2x+c_4\sin 2x$

P.I. $y_p=\dfrac{1}{D^4+3D^2-4}\cos 3x\ \cos 2x=\dfrac{1}{D^4+3D^2-4}\dfrac{(\cos 5x+\cos x)}{2}$

$$=\frac{1}{D^4+3D^2-4}\frac{1}{2}\cos 5x+\frac{1}{D^4+3D^2-4}\ \frac{1}{2}\cos x$$

$$=\frac{1}{\left(-5^2\right)^2+3\left(-5^2\right)-4}.\frac{1}{2}\cos 5x+\frac{1}{(-1)^2+3(-1)^2-4}\cdot\frac{1}{2}\cos x$$

$$=\frac{1}{1092}\cos 5x-\frac{1}{12}\cos x$$

$\therefore$ సంపూర్ణ సాధన $y=y_c+y_p$

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{x}+c_3\cos 2x+c_4\sin 2x+\frac{1}{1092}\cos 5x-\frac{1}{12}\cos x$$

6.8 పద్ధతి 3 :

$Q=x^m$, m **ధన పూర్ణాంకము అయినపుడు** $f(D)y=Q$ **యొక్క ప్రత్యేక సమాకలని (particular integral (P.I.))**

ఇక్కడ $P.I.=\dfrac{1}{f(D)}=x^m$

దీనిని గణనం చేయడానికి $f(D)$ ని -1 ఘాతానికి అంటే $\left[f(D)\right]^{-1}$ గా రాసి D యొక్క ఆరోహక ఘాతాలలో D^m వరకు విస్తరణ చేస్తాం.

ఇక్కడ D యొక్క m కంటే మించిన ఘాతాలను వదిలివేయడానికి కారణం, అవి x^m పై పరిక్రమించినప్పుడు శూన్యం కావడమే. $\left[f(D)\right]^{-1}$ విస్తరణలోని పదాలు x^m పై పరిక్రియించగా వచ్చిన విలువ ప్రత్యేక సమాకలని అవుతుంది.

గమనిక: *P.I.* కనుగొనుటలో ఈ క్రింది ఫలితాలు వాడుతాము.

1. $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$

2. $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\cdots$

3. $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots\cdots$

4. $(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots\cdots$

5. $(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$

6.8.1 ఉదాహరణ: $(D^2 - 4)y = x^2$ ను సాధించుము.

సాధన: ఇచ్చిన సమీకరణమును ఈ క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును.

$$f(D)y = Q, \; f(D) = D^2 - 4, \; Q = x^2$$

A.E. = $m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m = \pm 2$

C.F. = $y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$

P.I. $= \frac{1}{f(D)}Q = \frac{1}{D^2 - 4}x^2 = \frac{1}{-4\left[1 - \frac{D^2}{4}\right]}x^2$

$$= -\frac{1}{4}\left(1 - \frac{D^2}{4}\right)^{-1} x^2$$

$$= -\frac{1}{4}\left[1 + \frac{D^2}{4} + \left(\frac{D^2}{4}\right)^2 + \cdots\right]x^2$$

$$= -\frac{1}{4}\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)$$

$\therefore$ సాధారణ సాధన $y = y_c + y_p$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{4}\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)$$

6.8.2 SAQ : $\left(D^2+3\right)y = x^3$ యొక్క P.I. కనుగొనుము.

6.8.3 ఉదాహరణ: $\left(D^2+2D+1\right)y = 2x + x^2$ సాధించుము.

సాధన: A.E. = $m^2+2m+1=0 \Rightarrow (m+1)^2=0 \Rightarrow m=-1,-1$

$$\therefore \text{C.F.} = y_c = \left(c_1+c_2x\right)e^{-x}$$

$$Y_p = \text{P.I.} = \frac{1}{D^2+2D+1}\left(2x+x^2\right)$$

$$= \frac{1}{(D+1)^2}\left(2x+x^2\right)$$

$$= (1+D)^{-2}\left(2x+x^2\right)$$

$$= \left(1-2D+3D^2+\cdots\cdots\right)\left(2x+x^2\right)$$

$$= 2x+x^2-2(2+2x)+3(2)$$

$$= x^2-2x+2$$

సాధారణ సాధన $y = y_c + y_p$

$$y = \left(c_1+c_2x\right)e^{-x} + x^2 - 2x + 2$$

6.8.4 ఉదాహరణ: $\left(D^3+2D^2+D\right)y = x^2+x$

సాధన: A.E. = $m^3+2m^2+m=0$

$$\Rightarrow m\left(m^2+2m+1\right)=0$$

$$\Rightarrow m(m+1)^2=0$$

$$\Rightarrow m = 0, -1, -1$$

$$\therefore \text{C.F.}\ \text{ౕ}\ y_c = c_1 + \left(c_2+c_3x\right)e^{-x}$$

$$Y_p = \text{P.I.} = \frac{1}{D^3 + 2D^2 + D}\left(x^2 + x\right)$$

$$= \frac{1}{D\left[D^2 + 2D + 1\right]}\left(x^2 + x\right) = \frac{1}{D(D+1)^2}\left(x^2 + x\right)$$

$$= \frac{1}{D}\left[1 - 2D + 3D^2 - 4D^3 + \cdots\cdots\right]\left(x^2 + x\right)$$

$$= \frac{1}{D}\left[x^2 + x - 2(2x+1) + 3(2)\right]$$

$$= \frac{1}{D}\left(x^2 - 3x + 4\right)$$

$$= \int\left(x^2 - 3x + 4\right)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x$$

$\therefore$ సాధారణ సాధన

$$y = y_c + y_p$$

$$= c_1 + (c_2 + c_3 x)e^{-x} + \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x$$

6.8.5 ఉదాహరణ : $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 3\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} = x^2$

సాధన: ఇచ్చిన సమీకరణము

$$\left(D^3 + 3D^2 + 2D\right)y = x^2 \text{ గా వ్రాయవచ్చును.}$$

$$\text{A.E.} = m^3 + 3m^2 + 2m = 0 \Rightarrow m(m+1)(m+2) = 0$$

$$\Rightarrow m = 0, -1, -2$$

$$\therefore \text{CF} = y_c = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x}$$

$$\text{P.I.} = y_p = \frac{1}{D^3 + 3D^2 + 2D} x^2$$

$$= \frac{1}{D(D+1)(D+2)} x^2$$

$$= \frac{1}{D} \frac{1}{(1+D)2\left(1+\frac{D}{2}\right)} \cdot x^2 \quad = \frac{1}{2D}(1+D)^{-1}\left(1+\frac{D}{2}\right)^{-1} x^2$$

$$= \frac{1}{2D}(1+D)^{-1}\left(1-\frac{D}{2}+\frac{D^2}{4}+\cdots\right)x^2 = \frac{1}{2D}\left(1-D+D^2-D^3+\cdots\right)\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2D}\left(x^2-x+\frac{1}{2}-(2x-1)+2\right)$$

$$= \frac{1}{2D}\left(x^2-3x+\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{4D}\left(2x^2-6x+7\right)$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(2x^2-6x^2+7\right)dx = \frac{1}{4}\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}+7x\right)$$

$$= \frac{1}{12}\left(2x^3-9x^2+21x\right)$$

$\therefore$ సాధారణ సాధన $\quad y = y_c + y_p$

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x} + \frac{1}{12}\left(2x^3-9x^2+21x\right)$$

6.9 పద్ధతి 4:

$Q = e^{ax}V$, x **లో ప్రమేయము** V **అయినపుడు** $f(D)y = Q$ **యొక్క** **P.I..**

$$\boxed{\text{P.I.} = \frac{1}{f(D)}\left(e^{ax}V\right) = e^{ax} \cdot \frac{1}{f(D+a)} V}$$

ఉపపత్తి: x లో ప్రమేయము u అయితే

$$D\left(e^{ax}u\right) = e^{ax}Du + ae^{ax}u = e^{ax}(D+a)u$$

$$D^2\left(e^{ax}u\right) = e^{ax}D^2u + 2ae^{ax}Du + a^2e^{ax}u = e^{ax}(D+a)^2 u$$

సాధారణముగా $D^n\left(e^{ax}u\right)=e^{ax}(D+a)^n u$

$$\therefore f(D)\left(e^{ax}u\right)=e^{ax}f(D+a)u$$

ఇరువైపులా $\frac{1}{f(D)}$, ఉపయోగించగా

$$\frac{1}{f(D)}\left(f(D)\left(e^{ax}u\right)\right)=\frac{1}{f(D)}\left[e^{ax}f(D+a)u\right]$$

$$e^{ax}u=\frac{1}{f(D)}\left[e^{ax}\cdot f(D+a)u\right]$$

$f(D+a)u=V$ అనుకొంటే, $u=\frac{1}{f(D+a)}V$, అవుతుంది.

$$e^{ax}\frac{1}{f(D+a)}V=\frac{1}{f(D)}\left(e^{ax}\cdot V\right)$$

i.e. $\boxed{\frac{1}{f(D)}\left(e^{ax}V\right)=e^{ax}\cdot\frac{1}{f(D+a)}V}$

6.9.1 ఉదాహరణలు :

(1) $\left(D^2-4D+3\right)y=e^{-x}\sin x$

సాధన: ఇచ్చిన సమీకరణము $\left(D^2-4D+3\right)y=e^{-x}\sin x$

$$m^2-4m+3=0\Rightarrow(m-1)(m-3)=0$$

$$\Rightarrow m=1,3$$

$$\therefore \text{C.F.}\quad y_c=c_1e^x+c_2e^{3x}$$

$$\text{P.I.}=y_p=\frac{1}{D^2-4D+3}\left(e^{-x}\sin x\right)$$

$$=e^{-x}\frac{1}{(D-1)^2-4(D-1)+3}\sin x$$

$$= e^{-x}\frac{1}{D^2-6D+8}\sin x$$

$$= e^{-x}\cdot\frac{1}{-1^2-6D+8}\sin x \qquad (D^2 = -1^2 \text{ తీసుకొనుము})$$

$$= e^{-x}\cdot\frac{1}{7-6D}\sin x$$

$$= e^{-x}\cdot\frac{(7+6D)}{49-36D^2}\sin x \qquad (\text{హారమును అకరణీయము చేయగా})$$

$$= e^{-x}\cdot\frac{(7+6D)}{49-36(-1)^2}\sin x \qquad (D^2 = -1^2 \text{ తీసుకొనగా})$$

$$= e^{-x}.\frac{1}{85}(7+6D)\sin x$$

$$= \frac{e^{-x}}{85}\cdot(7\sin x + 6\cos x)$$

సాధారణ సాధన $y = y_c + y_p$

$$= c_1e^x + c_2e^{3x} + \frac{e^{-x}}{85}(7\sin x + 6\cos x)$$

6.9.2 ఉదాహరణ: $(D^2+4)y = x\cdot e^{2x}$

సాధన: A.E. $= m^2+4=0 \Rightarrow m=\pm 2i$

C.F.$= y_c = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$

$$\text{P.I.} = y_p = \frac{1}{D^2+4}xe^{2x} = e^{2x}\frac{1}{(D+2)^2+4}x$$

$$= e^{2x}\cdot\frac{1}{D^2+4D+8}x = e^{2x}\frac{1}{8\left[1+\frac{D^2+4D}{8}\right]}x$$

$$=\frac{e^{2x}}{8}\left[1-\left(\frac{D^2+4D}{8}\right)+\left(\frac{D^2+4D}{8}\right)^2-\cdots\cdots\right]x$$

$$=\frac{e^{2x}}{8}\left[1-\frac{D}{2}\right]x=\frac{e^{2x}}{8}\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{e^{2x}}{16}(2x-1)$$

$\therefore$ సాధారణ సాధన

$$y=y_c+y_p$$

$$=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\frac{e^{2x}}{16}(2x-1)$$

6.9.3 ఉదాహరణ: $\left(D^3-3D^2+3D-1\right)y=\left(x^2+1\right)e^x$

సాధన: A.E. $m^3-3m^2+3m-1=0 \Rightarrow (m-1)^3=0$

$$\Rightarrow m=1,1,1$$

C.F. = $y_c=\left(c_1+c_2x+c_3x^2\right)e^x$

$$\text{P.I.}=y_p=\frac{1}{D^3-3D^2+3D-1}\left(x^2+1\right)e^x=\frac{1}{(D-1)^3}\left(x^2+1\right)e^x$$

$$=e^x\cdot\frac{1}{(D+1-1)^3}\left(x^2+1\right)=e^x\cdot\frac{1}{D^3}\left(x^2+1\right)$$

$$=e^x\left[\frac{x^5}{60}+\frac{x^3}{6}\right]=\frac{e^x\cdot x^3}{60}\left[x^2+10\right]$$

$\therefore$ ఇచ్చిన సమీకరణమునకు సాధారణ సాధన

$$y=y_c+y_p$$

$$=\left(c_1+c_2x+c_3x^2\right)e^x+\frac{e^x\cdot x^3}{60}\left(x^2+10\right)$$

6.9.4 ఉదాహరణ: $\left(D^3 - 2D^2 + 2D\right)y = e^x \cdot \cos x$ సాధించుము.

సాధన: $A.E. = m^3 - 2m^2 + 2m = 0 \Rightarrow m\left(m^2 - 2m + 2\right) = 0$

$$\Rightarrow m = 0, 1 \pm i$$

$$C.F. = y_c = c_1 + e^x\left(c_2 \cos x + c_3 \sin x\right)$$

$$P.I. = y_p = \frac{1}{D^3 - 2D^2 + 2D} e^x \cdot \cos x = \frac{1}{D\left(D^2 - 2D + 2\right)} e^x \cos x$$

$$= e^x \frac{1}{(D+1)\left[(D+1)^2 - 2(D+1) + 2\right]} \cos x$$

$$= e^x \frac{1}{(D+1)\left[D^2 + 1\right]} \cos x$$

$$= e^x \frac{D-1}{\left(D^2 - 1\right)\left(D^2 + 1\right)} \cos x$$

$$= e^x \cdot \frac{(D-1)}{\left(-1^2 - 1\right)\left(D^2 + 1\right)} \cos x \qquad (\ D^2 = -1 \text{ తీసుకొనుము})$$

$$= e^x \cdot \frac{(-\sin x - \cos x)}{-2\left(D^2 + 1\right)}$$

$$= \frac{e^x}{2} \frac{1}{D^2 + 1}(\sin x + \cos x) \qquad \left(\begin{array}{l} \because \dfrac{1}{D^2 + a^2} \sin x = \dfrac{x}{2} \int \sin x \, dx \\ \dfrac{1}{D^2 + a^2} \cos x = \dfrac{x}{2} \int \cos x \, dx \end{array}\right)$$

$$= \frac{e^x}{2}\left[\frac{x}{2}(-\cos x + \sin x)\right] = \frac{xe^x}{4}(\sin x - \cos x)$$

$\therefore$ సాధారణ సాధన

$$y^2 = y_c + y_p = c_1 + e^x\left(c_2 \cos x + c_2 \sin x\right) + \frac{xe^x}{4}(\sin x - \cos x)$$

6.10 పద్ధతి 5:

$f(D)y = Q$ **యొక్క ప్రత్యేక సమాకలని** V, x **లో ప్రమేయము** $Q = x \cdot v$ **అయినపుడు**

ఇచ్చుట $P.I. = \dfrac{1}{f(D)}(x \cdot v) = \left[x \cdot \dfrac{1}{f(D)} - \dfrac{f'(D)}{[f(D)]^2}\right]v$

ఉపపత్తి: x లో ప్రమేయము u అయితే

$$D(xu) = xDu + u = xDu + (D)'u$$

$$D^2(xu) = xD^2u + 2Du = xD^2u + \left(D^2\right)'u$$

గణితానుగమనమునుపయోగించి నిరూపించవచ్చును.

$$D^n(xu) = xD^nu + \left(D^n\right)'u$$

$$\therefore f(D)(xu) = xf(D)u + (f(D))'u$$

$f(D)u = v,$ అని తీసుకొనుము.

$$f(D)\left(x \cdot \frac{1}{f(D)}v\right) = x\left(f(D)\frac{1}{f(D)}v\right) + (f(D))'\frac{1}{f(D)^2}v$$

$$= x \cdot v + (f(D))'\frac{1}{f(D)^2}v$$

$$x \cdot \frac{1}{f(D)}v = \frac{1}{f(D)}(x \cdot v) + \frac{1}{f(D)}\left[(f(D))' \cdot \frac{1}{f(D)}v\right]$$

$$\frac{1}{f(D)}(x \cdot v) = x \cdot \frac{1}{f(D)}v - \frac{(f(D))'}{[f(D)]^2}v$$

$$\therefore \frac{1}{f(D)}(xv) = \left[x \cdot \frac{1}{f(D)} - \frac{f'(D)}{[f(D)]^2}\right]v$$

6.10.1 ఉదాహరణ: $\left(D^2+2D+1\right)y = x\sin x$ సాధించుము.

సాధన: A.E. = $m^2+2m+1=0 \Rightarrow (m+1)^2=0 \Rightarrow m=-1,-1$

$$\therefore \text{C.F.} = y_c = \left(c_1+c_2x\right)e^{-x}$$

$$\text{P.I.} = y_p = \frac{1}{D^2+2D+1}\sin x = \left[x\frac{1}{D^2+2D+1} - \frac{2D+2}{\left[D^2+2D+1\right]^2}\right]\sin x$$

$$= x\frac{1}{-1+2D+1}\sin x - \frac{2D+2}{(-1+2D+1)^2}\sin x \qquad (D^2=-1 \text{ తీసుకొనుము})$$

$$= x\cdot\frac{1}{2D}\sin x - \frac{2(D+1)}{4D^2}\sin x = \frac{x}{2}\int \sin x\, dx - \frac{(D+1)}{2(-1)}\sin x$$

$$= \frac{x}{2}\cdot(-\cos x) + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) = \frac{-x\cos x}{2} + \frac{1}{2}(\cos x+\sin x)$$

$\therefore$ సాధారణ సాధన $y = y_c + y_p$

$$y = \left(c_1+c_2x\right)e^{-x} - \frac{x}{2}\cos x + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$$

6.10.2 ఉదాహరణ: $\left(D^2+3D+2\right)y = xe^x\cos x$ సాధించుము.

సాధన: A.E. = $m^2+3m+2=0 \Rightarrow (m+1)(m+2)=0 \Rightarrow m=-1,-2$

$$\text{C.F.} = y_c = c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$$

$$\text{P.I.} = y_p = \frac{1}{D^2+3D+2}xe^x\cos x = \frac{1}{(D+1)(D+2)}xe^x\cos x$$

$$= e^x\cdot\frac{1}{(D+1+1)(D+1+2)}x\cos x$$

$$= e^x\cdot\frac{1}{(D+2)(D+3)}x\cos x$$

$$= e^x\cdot\frac{1}{D^2+5D+6}x\cos x$$

$$= e^{x}\left[x\cdot\frac{1}{D^2+5D+6}-\frac{2D+5}{\left(D^2+5D+6\right)^2}\right]\cos x$$

$$= e^{x}\cdot\left[x\cdot\frac{1}{-1+5D+6}-\frac{2D+5}{(-1+5D+6)^2}\right]\cos x \quad (D^2=-1^2 \text{ తీసుకొనుము})$$

$$= e^{x}\left[\frac{x}{5}\frac{1}{(D+1)}-\frac{2D+5}{25(D+1)^2}\right]\cos x$$

$$= e^{x}\left[\frac{x}{5}\left(\frac{D-1}{D^2-1}\right)-\frac{2D+5}{25\left(D^2+2D+1\right)}\right]\cos x$$

$$= e^{x}\left[\frac{x}{5}\frac{(D-1)}{(-1-1)}-\frac{2D+5}{25(-1+2D+1)}\right]\cos x \qquad (D^2=-1 \text{ తీసుకొనుము})$$

$$= e^{x}\left[\frac{x}{5}\frac{(D-1)}{(-2)}\cos x-\frac{(2D+5)}{25\cdot 2D}\cos x\right]$$

$$= e^{x}\left[\frac{x}{10}(\sin x+\cos x)-\frac{(2D+5)}{50}\sin x\right] \qquad \left(\because \frac{1}{D}\cos x=\int\cos x\,dx=\sin x\right)$$

$$= e^{x}\left[\frac{x}{10}(\sin x+\cos x)-\frac{1}{50}(2\cos x+5\sin x)\right]$$

$\therefore$ ఇచ్చిన సమీకరణమునకు సాధారణ సాధన

$$y = y_c + y_p$$

$$= c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+e^{x}\left[\frac{x}{10}(\sin x+\cos x)-\frac{1}{50}(2\cos x+5\sin x)\right]$$

6.10.3 ఉదాహరణ : $\left(D^2+1\right)y = x\cos^2 x$ సాధించుము.

సాధన : A.E. = $m^2+1=0 \Rightarrow m=\pm i$

C.F. = $y_c = c_1\cos x + c_2\sin x$

$$P.I. = y_p = \frac{1}{(D^2+1)} x\cos^2 x = \frac{1}{D^2+1} x \cdot \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{D^2+1}x + \frac{1}{D^2+1}x\cos 2x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(1+D^2)^{-1}x + x\frac{1}{D^2+1}\cos 3x - \frac{2D}{(D^2+1)^2}\cos 2x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{x}{-4+1}\cos 2x - \frac{2D}{(-4+1)^2}\cos 2x\right] \quad \left(\because (1+D^2)^{-1}x = (1-D^2+D^4-\ldots.)x = x\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{x}{3}\cos 2x + \frac{4}{9}\sin 2x\right] \quad (\because D\cos 2x = -2\sin 2x)$$

$\therefore$ ఇచ్చిన సమీకరణమునకు సాధారణ సాధన

$$y = y_c + y_p$$

$$= c_1\cos x + c_2\sin x + \frac{1}{2}\left[x - \frac{x}{3}\cos 2x + \frac{4}{9}\sin 2x\right]$$

6.10.4 ఉదాహరణ: $\frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = x^2\cos x$ ను సాధించుము.

సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణమును పరిక్రియ రూపములో వ్రాస్తే

$$(D^4 + 2D^2 + 1)y = x^2\cos x$$

$$(D^2+1)^2 y = x^2\cos x$$

$$\text{A.E. is } (m^2+1)^2 = 0 \Rightarrow m^2 = -1, m^2 = -1$$

$$\Rightarrow m = \pm i, \pm i$$

$$C.F. = y_c = e^{0x}\{(c_1+c_2x)\cos x + (c_3+c_4x)\sin x\}$$

$$= (c_1+c_2x)\cos x + (c_3+c_4x)\sin x$$

$$\text{P.I.} = y_p = \frac{1}{(D^2+1)^2} x^2 \cos x = \frac{1}{(D^2+1)^2} x^2$$ (e^{ix} లో వాస్తవ భాగము)

$$\mathcal{S}\ \frac{1}{(D^2+1)^2} x^2 e^{ix}$$ లో వాస్తవ భాగము

$$= e^{ix} \cdot \frac{1}{\left[(D+i)^2+1\right]^2} x^2$$ లో వాస్తవ భాగము

$$= e^{ix} \cdot \frac{1}{\left[D^2+2iD+i^2+1\right]^2} x^2$$ లో వాస్తవ భాగము

$$= e^{ix} \frac{1}{(D^2+2iD-1+1)^2} x^2$$ లో వాస్తవ భాగము

$$= e^{ix} \frac{1}{(D^2+2iD)^2} x^2$$ లో వాస్తవ భాగము

$$= e^{ix} \cdot \frac{1}{4i^2D^2\left[1+\frac{D}{2i}\right]^2} x^2$$ లో వాస్తవ భాగము

$$= e^{ix} \cdot \frac{1}{4(-1)D^2}\left[1-\frac{iD}{2}\right]^{-2} x^2$$ లో వాస్తవ భాగము

$$= -\frac{1}{4} e^{ix} \frac{1}{D^2}\left[1+iD+3i^2\frac{D^2}{4}-\cdots\right] x^2$$ లో వాస్తవ భాగము

$$= -\frac{1}{4} e^{ix} \cdot \frac{1}{D^2}\left[x^2+2ix-\frac{3}{2}\right]$$ లో వాస్తవ భాగము

$$= -\frac{1}{4} e^{ix} \cdot \frac{1}{D}\int\left(x^2+2ix-\frac{3}{2}\right)dx$$ లో వాస్తవ భాగము

$$= -\frac{1}{4}\, e^{ix} \int \left(\frac{x^3}{3} + ix^2 - \frac{3}{2}x \right) dx$$ లో వాస్తవ భాగము

$$= -\frac{1}{4}\, e^{ix} \left[\frac{x^4}{12} + \frac{ix^3}{3} - \frac{3}{4}x^2 \right]$$ లో వాస్తవ భాగము

$$= -\frac{1}{4}\, (\cos x + i \sin x)\left(\frac{x^4}{12} + i\frac{x^3}{3} - \frac{3}{4}x^2 \right)$$ లో వాస్తవ భాగము

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{12}\cos x - \frac{3}{4}x^2 \cos x - \frac{x^3}{3}\sin x \right)$$

సాధారణ సాధన $y = y_c + y_p$

$$y = (c_1 + c_2 x)\cos x + (c_3 + c_4 x)\sin x - \frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{12}\cos x - \frac{3}{4}x^2 \cos x - \frac{x^3}{3}\sin x \right)$$

6.10.5 ఉదాహరణ: $\left(D^3 - D^2 + 3D + 5\right)y = e^x \sin 3x$ సాధించుము.

సాధన: A.E., $m^3 - m^2 + 3m + 5 = 0$

$$\Rightarrow (m+1)\left(m^2 - 2m + 5\right) = 0$$

$$\Rightarrow m = -1,\ 1 \pm 2i$$

C.I. = $y_c = c_1 e^{-x} + e^x \left(c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x\right)$

$$\text{P.I.} = y_p = \frac{1}{D^3 - D^2 + 3D + 5} e^x \sin 3x$$

$$= \frac{1}{(D+1)\left(D^2 - 2D + 5\right)} e^x \sin 3x$$

$$= e^x \frac{1}{(D+1+1)\left((D+1)^2 - 2(D+1) + 5\right)} \sin 3x$$

$$= e^x \cdot \frac{1}{(D+2)\left(D^2 + 4\right)} \sin 3x$$

$$= e^{x} \cdot \frac{(D-2)}{(D^2-4)(D^2+4)} \sin 3x$$

$$= e^{x} \cdot \frac{(D-2)\sin 3x}{(-9-4)(-9+4)} \qquad (D^2 \text{ స్థానంలో } -3^2 = -9 \text{ ను వ్రాయగా})$$

$$= \frac{e^{x}}{65} \cdot (3\cos 3x - 2\sin 3x)$$

$\therefore$ సాధారణ సాధన $y = y_c + y_p$

$$y = c_1 e^{-x} + e^{x}\left(c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x\right) + \frac{e^{x}}{65}(3\cos 3x - 2\sin 3x)$$

6.12 సారాంశము:

ఈ పాఠములో స్థిరగుణకాలున్న అశూన్య సమానక ఏకఘాత అవకలన సమీకరణములకు ప్రత్యేక సమాకలనిని కనుగొను వివిధ పద్ధతులను సంబంధిత సిద్ధాంతాల నిరూపణల సందర్భములో చర్చించాము. కొన్ని సమస్యలను కూడా చర్చించాము.

6.12 సాంకేతిక పదాలు:

అశూన్య సమానక, ఏకఘాతీయ, అవకలన సమీకరణము, ప్రత్యేక సమాకలని లేక ప్రత్యేక సాధన, విలోమ పరిక్రియ

6.14 అభ్యాసము:

ఈ క్రింది సమీకరణాలను సాధించుము.

1. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^{x}$

2. $\left(D^3 - 5D^2 + 7D - 3\right)y = e^{2x}\cosh x$

3. $\left(D^3 - 4D^2\right)y = 8$

4. $\left(D^3 - 12D + 16\right)y = \left(e^{-2x} + e^{x}\right)^2$

5. $\left(D^2 + D + 1\right)y = \sin 2x$

6. $\left(D^2 - 4\right)y = \sin^2 x$

7. $\left(D^3+2D^2+D\right)y=e^{2x}+\sin 2x$

8. $\left(D^2-8D+9\right)y=8\cos 5x$

9. $\left(D^2+1\right)y=x$

10. $\left(D^2+3D+2\right)y=x^2$

11. $\left(D^2-4D+4\right)y=8x^2$

12. $\left(D^2+3D+2\right)y=e^{-x}+\cos x+x^2$

13. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-6\dfrac{dy}{dx}+13y=8e^{3x}\sin 2x$

14. $\left(D^2-3D+2\right)y=xe^{3x}+\sin 2x$

15. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-4y=x\sinh x$

16. $\left(D^2-2D+1\right)y=xe^{x}\sin x$

17. $\left(D^2-1\right)y=x^2e^{x}+x\sin x$

18. $\left(D^2+4\right)y=x\sin x$

19. $\left(D^3-7D+6\right)y=(x+1)e^{2x}$

20. $\left(D^2-7D+6\right)y=(1+x)e^{2x}$

6.11 SAQ లకు సమాధానములు:

6.4.11 : $\dfrac{1}{(D+4)}\cos x=\dfrac{1}{D-(-4)}\cos x$

$$=e^{-4x}\int \cos x\cdot e^{4x}dx$$

$$= e^{-4x}\frac{\left[e^{4x}\sin x + 4e^{4x}\cos x\right]}{17}$$

$$= \frac{\sin x}{17} + 4\frac{\cos x}{17}$$

6.6.1 : $\text{P.I.} = \dfrac{1}{(D-2)^3}e^{2x}$

$$= \frac{x^3}{3!}e^{2x} \qquad \left[\because \frac{1}{(D-a)^r}e^{ax} = \frac{x^r}{r!}e^{ax}\right]$$

$$= \frac{x^3}{6}e^{2x}$$

6.7.1 : $\text{P.I.} = \dfrac{1}{D^2+2D+2}\sin x$

$$= \frac{1}{-1+2D+2}\sin x \qquad (D^2 = -1^2 = -1 \text{ తీసుకొనుము})$$

$$= \frac{1}{1+2D}\sin x$$

$$= \frac{1-2D}{(1+2D)(1-2D)}\sin x$$

$$= \frac{(1-2D)}{1-4D^2}\sin x$$

$$= \frac{(1-2D)\sin x}{1-4(-1)} = \frac{\sin x - 2\cos x}{5}$$

6.8.2 SAQ : $\text{P.I.} = \dfrac{1}{D^2+3}x^3 = \dfrac{1}{3\left[1+\dfrac{D^2}{3}\right]}x^3$

$$= \frac{1}{3}\left(1+\frac{D^2}{3}\right)^{-1}x^3$$

$$= \frac{1}{3}\left(1-\frac{D^2}{3}+\frac{D^4}{9}-\cdots\cdots\right)x^3$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^3 - \frac{6x}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^3 - 2x\right)$$

6.16 మాదిరి ప్రశ్నలు:

1. $\left(D^2 - 4D + 3\right)y = \sin 3x \cos 2x$ సాధించుము.
2. $\left(D^2 + 16\right)y = e^{-3x} + \cos 4x$ సాధించుము.
3. $\left(D^2 + a^2\right)y = \cos ax$ సాధించుము.
4. $\left(D^2 + 1\right)y = x^2 \sin 2x$ సాధించుము.
5. $\left(D^4 - 1\right)y = e^x \cos x$ సాధించుము.
6. $\left(D^4 - 2D^3 + D^2\right)y = x^3$ సాధించుము.
7. $\left(D^3 + 2D^2 + D\right)y = e^{2x} + x^2 + x$ సాధించుము.

6.15 అభ్యాసములకు సమాధానములు:

1. $y = (c_1 + c_2 x)e^x + \frac{x^2}{2}e^x$
2. $y = (c_1 + c_2 x)e^x + c_3 e^{3x} + \frac{xe^{3x}}{8} - \frac{x^2}{8}e^x$
3. $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{4x} - x^2$
4. $y = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + c_3 e^{-4x} + \frac{x^2 e^x}{12} + \frac{xe^{-4x}}{36} + \frac{2e^{-x}}{27}$
5. $y = e^{-x/2}\left[c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right] - \frac{1}{13}(2\cos 2x + 3\sin 2x)$
6. $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{16}\cos 2x - \frac{1}{8}$
7. $y = c_1 + (c_2 + c_3 x)e^{-x} + \frac{e^{2x}}{18} + \frac{1}{50}[3\cos 2x - 4\sin 2x]$
8. $y = e^{4x}\left[c_1 \cos\sqrt{7}x + c_2 \sin\sqrt{7}x\right] - \frac{1}{29}[2\cos 5x + 5\sin 5x]$

9. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x$

10. $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2}\left(x^2 - 3x + \frac{7}{2}\right)$

11. $y = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + 2x^2 + 4x + 3$

12. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + xe^{-x} + \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} + \frac{7}{4} + \frac{1}{10}(\cos x + 3\sin x)$

13. $y = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) - 2xe^{3x} \cdot \cos 2x$

14. $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + \frac{e^{3x}}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{20}(3\cos 2x - \sin 2x)$

15. $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} - \left(\frac{x}{3}\sinh x + \frac{2}{9}\cosh x\right)$

16. $y = (c_1 x + c_2)e^{x} + \frac{1}{2}e^{x}[x\cos x + \cos x - \sin x]$

17. $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + \frac{e^{x}}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right] - \frac{x}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$

18. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{x}{3}\sin x - \frac{2}{9}\cos x$

19. $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{2x} + \frac{1}{50}e^{2x}(5x^2 - 2x)$

20. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{6x} - \frac{x}{4}e^{2x} - \frac{1}{16}e^{2x}$

6.17 REFERENCES:

1. S. Sivaiah, Engineering Mathematics Vo. 1
2. M.D. Raisinghnania, Ordinary and Partial Differential Equations
3. Zafar Ahsam, Differential Equations and their Applications.
4. Earl A. Coddington An introduction to ordinary Differential equations.

Lesson Writer

Dr. B. Ramireddy

పాఠము - 7

చలరాశులు గుణకాలుగా గల ద్వి పరిమాణ ఏకఘాతీయ సమీకరణములు

7.1 పాఠ్య లక్ష్యం:

ఇంతకు క్రితం పాఠములలో స్థిరాంకాలు గుణకాలుగా గల సరళ సమీకరణములు సాధించుట నేర్చుకున్నాము. ఈ పాఠములో చలరాశి గుణకాలుగా గల ద్వి పరిమాణ సరళ సమీకరణములు సాధించుట నేర్చుకుందాము.

7.2 పాఠ్య నిర్మాణక్రమం :

ఈ పాఠంలోని అంశాలు

7.3 ఉపోద్ఘాతము :

ఈ పాఠములో చలరాశులు గుణకాలుగా గల ద్వి పరిమాణ సరళ సమీకరణమును సాధించు పద్ధతులను నేర్చుకుంటాము.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=R(x) \text{ ---------- } (1)$$

$P(x), Q(x) \& R(x)$ లు x లో ప్రమేయాలు.

చర్చింపబడిన కొన్ని సమీకరణములు ఈ క్రింద ఇవ్వబడినవి.

1. **కౌషీ - ఆయిలర్ సమీకరణము :**

2. **లెజండర్ సరళ సమీకరణము :**

3. **ఒక సాధన తెలిసినపుడు (1) యొక్క సాధారణ సాధన:**

4. **స్వతంత్రము కాని చలరాశిని మారుస్తూ మరియు మొదటి పరిమాణ అవకలజములను తొలగిస్తూ (1) యొక్క సాధారణ సాధన.**

5. **స్వతంత్ర చలరాశిని మారుస్తూ పరామితుల మార్పు పద్ధతి ద్వారా (1) యొక్క సాధారణ సాధన.**

7.4 కౌషీ - ఆయిలర్ సమీకరణము :

$P_1, P_2, \cdots, P_n$ లు స్థిర పదాలు కలిగిన సమీకరణము

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1}y}{dx^2} + P_2 x^{n-2} \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots\cdots + P_{n-1}x\frac{dy}{dx} + P_n y = Q(x) \cdots\cdots\cdots (2)$$

ను n వ పరిమాణ కౌషీ ఆయిలర్ సమీకరణం అంటారు. మరియు పరికర్త రూపములో

$$\left[x^n D^n + P_1 x^{n-1} D^{n-1} + \cdots + P_{n-1} xD + P_n\right] y = Q(x)$$

ఇక్కడ $D \equiv \frac{d}{dx}$. ఇటువంటి సమీకరణమును సాధించుటలో సాధన పద్ధతులు తెలిసేటట్లుగా సమీకరణము (2) మరియొక సమీకరణముగా మారడానికి కావలసిన ప్రతిక్షేపణ చేస్తాము. ఈ ప్రతిక్షేపణ $x = e^t$ అనునది సమీకరణము (2)ను స్థిర గుణకాలు కలిగిన సరళ సమీకరణముగా మారుస్తుంది.

$x = e^t$ గా తీసుకొనుము. $\log x = t$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{dy}{dt}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) \cdot \frac{dt}{dx} + \frac{dy}{dt}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{x} \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

అలాగా, $x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$, $x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$

అదే విధముగా $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{x^3}\left[\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right]$

$\frac{d}{dx} \equiv D$ తీసుకొనుము.

అవకలన పరికర్త $\frac{d}{dt}$ ని θ తో సూచించగా $\frac{d}{dt} \equiv \theta$ అగును.

$$\frac{d^2}{dt^2} \equiv \theta^2, \frac{d^3}{dt^3} = \theta^3, \cdots\cdots, \frac{d^n}{dt^n} = \theta^n$$

$$x\frac{dy}{dx} = x\,Dy = \theta y$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = x^2D^2y = \left(\theta^2y - \theta y\right) = \theta(\theta-1)\,y$$

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} = x^3D^3y = \theta^3y - 3\theta^2y + 2\theta y = \theta(\theta-1)(\theta-2)\,y$$

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n} = x^nD^ny = \left[\theta(\theta-1)(\theta-2)\cdots(\theta-(n-1))\right]y$$

ఈ విలువలను సమీకరణము **(2)**లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\theta(\theta-1)\cdots\cdot(\theta-(n-1))\,y + P_1\theta(\theta-1)\cdots\cdot(\theta-(n-2))\,y + \cdots\cdot + P_ny = Q\left(e^t\right)$$

లేదా $\left[\theta(\theta-1)\cdots(\theta-n+1)+P_1\theta(\theta-1)\cdots(\theta-n+2)+\cdots+P_n\right]y=Q\left(e^t\right)$

$f(\theta)y=R(t)$

ఇక్కడ $f(\theta)=\theta(\theta-1)\cdots(\theta-n+1)+P_1\theta(\theta-1)\cdots(\theta-n+2)+\cdots+P_n$

మరియు $R(t)=Q\left(e^t\right)$

స్థిర గుణకాలు కలిగిన ఏకఘాత సమీకరణము మరియు పాఠం 6లో వివరించిన పద్ధతులను ఉపయోగించి సాధించవచ్చును.

7.4.1 ఉదాహరణ : $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-4x\dfrac{dy}{dx}+6y=x^5$

సాధన: $x=e^t$ తీసుకొనుము.

$\theta\equiv\dfrac{d}{dt}$ అనుకొనుము. ఇచ్చిన సమీకరణము

$$\theta(\theta-1)y-4\theta y+6y=\left(e^t\right)^5$$

i.e. $\left(\theta^2-5\theta+6\right)y=e^{5t}$

A.E. $m^2-5m+6=0\Rightarrow(m-2)(m-3)=0\Rightarrow m=2,3$

$\therefore$ CF $y_c=c_1e^{2t}+c_2e^{3t}=c_1x^2+c_2x^3$

$$\text{P.I.}=y_p=\frac{1}{\theta^2-5\theta+6}e^{5t}=\frac{1}{5^2-5\cdot5+6}e^{5t}=\frac{1}{6}e^{5t}=\frac{x^5}{6}$$

$\therefore$ సాధారణ సాధన $y=y_c+y_p$

$$y=c_1x^2+c_2x^3+\frac{x^5}{6}$$

7.4.2 ఉదాహరణ : $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x\dfrac{dy}{dx}-4y=2\log x$ సాధించుము.

స్థిర గుణకాలు కలిగిన ఏకఘాత సమీకరణము మరియు పాఠం 6లో వివరించిన పద్ధతులను ఉపయోగించి సాధించవచ్చును.

7.4.1 **ఉదాహరణ :**

సాధన: $x = e^t$ తీసుకొనగా $t = \log x$.

$\theta \equiv \frac{d}{dt}$ అనుకొనుము.

అపుడు సమీకరణము ఈ విధముగా మారును.

$$(\theta-1)y - 2\theta y - 4y = 2t$$

$$\left(\theta^2 - 3\theta - 4\right)y = 2t$$

A.E. $m^2 - 3m - 4 = 0 \Rightarrow (m-4)(m+1) = 0 \Rightarrow m = 4, -1$

C.F. $y_c = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t} = c_1 x^4 + \frac{c_2}{x}$

P.I. $y_p = \dfrac{1}{\theta^2 - 3\theta - 4} 2t = \dfrac{1}{-4\left[1 - \dfrac{\theta^2 - 3\theta}{4}\right]} 2t$

$$= \frac{2}{-4}\left[1 - \frac{\theta^2 - 3\theta}{4}\right]^{-1} t$$

$$= -\frac{1}{2}\left[1 + \frac{\theta^2 - 3\theta}{4} + \cdots\right] t$$

$$= -\frac{1}{2}\left[t - \frac{3}{4}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} - \log x\right)$$

$\therefore$ సాధారణ సాధన $y = y_c + y_p$

$$y = c_1 x^4 + \frac{c_2}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} - \log x\right)$$

7.4.3 ఉదాహరణ: $x^3\dfrac{d^3y}{dx^2}+3x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+8y=65\cos(\log x)$ సాధించుము.

సాధన : $x=e^t$ తీసుకొనగా $t=\log x$ $\theta=\dfrac{d}{dt}$ అనుకొనుము.

ఇచ్చిన సమీకరణము ఈ విధంగా మారును.

$$\theta(\theta-1)(\theta-2)y+3\theta(\theta-1)y+\theta y+8y=65\cos t$$

i.e. $\left(\theta^3+8\right)y=65\cos t$

A.E. $m^3+8=0$

$$\Rightarrow (m+2)\left(m^2-2m+4\right)=0$$

$$\Rightarrow m=-2,\ 1\pm\sqrt{3}i$$

C.F. $y_c=c_1e^{-2t}+e^t\left[c_2\cos\sqrt{3}t+c_3\sin\sqrt{3}t\right]$

$$=c_1\left(\frac{1}{x^2}\right)+x\left[c_2\cos\left(\sqrt{3}\log x\right)+c_3\sin\left(\sqrt{3}\log x\right)\right]$$

P.I. $=y_p=\dfrac{1}{\theta^3+8}65\cos t$

$$=\frac{1}{\theta(-1)^2+8}65\cos t=\frac{1}{8-\theta}65\cos t$$

$$=\frac{8+\theta}{(8-\theta)(8+\theta)}65\cos t=\frac{8+\theta}{64-\theta^2}65\cos t$$

$$=\frac{8+\theta}{64-\left(-1^2\right)}65\cos t=\cancel{65}\cdot\frac{(8+\theta)}{\cancel{65}}\cos t$$

$$=8\cos t-\sin t$$

$$=8\cos(\log x)-\sin(\log x)$$

$\therefore$ సాధారణ సాధన $y = y_c + y_p$

$$y = \frac{c_1}{x^2} + x\left[c_2 \cos(3\log x) + c_3 \sin\left(\sqrt{3}\log x\right) + 8\cos(\log x) - \sin(\log x)\right]$$

7.4.4 ఉదాహరణ: $x^2D^2y - xDy - 3y = x^2 \log x$ సాధించుము.

సాధన: $x = e^t$ తీసుకొనగా $t = \log x$

$\theta \equiv \frac{d}{dt}$, అనుకొనుము.

ఇచ్చిన సమీకరణము ఈ విధముగా మారును.

$$\theta(\theta-1)y - \theta y - 3y = \left(e^t\right)^2 t$$

$$\left(\theta^2 - 2\theta - 3\right)y = t\, e^{2t}$$

A.E. $m^2 - 2m - 3 = 0 \Rightarrow (m-2)(m+1) = 0 \Rightarrow m = 2, -1$

C.F. $y_c = c_1e^{-t} + c_2e^{2t} = c_1x^{-1} + c_2x^2$

$$= \frac{c_1}{x} + c_2x^2$$

P.I. $= y_p = \dfrac{1}{\theta^2 - 2\theta - 3} t\, e^{2t}$

$$= e^{2t} \cdot \frac{1}{(\theta+2)^2 - 2(\theta+2) - 3}\, t$$

$$= e^{2t} \cdot \frac{1}{\theta^2 + 4\theta + 4 - 2\theta - 4 - 3} \cdot t$$

$$= e^{2t} \cdot \frac{1}{\theta^2 + 2\theta - 3} t$$

$$= e^{2t} \cdot \frac{1}{(-3)\left[1 - \frac{2}{3}\theta - \frac{1}{3}\theta^2\right]} t$$

$$= \frac{e^{2t}}{-3}\left(1-\left(\frac{2}{3}\theta+\frac{1}{3}\theta^2\right)\right)^{-1} t$$

$$= \frac{e^{2t}}{-3}\left(1+\frac{2}{3}\theta+\frac{1}{3}\theta^2+\cdots\right)t$$

$$= \frac{e^{2t}}{-3}\left(t+\frac{2}{3}\right)=\frac{x^2}{-3}\left(\log x+\frac{2}{3}\right)$$

$\therefore$ సాధారణ సాధన $y = y_c + y_p$

$$y = \frac{c_1}{x} + c_2 x^3 - \frac{1}{3}x^2\left(\log x + \frac{2}{3}\right)$$

7.4.5 ఉదాహరణ: $x^3D^3y + 3x^2D^2y + xDy + y = x + \log x$ సాధించుము.

సాధన: $x = e^t$ తీసుకొనగా $t = \log x$

$\theta \equiv \frac{d}{dt}$ అనుకొనగా ఇచ్చిన సమీకరణము ఈ విధముగా మారును.

$$\theta(\theta-1)(\theta-2)y + 3\theta(\theta-1)y + \theta y + y = e^t + t$$

$$(\theta^3+1)y = e^t + t$$

A.E. $m^3 + 1 = 0 \Rightarrow (m+1)(m^2 - m + 1) = 0$

$$m = -1, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

C.F. $y_c = c_1 e^{-t} + e^{\frac{1}{2}t}\left[c_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + c_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]$

$$= c_1 x^{-1} + \sqrt{x}\left[c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x\right) + c_3 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x\right)\right]$$

P.I. $y_p = \frac{1}{\theta^3+1}(e^t + t) = \frac{1}{\theta^3+1}e^t + \frac{1}{\theta^3+1}t$

$$=\frac{1}{1^3+1}e^t+\left(1+\theta^3\right)^{-1}t$$

$$=\frac{1}{2}e^t+\left(1-\theta^3+\theta^6-\cdots\right)t$$

$$=\frac{1}{2}e^t+t$$

$$=\frac{1}{2}x+\log x$$

ఇచ్చిన సమీకరణమునకు సాధారణ సాధన

$$y=y_c+y_p=c_1x^{-1}+\sqrt{x}\left[c_2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x\right)+c_3\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x\right)\right]+\frac{1}{2}x+\log x$$

7.7.5 లెజండర్ ఏకఘాతీయ అవకలన సమీకరణం :

$P_1, P_2, \cdots, P_n$ లు స్థిరాంకాలు మరియు x లో ప్రమేయం $Q(x)$ అయితే సమీకరణం

$$(ax+b)^n\frac{d^ny}{dx^n}+P_1(ax+b)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+P_ny=Q(x) \text{ ---------- (1) }$$ ను

లెజండర్ ఏక ఘాతీయ అవకలన సమీకరణం అంటారు.

$(ax+b)=e^t$, లేక సమార్థకంగా $t=\log(ax+b)$ ప్రతిక్షేపణతో ఇలాంటి సమీకరణమును స్థిర గుణకాలు గల ఏక ఘాతీయ సమీకరణములుగా మార్చవచ్చును.

$\theta=\frac{d}{dt}$ అయితే

$$Dy=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{a}{ax+b}\frac{dy}{dt}=\frac{a}{ax+b}\theta y$$ ాఎజి $$(ax+b)Dy=a\theta y$$

$$D^2y=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{a}{ax+b}\cdot\frac{dy}{dt}\right)$$

$$=\frac{a}{ax+b}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)+\frac{dy}{dt}\left(\frac{-a^2}{(ax+b)^2}\right)$$

$$=\frac{a}{ax+b}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{dt}{dx}-\frac{a^2}{(ax+b)^2}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$=\frac{a}{ax+b}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{a}{ax+b}-\frac{a^2}{(ax+b)^2}\frac{dy}{dt}$$

$$=\frac{a^2}{(ax+b)^2}\left[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dx}\right]=\frac{a^2}{(ax+b)^2}\left(\theta^2y-\theta y\right)$$

$$(ax+b)^2D^2y=a^2\left(\theta^2y-\theta y\right)=a^2\theta(\theta-1)y$$

అదే విధముగా $(ax+b)^3D^3y=a^3\theta(\theta-1)(\theta-2)y$

మరియు $(ax+b)^nD^ny=a^n\theta(\theta-1)(\theta-2)\cdots\cdots(\theta-n+1)y$

సమీకరణము (1)లో ఈ మార్పులు చేసిన తరువాత స్థిర గుణకాలు కలిగిన ఏకఘాతీయ సమీకరణము వస్తుంది.

7.5.1 S.A.Q. : (1) $x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$ సాధించుము.

7.5.2 **ఉదాహరణ :** $(1+x)^2\frac{d^2y}{dx^2}+(1+x)\frac{dy}{dx}+y=2\sin\left[\log(1+x)\right]$

సాధన: $1+x=e^t,\ t=\log(1+x)$ తీసుకొనుము మరియు

$$\theta=\frac{d}{dt}(1+x)\ \frac{dy}{dx}=1\theta y$$

$$(1+x)^2\frac{d^2y}{dx^2}=1^2\theta(\theta-1)y$$

ఇచ్చిన సమీకరణములో ఈ విలువలను ప్రతిక్షేపించగా

$$\theta(\theta-1)y+\theta y+y=2\sin t$$

$$\left(\theta^2+1\right)y=2\sin t$$

ఇది స్థిర గుణకాలు గల ఏక ఘాతీయ సమీకరణము

A.E. $m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m = \pm i$

C.F. $y_c = c_1 \cos t + c_2 \sin t$

$$= c_1 \cos(\log(1+x)) + c_2 \sin[\log(1+x)]$$

P.I. $y_p = \frac{1}{\theta^2 + 1} 2 \sin t = \cancel{2} \cdot \frac{-t}{\cancel{2}} \cos t = -t \cos t$

$$= -\log(1+x) \cos[\log(1+x)]$$

ఇచ్చిన సమీకరణమునకు సాధారణ సాధన $y = y_c + y_p$

$$y = c_1 \cos[\log(1+x)] + c_2 \sin[\log(1+x)] - \log(1+x) \cos[\log(1+x)]$$

7.6 చలరాశులు గుణకాలుగా గల ద్వి పరిమాణ సరళ అవకలన సమీకరణాలకు సాధారణ సాధన:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R \text{ --------- (1)}$$

సమీకరణంలోని సమ ఘాతీయ సమీకరణానికి ఒక సాధన తెలిసినపుడు సాధారణ సాధన కనుగొనుట.

(1) యొక్క శూన్య సమానక సమీకరణము యొక్క సాధన u అనుకొనుము.

(1) యొక్క సాధారణ సాధన $y = uv$ అనుకొనుము. కనుగొనవలసిన v అనునది xలో ప్రమేయము.

$$\frac{dy}{dx} = u'v + uv'$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = u''v + 2u'v' + uv''$$

ఈ విలువలను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా,

$$(u''v + 2u'v' + uv'') + P(u'v + uv') + Quv = R$$

$$(u'' + Pu' + Qu)v + uv'' + (2u' + Pu)v' = R \text{ ----------- (2)}$$

శూన్య సమానక సమీకరణం (1)కి u సాధన కావున

$$u'' + Pu' + Qu = 0$$

$u\frac{d^2v}{dx^2}+\left(2\frac{du}{dx}+Pu\right)\frac{dv}{dx}=R$ గా (2)గా మార్పు చెందును.

$\frac{dv}{dx}=w$ గా వ్రాయుము.

$$u\frac{dw}{dx}+\left(2\frac{du}{dx}+Pu\right)w=R$$

$$u\frac{dw}{dx}+\left(2\frac{du}{dx}+Pu\right)w=R$$

$$\frac{dw}{dx}+\left(\frac{2}{u}\frac{du}{dx}+P\right)w=\frac{R}{u} \text{ --------- (3)}$$

ఇది w మరియు x లలో ఏక ఘాతీయ సమీకరణం

దాని సమాకలన గుణకము

$$\text{I.F.}=e^{\int\left(P+\frac{2}{u}\frac{du}{dx}\right)dx}=e^{\int Pdx+2\log u}=e^{\int Pdx}\cdot e^{\log u^2}$$

$$=e^{\int Pdx}\cdot u^2$$

(3) యొక్క సాధన

$$w\cdot e^{\int Pdx}\cdot u^2=\int\left(\frac{R}{u}u^2e^{\int Pdx}\right)dx+c_1$$

$$w=\frac{dv}{dx}=\frac{e^{-\int Pdx}}{u^2}\int\left(Ru\,e^{\int Pdx}\right)dx+c_1\frac{e^{-\int Pdx}}{u^2}$$

పై అవకలన సమీకరణమును సమాకలనము చేయగా

$$v=\int\left\{\frac{e^{-\int Pdx}}{u^2}\int\left(Rue^{\int Pdx}\right)dx\right\}dx+c_1\int\frac{e^{-\int Pdx}}{u^2}dx+c_2$$

$y=uv,$ సమీకరణములో v వవిలువను వ్రాయగా, సమీకరణము (1) యొక్క సాధారణ సాధన వచ్చును.

$$y = u\left[\int\left\{\frac{e^{-\int Pdx}}{u^2}\int Rue^{\int Pdx}dx\right\}dx + c_1\int\frac{e^{-\int Pdx}}{u^2}dx + c_2\right]$$

$$y = c_2u + c_1u\int\frac{e^{-\int Pdx}}{u^2}dx + u\int\left\{\frac{e^{-\int Pdx}}{u^2}\int Rue^{\int Pdx}dx\right\}dx$$

7.6.2 : పూరక ప్రమేయము (C.F.)కు చెందిన సమాకలని కనుగొనుటకు నియమాలు i.e. $y'' + Py' + Qy = 0$ యొక్క సాధన.

7.6.3 : నియమము **(1)** $a^2 + Pa + Q = 0$ అయితే $y'' + Py' + Qy = 0$ యొక్క సాధన $y = e^{ax}$

ఉపపత్తి: $y = e^{ax} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ae^{ax}, \; \frac{d^2y}{dx^2} = a^2 \cdot e^{ax}$

ఈ విలువలను $y'' + Py' + Qy = 0$ లో ప్రతిక్షేపించగా

$$a^2e^{ax} + Pae^{ax} + Qe^{ax} = 0$$

$$\Rightarrow e^{ax}\left(a^2 + Pa + Q\right) = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + Pa + Q = 0 \qquad \left(\because e^{ax} \neq 0\right)$$

Case (i) : $a = 1$ తీసుకొనగా $1 + P + Q = 0$ అయితే $y = e^x$ సాధన

case (ii) : $a = -1$ తీసుకొనగా $1 - P + Q = 0$ అయితే $y = e^{-x}$ సాధన

7.6.4 నియమము II : $y = x^m \Rightarrow \frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$ మరియు $\frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$ అనునది

$m(m-1) + Pmx + Qx^2 = 0$ జీద్గా $y'' + Py' + Qy = 0$ యొక్క సాధన?

ఉపపత్తి : $m(m-1) + Pmx + Qx^2 = 0$ అయితే $y'' + Py' + Qy = 0$ యొక్క సాధన $y = x^m$

ఈ విలువలను $y'' + Py' + Qy = 0$లో ప్రతిక్షేపించగా

$$m(m-1)x^{m-2} + Pmx^{m-1} + Qx^m = 0$$

$$\Rightarrow x^{m-2}\left[m(m-1)+Pmx+Qx^2\right]=0$$

$$\Rightarrow m(m-1)+Pmx+Qx^2=0$$

Case (i) : $m=1$ తీసుకొనగా, $P+Qx=0$ అయితే $y=x$ సాధన

case (ii) : $m=2$ తీసుకొనగా, $2+2Px+Qx^2=0$ అయితే $y=x^2$ సాధన

7.6.5 : $y''+PY+Q=0$ యొక్క ఒక సాధన ద్వారా $y''+Py+Q=R$ యొక్క సాధారణ సాధన కనుగొనుట:

Step 1 : సమీకరణమును ప్రామాణిక రూపము $y''+Py'+Qy=R$ లో వ్రాయవలెను.

ఇక్కడ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ యొక్క గుణకము ఒకటి.

Step 2 : ఈ క్రింది వాటి నుపయోగించి సంబంధిత శూన్య సమాపక సమీకరణం యొక్క ఒక సమాకలని uను కనుగొనుము.

(i) $u=e^x$ అయితే $1+P+Q=0$

(ii) $u=e^{-x}$ అయితే $1-P+Q=0$

(iii) $u=e^{ax}$ అయితే $a^2+aP+Q=0$

(iv) $u=x$ అయితే $P+Qx=0$

(v) $u=x^2$ అయితే $2+2Px+Qx^2=0$

(vi) $u=x^m$ అయితే $m(m-1)+Pmx+Qx^2=0$

ప్రశ్నలో సాధన u ఇచ్చినట్లయితే ఈ step ను వదిలివేయవలెను.

Step 3 : ఇచ్చిన సమీకరణమునకు సంపూర్ణ సాధన $y=uv$ గా తీసుకొనుము.

ఇచ్చిన సమీకరణము ఈ క్రింది విధముగా మారును.

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\left(P+\frac{12}{u}\frac{du}{dx}\right)\frac{dv}{dx}=\frac{R}{u} \text{ ------------ (1)}$$

Step 4 : $\frac{dv}{dx} = w$ తీసుకొనగా $\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{dw}{dx}$

(1)లలో ఈ విలువలను ప్రతిక్షేపించగా

$$\frac{dw}{dx} + \left(P + \frac{2}{u}\frac{du}{dx}\right)w = \frac{R}{u}$$

లేక $\frac{dw}{dx} + P_1 w = R_1$, $P_1 = P + \frac{2}{u}\cdot\frac{du}{dx}$, $R_1 = \frac{R}{u}$.

ఇది w లో ప్రథమ పరిమాణ ఏక ఘాతీయ సమీకరణము మరియు w ని సాధించవచ్చును.

$\frac{dv}{dx} = w$ కావున v ని సమాకలనముతో రాబట్టవచ్చును.

7.6.6 S.A.Q.: $x^2y'' - 2x(1+x)y' + 2(1+x)y = x^3$ సమీకరణము యొక్క శూన్య సమానక సమీకరణం యొక్క ఒక సాధన u కనుగొనుము.

7.6.7 **ఉదాహరణ:** $\sin x\frac{d^2y}{dx^2} = 2y$, ను సాధించుము. $y = \cot x$ ఇచ్చిన సాధన

సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణమునకు ప్రామాణిక రూపము

$$y'' + 0y' - 2\left(\operatorname{cosec}^2 x\right)y = 0$$

$y'' + Py' + Qy = R$, తో దీనిని పోల్చగా

$$P = 0,\ Q = -2\operatorname{cosec}^2 x,\ R = 0 \text{ ------------- (1)}$$

$u = \cot x$ ఇచ్చిన సాధన

ఇచ్చిన సమీకరణమునకు $y = uv$ సంపూర్ణ సాధన అనుకొనుము.

v ని ఈ విధముగా ఇవ్వవచ్చును.

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \left(P + \frac{2}{u}\frac{du}{dx}\right)\frac{dv}{dx} = \frac{R}{u},\ u = \cot x.$$

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\left[0+\frac{2}{\cot x}\left(-\operatorname{cosec}^2 x\right)\right]\frac{dv}{dx}=0 \text{ ---------- (2)}$$

$\frac{dv}{dx}=w$ తీసుకొనగా $\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{dw}{dx}$

ఈ విలువలను (2)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\frac{dw}{dx}-2\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}\ w=0$$

$$\frac{dw}{dx}-\frac{4}{\sin 2x}w=0 \text{ or } \frac{dw}{dx}=\frac{4}{\sin 2x}w$$

or $\quad \frac{dw}{w}=4\operatorname{cosec}2x\cdot dx$

సమాకలనము చేయగా

$$\int\frac{dw}{w}=4\int\operatorname{cosec}2x\,dx$$

$$\Rightarrow \log w = {}^{2}\cancel{4}\,\frac{\log\tan x}{\cancel{2}}+\log c_1$$

$$\Rightarrow \log w=\log\left(c_1\tan^2 x\right)$$

$$w=\frac{dv}{dx}=c_1\tan^2 x$$

$$\Rightarrow dv=c_1\tan^2 x dx$$

సమాకలనము చేయగా

$$\int dv=c_1\int\tan^2 dx=c_1\int\left(\sec^2 x-1\right)dx$$

$$v=c_1(\tan x-x)+c_2$$

కావలసిన సంపూర్ణ సాధన $y=uv$

$$y=\cot x\left[c_1(\tan x-x)+c_2\right]=c_1(1-x\cot x)+c_2\cot x$$

7.6.8 ఉదాహరణ: $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{x}{x-1}\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x-1}=x-1$ సాధించుము.

సాధన: $y''+Py'+Qy=R$ తో ఇచ్చిన సమీకరణమును పోల్చగా

$$P=\frac{-x}{x-1},\ Q=\frac{1}{x-1},\ R=x-1$$

ఇక్కడ $1+P+Q=1-\frac{x}{x-1}+\frac{1}{x-1}=\frac{x-1-x+1}{x-1}=0$

$\therefore u=e^x$ అనునది పూరక ప్రమేయములో భాగము.

$y=uv$ సంపూర్ణ సాధన అనుకొనుము.

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\left(P+\frac{2}{u}\frac{du}{dx}\right)\frac{dv}{dx}=\frac{R}{u} \text{ ----------- (1)}$$

$$P+\frac{2}{u}\frac{du}{dx}=\frac{-x}{x-1}+\frac{2}{e^x}e^x=\frac{-x}{x-1}+2=\frac{-x+2x-2}{x-1}=\frac{x-2}{x-1}$$

$$\frac{R}{u}=\frac{x-1}{e^x}$$

$\frac{dv}{dx}=w$ తీసుకొనగా $\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{dw}{dx}$

సమీకరణము (1) ఈ విధముగా మారును.

$$\frac{dw}{dx}+\frac{x-2}{x-1}w=\frac{x-1}{e^x} \text{ ----------- (2)}$$

ఇది ఏకఘాత సమీకరణము

$$\text{I.F.}=e^{\int\frac{x-2}{x-1}dx}=e^{\int\left(1-\frac{1}{x-1}\right)dx}=e^{x-\log(x-1)}=e^x.e^{\log(x-1)^{-1}}=\frac{e^x}{x-1}$$

(2) యొక్క సాధన

$$w.\text{I.F.}=\int\frac{x-1}{e^x}\,\text{I.F.}dx+c_1$$

$$w\frac{e^{x}}{x-1}=x+c_{1}$$

$$w=e^{-x}\left[x^{2}-x+c_{1}(x-1)\right]$$

$$w=\frac{dv}{dx}=e^{-x}\left[x^{2}-x+c_{1}(x-1)\right]$$

$$dv=e^{-x}\left(x^{2}-x+c_{1}(x-1)\right)dx$$

$$\therefore v=\int\left[x^{2}-x+c_{1}(x-1)\right]e^{-x}dx$$

$$=\left[x^{2}-x+c_{1}(x-1)\right]\left(-e^{-x}\right)-\left(2x-1+c_{1}\right)\left(e^{-x}\right)+2\left(-e^{-x}\right)+c_{2}$$

$$=-\left[x^{2}-x+c_{1}(x-1)\right]e^{-x}-\left(2x-1+c_{1}\right)e^{-x}-2e^{-x}+c_{2}$$

సాధారణ సాధన $y=uv=e^{x}\cdot v$

$$=-\left[x^{2}-x+c_{1}(x-1)\right]-\left(2x-1+c_{1}\right)-2+c_{2}e^{x}$$

$$=c_{1}x+c_{2}e^{x}-\left(x^{2}+x+1\right)$$

7.6.9 ఉదాహరణ : $x^{2}\frac{d^{2}y}{dx^{2}}-\left(x^{2}+2x\right)\frac{dy}{dx}+(x+2)y=x^{3}e^{x}$ సాధించుము.

సాధన : ప్రామాణిక రూపములో ఇచ్చిన సమీకరణము

$$\frac{d^{2}y}{dx^{2}}-\left(\frac{x^{2}+2x}{x^{2}}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{x+2}{x^{2}}\right)y=x\,e^{x}$$

$y''+Py'+Qy=R$ ను ప్రామాణిక రూపముతో పోల్చగా

$$P=-\left(\frac{x^{2}+2x}{x^{2}}\right),\ Q=\frac{x+2}{x^{2}},\ R=xe^{x}$$

$$P+Qx=-\left(\frac{x^{2}+2x}{x^{2}}\right)+\frac{(x+2)x}{x^{2}}=\frac{-x^{2}-2x+x^{2}+2x}{x^{2}}=0$$

$\therefore u = x$ అనునది C.F.లో భాగము

$y = uv$ సంపూర్ణ సాధన అనుకొనగా v విలువ

$$\frac{d^2v}{dx^2} + P_1\frac{dv}{dx} = R_1 \text{ -------- (1)}$$

$$P_1 = \left(P + \frac{2}{u}\frac{du}{dx}\right), R_1 = \frac{R}{u}$$

$$P_1 = \left(P + \frac{2}{u}\frac{du}{dx}\right) = \frac{-\left(x^2 + 2x\right)}{x^2} + \frac{2}{x}.1 \qquad = \frac{-x^2 - 2x + 2x}{x^2} = -1$$

$$R_1 = \frac{R}{u} = \frac{xe^x}{x} = e^x$$

$\frac{dv}{dx} = w$ అనుకొనగా సమీకరణము (1) ఈ క్రింది విధముగా మారును.

$$\frac{dw}{dx} + P_1 w = R_1 \text{ శీతీ } \frac{dw}{dx} - w = e^x.$$

ఇది ఏకఘాత సమీకరణము

$$\text{I.F.} = e^{\int -1dx} = e^{-x}$$

(1) యొక్క సాధన $w\,e^{-x} = \int e^x \cdot e^{-x}\,dx + c_1$

$$we^{-x} = x + c_1$$

$$w = xe^x + c_1e^x$$

$$\frac{dv}{dx} = w = xe^x - c_1e^x$$

$$dv = \left(xe^x + c_1e^x\right)dx$$

సమాకలనము చేయగా

$$\int dv = \int\left(xe^x + c_1e^x\right)dx$$

$$v = xe^x - e^x + c_1e^x + c_2$$

సాధారణ సాధన $y = uv$

$$y = x\left[xe^x - e^x + c_1e^x + c_2\right]$$

$$= c_1xe^x + c_2x + e^x\left(x^2 - x\right)$$

7.6.10 ఉదాహరణ: $(x+2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - (2a+5)\dfrac{dy}{dx} + 2y = (x+1)e^x$ సాధించుము.

సాధన: ప్రామాణిక రూపములో ఇచ్చిన సమీకరణము

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2x+5}{x+2}\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x+2}y = \frac{(x+1)e^x}{x+2}$$

దీనిని ప్రామాణిక రూపము $y'' + Py' + Qy = R$ తో పోల్చగా

$$P = -\frac{2x+5}{x+2},\ Q = \frac{2}{x+2},\ R = \frac{(x+1)e^x}{x+2} \text{ --------- (1)}$$

$$2^2 + 2P + Q = 4 + 2\cdot\left(\frac{-(2x+5)}{x+2}\right) + \frac{2}{x+2}$$

$$= \frac{4x+8-4x-10+2}{x+2} = 0$$

$\therefore u = e^{2x}$ అనునది పూరక ప్రమేయములో భాగము

$y = uv$ సాధారణ సాధన అనుకొనుము.

v విలువ $\dfrac{d^2v}{dx^2} + P_1\dfrac{dv}{dx} = R_1$

$$P_1 = P + \frac{2}{u}\frac{du}{dx},\ R_1 = \frac{R}{u} \text{ మరియు } u = e^{2x} \text{ --------- (2)}$$

$$P_1 = \frac{-(2x+5)}{x+2} + \frac{2}{e^{2x}}\cdot 2e^{2x} = \frac{-2x-5+4x+8}{x+2} = \frac{2x+3}{x+2}$$

$$R_1 = \frac{(x+1)e^x}{x+2}\,\frac{1}{e^{2x}} = \frac{x+1}{x+2}\cdot e^{-x}$$

ఈ విలువలను సమీకరణము (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2x+3}{x+2}\frac{dv}{dx} = \frac{x+1}{x+2}e^{-x} \text{ ---------- (3)}$$

$\frac{d\theta}{du} = w$ తీసుకొనగా $\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{dw}{dx}$ ఈ విలువను పై సమీకరణము (3)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\frac{dw}{dx} + \frac{2x+3}{x+2}w = \frac{x+1}{x+2}e^{-x}$$ ఇది ఏకఘాత సమీకరణము

$$\text{I.F.} = e^{\int \frac{2x+3}{x+2}dx} = e^{\int\left(2-\frac{1}{x+2}\right)dx} = e^{2x-\log(x+2)} = e^{2x(x+2)^{-1}}$$

$$= \frac{e^{2x}}{x+2}$$

$$\text{w.I.F.} = \int\left(\frac{x+1}{x+2}e^{-x}\ \text{I.F.}\right)dx + c_1$$

$$w\frac{e^{2x}}{x+2} = \int \frac{x+1}{x+2}e^{-x}\cdot\frac{e^{2x}}{x+2}dx + c_1$$

$$= \int e^x\left[\frac{1}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2}\right]dx + c_1 = \frac{e^x}{x+2} + c_1$$

$$\therefore \frac{dv}{dx} = w = e^{-x} + c_1(x+2)e^{-2x}$$

$$\therefore v = \int\left(e^{-x} + c_1(x+2)e^{-2x}\right)dx + c_2 = -e^{-x} + c_1\left[(x+2)\left(\frac{-e^{-2x}}{2}\right) - 1\cdot\frac{e^{-2x}}{4}\right] + c_2$$

$$= -e^{-x} - c_1e^{-2x}\left(\frac{2x+5}{4}\right) + c_2$$

7.6.11 ఉదాహరణ : $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-a^2y=0$ సాధించుము. $u=e^{a\sin^{-1}x}$ సాధన ఇవ్వబడినది.

ప్రామాణిక రూపములో ఇచ్చిన సమీకరణము

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{x}{1-x^2}\frac{dy}{dx}-\frac{a^2}{1-x^2}y=0$$

దీనిని ప్రామాణిక రూపము $y''+Py'+Qy=R$ తో పోల్చగా

$$P=\frac{-x}{1-x^2},\ Q=\frac{-a^2}{1-x^2},\ R=0$$

$u=e^{a\sin^{-1}x}$ పూరక ప్రమేయములో భాగముగా ఇవ్వబడినది.

$y=uv$ సాధారణ సాధన అనుకొనుము. v ఈ విధముగా ఇవ్వబడినది.

$$\frac{d^2v}{dx^2}+P_1\frac{dv}{dx}=R_1 \text{------------ (2)}$$

$$P_1=P+\frac{2}{u}\frac{du}{dx},R_1=\frac{R}{u}$$ మరియు $u=e^{a\sin^{-1}x}$

$$P_1=\frac{-x}{1-x^2}+\frac{2}{e^{a\sin^{-1}x}}\cdot e^{a\sin^{-1}x}\cdot\frac{a}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{1-x^2}+\frac{2a}{\sqrt{1-x^2}}$$

$R_1=0$

$\therefore$ సమీకరణము (2)

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\left(\frac{-x}{1-x^2}+\frac{2a}{\sqrt{1-x^2}}\right)\frac{dv}{dx}=0 \text{ ----------- (3)}$$

$\frac{dv}{dx}=w$ తీసుకొనగా $\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{dw}{dx}$ (3) ఈ క్రింది విధముగా మారును.

$$\frac{dw}{dx}+\left(\frac{-x}{1-x^2}+\frac{2a}{\sqrt{1-x^2}}\right)w=0$$ ఇది ఏకఘాత సమీకరణము

$$\frac{dw}{w} = \left(\frac{x}{1-x^2} - \frac{2a}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dw}{w} = \int \left(\frac{x}{1-x^2} - \frac{29}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

$$\log w = -\frac{1}{2} \log\left(1-x^2\right) - 2a \sin^{-1} x + \log c_1$$

$$= \log \frac{c_1}{\sqrt{1-x^2}} - 2a \sin^{-1} x$$

$$\therefore \frac{dv}{dx} = w = e^{\left[\log \frac{c_1}{\sqrt{1-x^2}} - 2a \sin^{-1} x\right]} = \frac{c_1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot e^{-2a \sin^{-1} x}$$

$$\text{ఎ} \;= \int \frac{c_1}{\sqrt{1-x^2}} e^{-2a \sin^{-1} x} dx + c_2 = \frac{c_1}{-2a} e^{-2a \sin^{-1} x} + c_2$$

$\therefore$ సాధారణ సాధన $y = uv = e^{a \sin^{-1} x} \cdot v$

$$y = \frac{-c_1}{2a} e^{-a \sin^{-1} x} + c_2 e^{a \sin^{-1} x}$$

7.7 k Íe ö q « sÅ | ë π (Normal Form) :

ఆశ్రిత చలరాశి y మార్పుడము ద్వారా మరియు ప్రథమ అవకలజమును తొలగించి

$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R$ **యొక్క సాధారణ సాధన కనుగొనుట.**

$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R$ ---------- (1) తీసుకొనుము.

$y = uv$ ------------- (2) అనునది (1) యొక్క సాధారణ సాధన అనుకొనుము. u, v లు x లో ప్రమేయములు.

$$\frac{dy}{dx} = uv' + vu'$$

మరియు $\dfrac{d^2y}{dx^2} = uv'' + 2u'v' + vu''$ ---------- (3)

(2) మరియు (3) యొక్కవిలువలను (1)లోప్రతిక్షేపించగా

$$uv'' + 2u'v' + vu'' + P(uv' + vu') + Quv = R$$

$$uv'' + [Pu + 2u']v' + [u'' + Pu' + Qu]v = R \text{ ----------- (4)}$$

$Pu + 2u' = 0$ ------- (5) అయ్యేటట్లుగా (4)లోప్రథమ అవకలజము $\dfrac{dy}{dx}$ ను తొలగించుటకు u ను ఎన్నుకొనవలెను.

$$\text{i.e. } Pu + 2\frac{du}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{P}{2}u \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{-P}{2}dx$$

$\Rightarrow$ సమాకలనము చేయగా $\log u = -\dfrac{1}{2}\int P dx \Rightarrow u = e^{-\frac{1}{2}\int P dx}$

(5) నుండి $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{-1}{2}Pdu$

$$u'' = \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{-1}{2}P\frac{du}{dx} - \frac{1}{2}u\frac{dP}{dx} = \frac{-1}{2}P\left[-\frac{1}{2}Pu\right] - \frac{1}{2}u\frac{dP}{dx}$$

$$u'' = \frac{P^2u}{4} - \frac{1}{2}u\frac{dP}{dx} \text{ ---------- (6)}$$

(5) నుండి (6) యొక్క విలువలను (4)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$uv'' + \left[\frac{P^2u}{4} - \frac{1}{2}u\frac{dP}{dx} - \frac{1}{2}P^2u + Qu\right]v = R$$

$$\Rightarrow v'' + \left[Q - \frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{2}\frac{dP}{dx}\right]v = \frac{R}{u}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} + Iv = S \text{ ---------- (7)}$$

$$I = Q - \frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{2}\frac{dP}{dx}$$ మరియు $$S = \frac{R}{u}$$

సమీకరణము (7)ను (1) యొక్క సామాన్య రూపము అంటారు.

$I = K$ స్థిరాంకము లేక $I = \frac{K}{x^2}$ అయితే (7) యొక్క సాధన తెలిసిన పద్ధతుల నుంచి వచ్చును.

(1)యొక్క సాధారణ సాధన $y = uv$.

7.7.1 S.A.Q. : ఈ క్రింది సమీకరణము యొక్క సామాన్య రూపము కనుగొనుము.

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)y = xe^x$$

7.7.2 Working Rule : ఇచ్చిన సమీకరణము

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R$$

Step (1) : $y = uv$ సాధారణ సాధన అనుకొనుము.

Step (2) : $u = -e^{-\frac{1}{2}\int P dx}$ కనుగొనుము.

Step (3) : $I = Q - \frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{2}\frac{dP}{dx}$ మరియు $S = \frac{R}{u}$ కనుగొనుము.

Step (4) : సమీకరణము సామాన్య రూపమునకు మారును.

$$\frac{d^2v}{dx^2} + Iv = S$$

$I = K$ స్థిరాంకము లేక $I = \frac{K}{x^2}$ పై ఆధారపడిన vని సాధించుము.

Step (5) : సాధారణ సాధన $y = uv$.

7.7.3 **ఉదాహరణ:** $y'' - 4xy' + 4x^2y = e^{x^2}$ సాధించుము.

సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణము $\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + 4x^2y = e^{x^2}$ ---------- (1)

ఇక్కడ $P = -4x,\ Q = 4x^2, R = e^{x^2}$

$y = uv$ సాధారణ సాధన అనుకొనుము.

$$u = e^{-\frac{1}{2}\int P dx} = e^{-\frac{1}{2}\int -4x\, dx} = e^{x^2}$$

$$u = e^{x^2}$$

$$I = Q - \frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{2}\frac{dP}{dx} = 4x^2 - \frac{1}{4}(-4x)^2 - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(-4x)$$

$$= 4x^2 - 4x^2 + 2 = 2$$

$$S = \frac{R}{u} = \frac{e^{x^2}}{e^{x^2}} = 1$$

సమీకరణము (1) సామాన్య రూపమునకు మారును.

$$\frac{d^2v}{dx^2} + Iv = S$$

i.e. $\frac{d^2v}{dx^2} + 2v = 1$ i.e. $(D^2 + 2)v = 1$ -------- (2)

A.E. $m^2 + 2 = 0 \Rightarrow m^2 = -2 \Rightarrow m = \pm\sqrt{2}i$

C.F. $v_c = c_1 \cos\sqrt{2}x + c_2 \sin\sqrt{2}x$

P.I. $= v_P = \frac{1}{D^2 + 2}\cdot 1 = \frac{1}{D^2 + 2}e^{0x} = \frac{1}{0+2} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ (2) యొక్క సాధారణ సాధన $v = v_c + v_p$

$$v = c_1 \cos\sqrt{2}x + c_2 \sin\sqrt{2}x + \frac{1}{2}$$

కాబట్టి (1) యొక్క సాధారణ సాధన $y = uv$.

$$y = e^{x^2}\left[c_1 \cos\sqrt{2}x + c_2 \sin\sqrt{2}x + \frac{1}{2}\right]$$

7.7.4 ఉదాహరణ: $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\tan x\frac{dy}{dx} + 5y = 0$ ---------- (1)

సాధన : ఇక్కడ $P = -2\tan x,\ Q = 5,\ R = 0$

$y = uv$, (1) యొక్క సాధారణ సాధన అనుకొనుము.

$$u = e^{\frac{-1}{2}\int P dx} = e^{-\frac{1}{2}\int -2\tan x dx} = e^{\int \frac{\sin x}{\cos x}dx} = e^{\log \sec x} = \sec x$$

అప్పుడు $u = \sec x$

$$I = Q - \frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{2}\frac{dP}{dx} = 5 - \frac{1}{4}(-2\tan x)^2 - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(-2\tan x)$$

$$= 5 - \tan^2 x + \sec^2 x = 5 + 1 = 6$$

$$S = \frac{R}{u} = \frac{0}{u} = 0$$

ఇచ్చిన సమీకరనము అభిలంబ రూపమునకు మారును.

$$\frac{d^2v}{dx^2} + Iv = S$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} + 6v = 0 \Rightarrow \left(D^2 + 6\right)v = 0$$

$\therefore$ A.E. is $m^2 + 6 = 0 \Rightarrow m = \pm\sqrt{6}i$

C.F. $\quad v = v_c = c_1\cos\sqrt{6}x + c_2\sin\sqrt{6}x$

P.I. $\quad v = v_P = 0 \quad (\because S = 0)$

$\therefore v = v_c + v_P = c_1\cos\sqrt{6}x + c_2\sin\sqrt{6}x$

(1) యొక్క సాధారణ సాధన $y = uv$

$$y = \sec x\left[c_1\cos\sqrt{6}x + c_2\sin\sqrt{6}x\right]$$

7.7.5 ఉదాహరణ : $y'' - \frac{2}{x}y' + \left(1+\frac{2}{x^2}\right)y = xe^x,\ x>0$ ---------- (1) సాధించుము.

సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణము

$$y'' - \left(\frac{2}{x}\right)y' + \left(1+\frac{2}{x^2}\right)y = xe^x$$

ఇక్కడ $P = \frac{-2}{x},\ Q = 1+\frac{2}{x^2}, R = xe^x$

$y = uv$ (1) యొక్క సాధారణ సాధన అనుకొనుము.

$$u = e^{-\frac{1}{2}\int P dx} = e^{-\frac{1}{2}\int \frac{-2}{x}dx} = e^{\int \log x} = +x$$

$$I = Q - \frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{2}\frac{dP}{dx} = 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{-2}{x}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{-2}{x}\right)$$

$$= 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^2} = 1$$

సమీకరణము సామాన్య రూపమునకు మారును.

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{dv}{dx} = S$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} + v = e^x \quad \text{i.e.} \quad \left(D^2+1\right)v = e^x \text{ ----------- (2)}$$

A.E. $m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m^2 = -1 \Rightarrow m = \pm i$

C.F. $v = v_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

P.I. $v = v_P = \frac{1}{D^2+1}e^x = \frac{e^x}{2}$

(2) యొక్క సాధారణ సాధన $v = v_c + v_P$

$$v = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{e^x}{2}$$

(1) యొక్క సాధారణ సాధన $y = uv$

$$y = x\left[c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{e^x}{2}\right]$$

7.7.6 ఉదాహరణ: $\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + \left(4x^2 - 3\right)y = e^{x^2}$ సాధించుము.

సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణము

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + \left(4x^2 - 3\right)y = e^{x^2} \text{ ---------- (1)}$$

ఔంజిబిజ $P = -4x,\ Q = 4x^2 - 3, R = e^{x^2}$

$y = uv$ (1) యొక్క సాధారణ సాధన

$$u = e^{-\frac{1}{2}\int P dx} = e^{-\frac{1}{2}\int -4x\, dx} = e^{x^2}$$

$$u = e^{x^2}$$

$$I = Q - \frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{2}\frac{dP}{dx} = 4x^2 - 3 - \frac{1}{4}(-4x)^2 - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(-4x)$$

$$= 4x^2 - 3 - 4x^2 + 2 = -1$$

$$I = -1$$

$$S = \frac{R}{u} - \frac{e^{x^2}}{e^{x^2}} = 1$$

సమీకరణము (1) అభిలంబ రూపమునకు మారును.

$$\frac{d^2v}{dx^2} + Iv = S$$

i.e. $\frac{d^2v}{dx^2} - v = 1$ i.e. $\left(D^2 - 1\right)v = 1$ --------- (2)

A.E. $m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1$

C.F. $v_c = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

P.I. $v_P = \frac{1}{D^2 - 1} = \frac{1}{D^2 - 1} e^{0x} = \frac{1e^{0x}}{0-1} = -1$

$\therefore$ (2) యొక్క సాధారణ సాధన $v = v_c + v_P = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - 1$

కాబట్టి (1) యొక్క సాధారణ సాధన $y = uv$

$$= e^{x^2}\left[c_1 e^x + c_2 e^{-x} - 1\right]$$

7.7.7 స్వతంత్ర చలరాశి x ను మారుస్తూ $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R$ యొక్క సాధారణ సాధన కనుగొనుట:

$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R$ ----------- (1) అనుకొనుము.

స్వతంత్ర చలరాశి x ను x లో ప్రమేయమైన క్రొత్త స్వతంత్ర చలరాశి z లోనికి మార్చుదామనుకుందాం $z = f(x)$.

ఇప్పుడు $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$

మరియు $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{dx} + \frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dx}\right)\frac{dy}{dz}$

$$= \frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right) \cdot \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dz}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dz^2} \cdot \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dz}$$

ఈ విలువలను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\frac{d^2y}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dz} + P\frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} + Q \cdot y = R$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx}\right)\frac{dy}{dz} + Qy = R$$

$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$ తో భాగించగా

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\left[\frac{d^2z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx}\right]\frac{dy}{dz} + \frac{Qy}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{R}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

OR $\quad \dfrac{d^2y}{dz^2} + P_1\dfrac{dy}{dz}Q_1y = R_1$ ---------- (2)

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \left(\frac{d^2z}{dx^2} + P\cdot\frac{dz}{dx}\right)\Big/\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \\ Q_1 &= Q\Big/\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \\ R_1 &= R\Big/\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \end{aligned}\right\} ------(5)$$

ఇక్కడ P_1, Q_1, R_1 లు x లో ప్రమేయాలు. కాని $z = f(x)$ ను ఉపయోగించి వీటిని z ప్రమేయములోకి మార్చవచ్చును.

Case (i) : $P_1 = 0$ అయ్యేటట్లుగా z తీసుకొనుము

$$P_1 = 0 \Rightarrow \frac{d^2z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d^2z}{dx^2}\Big/\frac{dz}{dx} = -P$$

సమాకలనము చేయగా $\log\left(\frac{dz}{dx}\right) = \int -Pdx$

(లేక) $\quad \dfrac{dz}{dx} = e^{-\int Pdx} \Rightarrow z = \int e^{-\int Pdx}\cdot dx$

సమీకరణము (2) $\dfrac{d^2y}{dz^2} + Q_1y = R$, ను సాధించవచ్చును.

Case (ii) : $Q_1 = a^2$ స్థిరాంకము అయ్యేటట్లుగా z తీసుకొనుము.

$$\Rightarrow \frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{Q}{a^2} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \pm\sqrt{\left(\frac{Q}{a^2}\right)}$$

$$\Rightarrow z = \int \pm\sqrt{\frac{Q}{a^2}}dx$$

$\left(\frac{dz}{dx}\right)$ ను వాస్తవము చేయుటకు $\pm$ను తీసుకుంటాము. అలాగ z విలువ వచ్చును. ఈ సందర్భములో P_1 సున్న లేక స్థిరాంకము సమీకరణము (2)ను ఇంతకు ముందు పాఠములోని పద్ధతుల ద్వారా సాధించవచ్చును.

7.7.8 ఉదాహరణ: $x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 4x^3y = x^5$ $(x > 0)$ సాధించుము.

ఇచ్చిన : ఇచ్చిన సమీకరణమును

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + 4x^2y = x^4 \text{ ---------- (1)}$$ గా వ్రాయవచ్చును.

ఇక్కడ $P = -\frac{1}{x}, Q = 4x^2, R = x^4$

$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = Q$ అయ్యేటట్లుగా zను తీసుకొనుము $\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \sqrt{4x^2} = 2x$

$$z = \int 2xdx = x^2$$

$$z = x^2 \text{ -------- (2)} \qquad \frac{dz}{dx} = 2x, \frac{d^2z}{dx^2} = 2$$

ఈ z విలువతో (1) ఈ విధముగా మారును.

$$\frac{d^2y}{dz^2} + P_1\frac{dy}{dz} + Q_1y = R_1 \text{ ---------- (3)}$$

$$P_1 = \left(\frac{d^2z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx}\right) \bigg/ \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{2+\left(\frac{-1}{x}\right)(2x)}{(2x)^2} = 0$$

$$Q_1 = \frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{4x^2}{4x^2} = 1$$

$$R_1 = \frac{R}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} - \frac{x^4}{4x^2} = \frac{1}{4}x^2$$

ఈ విలువను (3)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\frac{d^2y}{dz^2} + y = \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow \left(\theta^2+1\right)y = \frac{x^2}{4} = \frac{z}{4} \text{ ------- } \mathbf{(4)} \quad \theta \equiv \frac{d}{dz}, \quad z = x^2$$

A.E. $m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m = \pm i$

$\therefore$ C.F. $y = y_c = c_1 \cos z + c_2 \sin z = c_1 \cos x^2 + c_2 \sin x^2$

P.I. $y = y_P = \left(\frac{1}{\theta^2+1}\right)\frac{z}{4} = \frac{1}{4}\left(1+\theta^2\right)^{-1} z = \frac{1}{4}\left[1-\theta^2+\cdots\right]z = \frac{z}{4} = \frac{x^2}{4}$

$\Rightarrow$ **(1)** యొక్క సాధారణ సాధన $y = c_1 \cos x^2 + c_2 \sin x^2 + \frac{x^2}{4}$

7.7.9 ఉదాహరణ : $x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 4x^3y = 8x^3 \sin x^2$ సాధించుము.

సాధన: ఇచ్చిన సమీకరణమును ఈ విధముగా వ్రాయవచ్చును.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - 4x^2y = 8x^2 \sin x^2$$

ఇక్కడ $P = -\frac{1}{x}, \; Q = -4x^2, \; R = 8x^2 \sin x^2$

$$Q\Big/\left(\frac{dz}{dx}\right)^2=-1$$ అయ్యేటట్లుగా z ను తీసుకొనుము.

$$\Rightarrow\left(\frac{dz}{dx}\right)^2=4x^2\Rightarrow\frac{dz}{dx}=2x$$

$$\Rightarrow z=\int 2x\,dx=x^2$$

$$z=x^2 \text{ -------- (2)}$$

$$\frac{dz}{dx}=2x,\ \frac{d^2z}{dx^2}=2$$

ఈ z విలువతో (1) ఈ విధముగా మారును.

$$\frac{d^2y}{dz^2}+P_1\frac{dy}{dz}+Q_1y=R_1 \text{ --------- (3)}$$

$$P_1=\left(\frac{d^2z}{dx^2}+P\cdot\frac{dz}{dx}\right)\Big/\left(\frac{dz}{dx}\right)^2=\frac{2+\left(-\frac{1}{x}\right)2x}{(2x)^2}=0$$

$$Q_1=\frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=\frac{-4x^2}{(2x)^2}=-1$$

$$R_1=\frac{R}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=\frac{8x^2\sin x^2}{4x^2}=2\sin x^2=2\sin z$$

సమీకరణము (3) ఈ విధముగా మారును.

$$\frac{d^2y}{dz^2}-y=2\sin z \text{ or } \left(\theta^2-1\right)y=2\sin z \text{ -------- (4)}$$

A.E. $m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1$

$\therefore$ C.F. $y = y_c = c_1 e^z + c_2 e^{-z}$

P.I. $y = y_P = \dfrac{1}{\theta^2 - 1} 2 \sin z = 2 \cdot \dfrac{1}{-1^2 - 1} \sin z = -\sin z$

$\therefore$ (4) యొక్క సాధారణ సాధన $y = y_c + y_P$

$$y = c_1 e^z + c_2 e^{-z} - \sin z$$

(1) యొక్క సాధారణ సాధన

$$y = c_1 e^{x^2} + c_2 e^{-x^2} - \sin x^2 \qquad (\, z = x^2 \text{ తీసుకొనుము})$$

7.7.10 ఉదాహరణ: $y'' - \cot x y' - \left(\sin^2 x\right) y = 0$ సాధించుము.

సాధన: ఇచ్చిన సమీకరణము

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \cot x \frac{dy}{dx} - \sin^2 x \; y = 0 \quad \text{-------} \; (1)$$

ఇక్కడ $P = -\cot x,\; Q = -\sin^2 x,\; R = 0$

$\dfrac{Q}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2} = -1$ అయ్యేటట్లుగా Z తీసుకొనుము.

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \sin^2 x \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \sin x$$

$$\Rightarrow z = \int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$z = -\cos x \quad \text{----------} \; (2)$$

$$\frac{dz}{dx} = \sin x, \; \frac{d^2z}{dx} = \cos x$$

ఈ విలువలతో (1) ఈ విధముగా మారును.

$$\frac{d^2y}{dz^2}+P_1\frac{dy}{dz}+Q_1y=R_1 \text{ -------- (3)}$$

$$P_1=\left(\frac{d^2z}{dx^2}+P\cdot\frac{dz}{dx}\right)\Big/\left(\frac{dz}{dx}\right)^2=\frac{\cos x+(-\cot x)\cdot\sin x}{\sin^2 x}=0$$

$$Q_1=\frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=\frac{-\sin^2 x}{\sin^2 x}=-1$$

$$R_1=\frac{R}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=0$$

ఈ విలువలను (3)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\frac{d^2y}{dz^2}-1y=0\Rightarrow\left(\theta^2-1\right)y=0 \text{ ---------- (4)}$$

$$\theta\equiv\frac{d}{dz}$$

A.E. $m^2-1=0\Rightarrow m^2=1\Rightarrow m=\pm1$

y యొక్క C.F. $y_c=c_1e^z+c_2e^{-z}$

y యొక్క P.I. $y_P=\frac{1}{\theta^2-1}\cdot 0=0$

(4) యొక్క సాధారణ సాధన $y=y_c+y_P$

$$y=c_1e^z+c_2e^{-z}$$

$\Rightarrow$ (1) యొక్క సాధారణ సాధన

$$y=c_1e^{-\cos x}+c_2e^{\cos x}$$

7.8 పరామితుల మార్పు పద్ధతి :

$y'' + Py' + Qy = R$ ----------- (1) **రూపంలో ఉన్న సమీకరణమును ఈ పద్ధతిని వాడవచ్చును. ఇది సాధారణ పద్ధతి. ఇక్కడ** P, Q **మరియు** R **లు** x **లో ప్రమేయాలు.**

ప్రత్యేక సాధన $= y_1 \int \frac{y_2 R}{w} dx + y_2 \int \frac{y_1 R}{w} dx$ --------- (2)

y_1, y_2 లు $y'' + Py_1 + Qy = 0$ ----------- (3) యొక్క ఋజు స్వతంత్ర సాధనలు

$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ ను y_1, y_2 యొక్క రాంస్కెయన్ అంటారు.

ఉపపత్తి : (1) యొక్క C.F. $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ అనుకొనుము.

c_1, c_2 లను తెలియని ప్రమేయాలు $u(x)$ మరియు $v(x)$ లతో మార్చగా

P.I. $y = uy_1 + vy_2$ --------- (4) అనుకొనుము.

(4) ను x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$y' = uy_1' + vy_2' + u'y_1 + v'y_2$$

$$= uy_1' + vu_2' \text{ ------- (5)}$$

$u'y_1 + v'y_2 = 0$ ---------- (6) తీసుకొనగా

(4)ను అవకలనము చేసి మరియు (6) తీసుకొనగా

$$y = uy_1 + vy_2$$

$$y' = uy_1' + vy_2'$$

$$y'' = uy_1'' + vy_2'' + u'y_1' + v'y_2'$$

ఈ విలువలను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా,

$$uy_1'' + vy_2'' + u'y_1' + v'y_2' + P[uy_1' + vy_2'] + Q[uy_1 + vy_2] = R$$

$$\Rightarrow u[y_1'' + Py_1' + Qy_1] + v[y_2'' + Py_2' + Qy_2] + u'y_1' + v'y_2' = R$$

$\Rightarrow u'y_1' + v'y_2' = R$ --------- (7) ((3)ను y_1 మరియు y_2 తృప్తిపరుచును(3))

(6)మరియు (7) ల నుపయోగించి u', v' లను సాధించగా

$$u' = -\frac{y_2R}{w},\ v' = \frac{y_1R}{w} \qquad w = y_1y_2' - y_2y_1'$$

సమాకలనము చేయగా $u = -\int \frac{y_2R}{w}dx,\ v = \int \frac{y_1R}{w}dx$

ఈ విలువలను **(4)**లో ప్రతిక్షేపించగా

$$P.I. = -y_1\int \frac{y_2R}{w}dx + y_2\int \frac{y_1R}{w}dx$$

7.8.1 ఉదాహరణ: $\left(D^2 - 3D + 2\right)y = \sin e^{-x}$ సాధించుము.

ప్రామాణిక రూపములో ఇచ్చిన సమీకరణము

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = \sin e^{-x}$$

ఇక్కడ $P = -3,\ Q = 2,\ R = \sin e^{-x}$

A.E. $m^2 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow (m-1)(m-2) = 0 \qquad m = 1, 2$

C.F. $y_2 = c_1e^x + c_2e^{2x}$

P.I. $y_P = uy_1 + vy_2$ అనుకొనుము.

$y_1 = e^x,\ y_2 = e^{2x},\ u, v$ లను నిర్ణయించవలెను.

పరామితుల మార్పు పద్ధతి ద్వారా

$$w = y_1y_2' - y_1'y_2 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix}$$

$$= e^x \cdot 2e^{2x} - e^x e^{2x} = e^x e^{2x}$$

$$u = -\int \frac{y_2R}{w}dx = -\int \frac{e^{2x}\sin e^{-x}}{e^x \cdot e^{2x}}dx = \int \sin e^{-x}\left(-e^{-x}\right)dx$$

$$= -\cos e^{-x}$$

$$v = \int \frac{y_1 R}{w} dx = \int \frac{e^x \sin e^{-x}}{e^x e^{2x}} dx = \int e^{-2x} \sin\left(e^{-x}\right) dx$$

$$v = \int \frac{y_1 R}{w} dx = \int \frac{e^x \sin e^{-x}}{e^x e^{2x}} dx = \int e^{-2x} \sin\left(e^{-x}\right) dx$$

$$= -\int e^{-x} \sin e^{-x} \left(-e^{-x}\right) dx, \qquad \text{Put} \quad e^{-x} = t, \quad e^{-x} dx = dt$$

$$= -\int t \sin t \, dt$$

$$= i \int t \sin t \, dt$$

$$= -\left[-t \cos t + \int 1 \cos t \ dt\right]$$

$$= -[-t \cos t + \sin t]$$

$$= e^{-x} \cos e^{-x} - \sin e^{-x}$$

$$\therefore y_P = u y_1 + v y_2$$

$$= \left(-\cos e^{-x}\right)\left(e^x\right) + \left(e^{-x} \cos e^{-x} - \sin e^{-x}\right)\left(e^{2x}\right)$$

$$= -e^{2x} \sin e^{-x}$$

$\therefore$ కావలసిన సాధన $\quad y = y_c + y_P$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - e^{2x} \sin e^{-x}$$

7.8.2 ఉదాహరణ : $\left(D^2 + 1\right) y = \operatorname{cosec} x$ ను పరామితుల మార్పు పద్ధతి ద్వారా సాధించుము.

సాధన : ప్రామాణిక రూపములో ఇచ్చిన సమీకరణము

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 0 \frac{dy}{dx} + y = \operatorname{cosec}\ x$$

ఇక్కడ $\quad P = 0, Q = 1, R = \operatorname{cosec} x$

A.E. $\ f(m) = 0$

$$m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m = \pm i$$

$\therefore$ C.F. $\ y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

(1) యొక్క P.I. $y_P = uy_1 + vy_2$ అనుకొనుము.

$y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ మరియు u, v లను నిర్ధారించవలెను.

పరామితుల మార్పు పద్ధతి ద్వారా

$$w = y_1 y_2' - y_1' y_2 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$u = -\int \frac{y_2 R}{w} dx = -\int \frac{\sin x \cdot \operatorname{cosec} x}{1} dx = -\int dx = -x$$

$$v = \int \frac{y_1 R}{w} dx = \int \frac{\cos x \cdot \operatorname{cosec} x}{1} dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \log|\sin x|$$

$$\therefore y_P = uy_1 + vy_2 = -x\cos x + \log|\sin x| \cdot \sin x$$

$\therefore$ (1) యొక్క సాధారణ సాధన

$$y = y_c + y_P$$

$$= c_1 \cos x + c_2 \sin x - x\cos x + \sin x \log|\sin x|$$

7.8.3 ఉదాహరణ : $\left[(x-1)D^2 - xD + 1\right] y = (x-1)^2$ ను పరామితుల మార్పు పద్ధతి ద్వారా సాధించుము.

సాధన: ప్రామాణిక రూపములో యిచ్చిన సమీకరణము

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x}{x-1}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x-1} y = x - 1 \text{ ---------- (1)}$$

$$P = -\frac{x}{x-1}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x-1} y = x - 1 \text{ --------- (1)}$$

ఇక్కడ $P = -\frac{x}{x-1}, Q = \frac{1}{x-1}, R = (x-1)$

(1) యొక్క సమఘాత భాగము $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x}{x-1}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x-1} y = 0$ ------- (2)

$$1 + P + Q = 1 - \frac{x}{x-1} + \frac{x}{x-1} = 0 \Rightarrow y = e^x$$ అనునది (2) యొక్క సాధన

$P+Qx=-\frac{x}{x-1}+\frac{x}{x-1}=0 \Rightarrow y=x$ అనునది (2) యొక్క సాధన

(1) యొక్క $y_c=c_1e^x+c_2x$

(1) యొక్క P.I. $y_P=uy_1+vy_2$ అనుకొనుము. $y_1=e^x,\ y_2=x$ మరియు u, v లను నిర్ధారించవలెను. పరామితుల మార్పు పద్ధతి ద్వారా

$$w=y_1y_2'-y_1'y_2=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^x & x \\ e^x & 1 \end{vmatrix}=e^x-xe^x=e^x(1-x)$$

$$u=-\int\frac{y_2R}{w}dx=-\int\frac{x(x-1)}{e^x(1-x)}dx=\int x\,e^{-x}dx$$

$$=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}$$

$$=-(x+1)e^{-x}$$

$$v=\int\frac{y_1R}{w}dx=\int\frac{e^x(x-1)}{e^x(1-x)}=-\int 1dx=-x$$

$$\therefore y_P=uy_1+vy_2=-(x+1)e^{-x}\cdot e^x+(-x)x$$

$$=-x-1-x^2=-\left(1+x+x^2\right)$$

(1) యొక్క సాధారణ సాధన $y=y_c+y_P$

$$y=c_1e^x+c_2x-\left(1+x+x^2\right)$$

7.9 S.A.Q. లకు సమాధానములు :

7.5.1 SAQ : $x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$

లేక $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}=1$

$x^2D^2+xD=1$ ఇది కౌషీ - ఆయిలర్ సమీకరణం

$x = e^t$, తీసుకొనగా $t = \log x$

సమీకరణము ఈ విధముగా మారును

$$[\theta(\theta-1)+\theta]y = 1 \text{ where } \theta = \frac{d}{dt}$$

$$\theta^2 y = 1$$

$$\theta y = \int 1 dt = t + c_1$$

$$y = \int (t + c_1) dt = \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2 = \frac{(\log x)^2}{2} + c_1 \log x + c_2$$

ఇది సాధారణ సాధన.

7.6.6 SAQ : భాగించగా, ప్రామాణిక రూపములో ఇచ్చిన సమీకరణము

$$y'' - 2\left(\frac{1}{x}+1\right)y' + 2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)y = x$$

$$P = -\frac{2}{x} - 2, \; Q = \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x}, \; R = x$$

$$P + Qx = -\frac{2}{x} - 2 + \frac{2}{x} + 2 = 0$$

$\therefore y = x$ ఇచ్చిన సమీకరణము యొక్క పూరక ప్రమేయములో భాగము.

$\therefore u = x$

7.7.1 SAQ : $P = -\frac{2}{x}, \; Q = 1 + \frac{2}{x^2}, \; R = xe^x$

ప్రథమ అవకలజము తొలగించుటకు

$u = e^{-\frac{1}{2}\int P dx} = e^{-\frac{1}{2}\int -\frac{2}{x}dx} = e^{\log x} = x$ తీసుకొనుము.

$y = uv$ సాధారణ సాధన అనుకొనుము. అభిలంబ రూపము

$$\frac{d^2v}{dx^2} + Iv = S \text{ ----------- } (1)$$

$$I = Q - \frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{2}\frac{dP}{dx} = 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{4}{x^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x^2}\right) = 1$$

$$S = \frac{R}{u} = \frac{xe^x}{x} = e^x$$

(1)లో ఈ విలువలను ప్రతిక్షేపించగా వచ్చు అభిలంబ రూపము

$$\frac{d^2v}{dx^2} + v = e^x$$

7.10 సాంకేతిక పదాలు:

కౌషీ - ఆయిలర్ సమీకరణము

లెజెండర్ ఏకఘాత సమీకరణము

పరామితుల మార్పు

7.11 అభ్యాసము :

ఈ క్రింది అవకలన సమీకరణములు సాధించుము.

1. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 2\log x$

2. $x^4\frac{d^3y}{dx^3} + 2x^3\frac{d^2y}{dx^2} - x^2\frac{dy}{dx} + xy = 1$

3. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + 2y = x\log x$

4. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - 20y = (x+1)^2$

5. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$

6. $(2x+3)^3\frac{d^2y}{dx^2} - 2(2x+3)\frac{dy}{dx} - 12y = 6x$

7. $(x+3)^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 4(x+3)\frac{dy}{dx} + 6y = \log(x+3)$

8. $x\frac{d^2y}{dx^2} + (1-x)\frac{dy}{dx} - y = e^x$

9. $xy''' - (2x-1)y'' + (x-1)y' + (x-1)y = e^x$

10. $y'' - x^2y' + xy = x$

11. $y'' - 2\tan x y' + 3y = 2\sec x, \quad y = \sin x$ సాధనగా ఇవ్వబడినది.

12. $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2$

13. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\tan x\frac{dy}{dx} + 5y = 0$ అభిలంబ రూపమునకు మారుస్తూ సాధించుము.

14. $y'' - 2xy' + \left(x^2+5\right)y = xe^{-x^2/2}$

15. $y'' - 2xy' + \left(x^2+2\right)y = e^{(x^2+2x)/2}$

16. $y'' + (\tan x)y' + \left(\cos^2 x\right)y = 0$

17. $y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{a^2}{x^4}y = 0$

18. $\left(1+x^2\right)y'' + xy' + 2y = 0$

19. $\cos x y'' + \sin x\, y' - 2\cos^3 x y = 2\cos^5 x$

20. $y'' + (3\sin x - \cot x)y' + 2y\sin^2 x = \sin^2 x\, e^{-\cos x}$

ఈ క్రింది అవకలన సమీకరణములను పరామితుల మార్పు పద్ధతి ద్వారా సాధించుము:

21. $y'' + 4y = 2\tan x$

22. $\left(D^2+1\right)y = \operatorname{cosec} x \cot x$

23. $y'' + 4y = 4\sec^2 2x$

24. $\left(D^2 + 1\right)y = \sec x$

25. $\left(D^2 + a^2\right)y = \sec ax$

26. $\left(D^2 - 2D\right)y = e^x \sin x$

7.12 అభ్యాసమునకు సమాధానములు :

1. $y = \left(c_1 + c_2 \log x\right)x + 2\log x + 4$

2. $y = c_1 x^{-1} + c_2 x + c_3 x \log x + \frac{1}{4}x^{-1}\log x$

3. $y = x\left[c_1 \cos\left(\log x\right) + c_2 \sin\left(\log x\right)\right] + x\log x$

4. $y = c_1 x^4 + c_2 x^{-5} - \frac{1}{14}x^2 - \frac{1}{9}x - \frac{1}{20}$

5. $y = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-2} + x^{-2}e^{-x}$

6. $y = c_1 (2x+3)^{-1} + c_2 (2x+3)^3 - \frac{3}{4}(2x+3) + 3$

7. $y = c_1 (x+3)^2 + c_2 (x+3)^3 + \frac{1}{6}\log(x+3) + \frac{5}{36}$

8. $y = e^x \log x + c_1 e^x \int x^{-1}e^{-x}dx + c_2 e^x$

9. $y = e^x\left[c_1 + c_2 \log x + \frac{1}{x}\right]$

10. $y = 1 + c_1 x\int x^{-2}e^{x^3/3}\,dx + c_2 x$

11. $y = -\frac{1}{2}\sec x - c_1\left(\cos x - \frac{1}{2}\sec x\right) + c_2 \sin x$

12. $y = c_1 e^x + c_2 x - x^2 - 1$

13. $y = \left[c_1 \cos\left(x\sqrt{6}\right) + c_2 \sin\left(x\sqrt{6}\right)\right] \sec x$

14. $y = \left[c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{x}{4}\right] e^{-\frac{x^2}{2}}$

15. $y = e^{x^2/2} \left[c_1 \cos\left(x\sqrt{3}\right) + c_2 \sin\left(x\sqrt{3}\right) + \frac{e^x}{4}\right]$

16. $y = c_1 \cos(\sin x) + c_2 \sin(\sin x)$

17. $y = c_1 \cos\left(\frac{a}{x}\right) + c_2 \sin\left(\frac{a}{x}\right)$

18. $y = c_1 \cos(x+1) e^{-x} - c_2 \sin(x+1) e^{-x} + (x+1) e^{-x}$

19. $y = c_1 e^{\sqrt{2} \sin x} + c_2 e^{-\sqrt{2} \sin x} + \sin^2 x$

20. $y = c_1 e^{\cos x} + c_2 e^{2 \cos x} + \frac{1}{6} e^{-\cos x}$

21. $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \cos 2x \log\left|\sec 2x + \tan 2x\right|$

22. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - x \sin x - \cos x \log \sin x$

23. $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - 1 + \sin 2x \cdot \log\left|\sec 2x + \tan 2x\right|$

24. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x \log(\cos x) + x \sin x$

25. $y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax + \frac{\cos ax}{a^2} \log(\cos x) + \frac{x}{a} \sin ax$

26. $y = c_1 + c_2 e^{2x} - \frac{e^x \sin x}{2}$

7.13 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు:

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \operatorname{cosec}x$ పరామితుల మార్పు పద్ధతి ద్వారా సాధించుము.

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \cot x \dfrac{dy}{dx}(1-\cot x)\,y = e^x \sin x$ ను సాధించుము.

3. $y = x$ మరియు $y = xe^{2x}$ లు సమఘాతీయ సమీకరణమునకు సాధనలయితే

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x(1+x)\frac{dy}{dx} + 2(x+1)y = x^3$$ ను

పరామితుల మార్పు పద్ధతి ద్వారా సాధించుము.

4. $x^6 \dfrac{d^2y}{dx^2} + 3x^5 \dfrac{dy}{dx} + a^2 y = \dfrac{1}{x^2}$ ను స్వతంత్ర చలరాశిని మారుస్తూ సాధించుము.

5. $y'' - 4xy' + \left(4x^2 - 1\right)y = -3e^{x^2} \sin 2x$ ను సాధించుము.

6. $y'' + (1-\cot x)\,y' - y\cot x = \sin^2 x$ ను సాధించుము. $y = e^{-x}$ పూరక ప్రవమేయములో భాగముగా ఇవ్వబడినది.

7.14 ప్రామాణిక గ్రంథాలు :

1. Erwin Kruyszing, Advanced Engineering Mathematics, Wiley Student Edition.
2. Zafar, Ashan, Differential Equations and Their Applications.
3. Earl A. Coddington, An. Introduction to Ordinary Differential Equations.

Lesson Writer
Dr. B. Rami Reddy

పాఠం- 8

అనిర్ధారిత గుణకాల పద్ధతి మరియు సమకాలిక అవకలన సమీకరణాలు

8.1 పాఠ్యభాగ లక్ష్యం:

ఈ పాఠములో అవకలన సమీకరణమును అనిర్ధారిత గుణకాల పద్ధతి ద్వారా సాధించుట మరియు సమకాలిక అవకలన సమీకరణములను సాధించుటను తెలుసుకుంటాము. ఈ పాఠములో మనము స్థిరగుణకాలు గల సమకాలిక అవకలన సమీకరణాలు గురించి చూస్తాము. వాటిని భౌతిక శాస్త్రము, ఇంజనీరింగ్, వైద్యము మొదలగు రంగాలలో ఎక్కువగా ఉపయోగిస్తారు.

8.2 పాఠ్య నిర్మాణం:

8.3 పరిచయం:

ఈ పాఠములో $f(D)y = Q(x)$ అవకలన సమీకరణములను అనిర్ధారిత గుణకాల పద్ధతి ద్వారా సాధించుట నేర్చుకుంటాము. సమకాలిక సమీకరణాలలో ఒక్క ఆశ్రిత చలరాశి తప్ప మిగిలిన వాటిని లోపింపజేసి, ఆ సమీకరణాలను ఇంతకుముందు చెప్పిన విధంగా సాధిస్తాము.

ప్రతి ఒక్క ఆశ్రిత చలరాశిని ఈ పద్ధతిలోనే కనుగొంటాము.

8.4 అనిర్ధారిత గుణకాల పద్ధతి:

$a_0 \neq 0, Q(x) \neq 0$ మరియు $i = 0,1,2,\cdots,n$ లకు a_i లు స్థిరాంకాలుగా గల

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y}{d_{x^{n-1}}} + \cdots\cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = Q(x) \text{ ------------- (1)}$$

అశూన్య సమానక సమీకరణాలకు సాధారణ సాధన

$y = y_c + y_p$ రూపములో ఉండును.

ఇచ్చట y_c పూరక ప్రమేయము మరియు y_p అశూన్య సమానక సమీకరణానికి ప్రత్యేక సమాకలని మనము చర్చిస్తున్న ఈ పద్ధతి అతి సులభమైనదిగా పేర్కొంటున్నాము. ఈ పద్ధతినే అనిర్ధారిత గుణకాల పద్ధతి అని అంటారు.

8.4.1 అనిర్ధారిత గుణకాల పద్ధతికి నియమములు:

నియమము (1) :

సమీకరణము (1)లో $Q(x)$ యొక్క ఏ పదము y_c లోని పదాలతో సమానము కాదు. ఈ విషయములో (1)లో $Q(x)$ పట్టికలోని మొదటి నిలువు వరుసలోని ప్రమేయములలో ఏదైనా ఒకటి అయితే రెండవ నిలువు వరుసలోని ప్రమేయములలో ఏదైనా ఒకటి అయితే రెండవ నిలువు వరుసలో దానికి అనుగుణమైన ప్రమేయము y_p ని ఎంచుకోవలెను. మరియు y_p మరియు దాని అవకలనమును (1)లో ప్రతిక్షేపించి దాని అనిర్ధారిత గుణకాలను కనుగొనవలెను.

పట్టిక

$Q(x)$ లోని పదము	y_p లోని ఎన్నిక
(1) $K\,e^{\alpha x}$	(1) $ce^{\alpha x}$
(2) $Kx^n\,(n = 0,1,2,\cdots)$	(2) $c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots\cdots + c_1 x + c_0$
(3) $\left.\begin{matrix} K\cos wx \\ K\sin wx \end{matrix}\right\}$	(3) $c_1\cos wx + c_2 \sin wx$
(4) $\left.\begin{matrix} Ke^{ax}\cos wx \\ Ke^{ax}\sin wx \end{matrix}\right\}$	(4) $e^{ax}\left(c_1\cos wx + c_2\sin wx\right)$

8.4.2 ఉదాహరణ 1 : $\left(D^2+4D+4\right)y=4x^2+6e^x$ సాధించుము.

సాధన: A.E. $m^2+4m+4=0 \Rightarrow (m+2)^2=0 \Rightarrow m=-2,-2$

$$\therefore \text{C.F., } y_c=(c_1+c_2x)e^{-2x}$$

$Q(x)=4x^2+6e^x$ లో y_c లో ఉమ్మడి పదాలు లేవు కావున,

$y_p=Ax^2+Bx+C+De^x$, A, B, C, D లను నిర్ణయించవలెను.

y_p ని రెండుసార్లు అవకలనం చేయగా

$$y_p'=2Ax+B+De^x$$

$$y_p''=2A+De^x$$

ఈ విలువను ఇచ్చిన సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించగా

$$2A+De^x+4\left(2Ax+B+De^x\right)+4\left(Ax^2+Bx+C+De^x\right)=4x^2+6e^x$$

సూక్ష్మీకరించి మరియు గుణకాలను సమానము చేయగా

$$4A=4,\ 8A+4B=0$$

$$2A+4B+4C=0,\ 9D=6$$

$$\Rightarrow A=1,\ B=-2,\ C=\frac{3}{2},\ D=\frac{2}{3}$$

$$\therefore y_p=x^2-2x+\frac{2}{3}e^x+\frac{3}{2}$$

సాధారణ సాధన $y=y_c+y_p$

$$y=(c_1+c_2x)e^{-2x}+x^2-2x+\frac{2}{3}e^x+\frac{3}{2}$$

8.4.3 ఉదాహరణ (2) : $\left(D^2+2D+5\right)y=12e^x-34\sin 2x$.

సాధన: A.E. = $m^2+2m+5=0 \Rightarrow m=-1\pm 2i$

C.F. $y_c = e^{-x}\left[C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right]$

$$y_p = Ae^x + B\sin 2x + C\cos 2x$$

$$y_p' = Ae^x + 2B\cos 2x - 2C\sin 2x$$

$$y_p'' = Ae^x + 4B\sin 2x - 4C\cos 2x$$

ఈ విలువలను సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించగా

$$\left(Ae^x - 4B\sin 2x - 4C\cos 2x\right) + 2\left(Ae^x + 2B\cos 2x + -2C\sin 2x\right) + 5\left(Ae^x + B\sin 2x + C\cos 2x\right)$$

$$= 12e^x - 34\sin 2x$$

ఒకే రకము పదాల గుణకాలను సమానము చేయగా

$$8A = 12,\ B - 4c = -34,\ 4B + C = 0$$

$A = \dfrac{3}{2},\ B = -2,\ C = 8,$ మరియు

$$y_p = \frac{3}{2}e^x - 2\sin 2x + 8\cos 2x$$

$\therefore$ ఇచ్చిన సమీకరణమునకు సాధారణ సాధన

$$y = y_c + y_p$$

$$y = e^{-x}\left(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x\right) + \frac{3}{2}e^x - 2\sin 2x + 8\cos 2x$$

8.4.4 **ఉదాహరణ :** $y'' + 4y = 8x^2$ సాధించుము.

సాధన: పరిక్రియ D నుపయోగించి ఇచ్చిన సమీకరణమును $\left(D^2 + 4\right)y = 8x^2$ అని వ్రాయవచ్చును.

A.E. $m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m^2 = -4 \Rightarrow m = \pm 2i$

C.F. $y_c = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

$$y_p' = 2Ax + B$$

$$y_p'' = 2A$$

ఈ విలువలను ఇచ్చిన సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించగా

$$2A + 4\left(Ax^2 + Bx + C\right) = 8x^2$$

ఒకే రకము పదాల గుణకాలను పోల్చగా

$$4A = 8, \qquad 4B = 0, \qquad 2A + 4C = 0$$

$$A = 2,\ B = 0,\ C = -1$$

$$y_p = 2x^2 - 1$$

$\therefore$ ఇచ్చిన సమీకరణమునకు సాధారణ సాధన

$$y = y_c + y_p = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + 2x^2 - 1$$

నియమం (2) :

y_cలోని పదాలలో ఒకటి $f(x)$ అయి, $Q(x)$లో $x^k f(x)$ అనే పదం ఉండటం (k సున్నా లేక ధన పూర్ణాంకము). ఈ సందర్భములో (1) యొక్క ప్రత్యేక సమాకలని y_p, $x^{k+1}f(x)$ మరియు దాని ఋజు స్వతంత్ర అవకలజాలు (స్థిరరాశులను వదిలేసి) ఋజు సంయోగమవుతుఇది. అదనంగా $Q(x)$లోని మొదటి సందర్భానికి చెందిన పదాలు ఉంటే ఆ సందర్భానికి సరిపోయే పదాలను y_p కి చేర్చాలి.

8.4.6 ఉదాహరణ : $\left(D^2 - 3D + 2\right)y = 2x^2 + 3e^{2x}$.

సాధన: A.E. $m^2 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow m = 1, 2$

$$\therefore \text{C.F} \quad y_c = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

సమీకరణంలోని కుడివైపు భాగాన్ని y_c తో పోల్చగా $Q(x)$ లో వున్న e^{2x} పదము y_cలోని అదే పదానికి x^0 రెట్లు వున్నది. ఈ పదానికి సంబంధించి $x^{0+1}\, e^{2x}$ మరియు దాని యొక్క అన్ని ఋజు స్వతంత్ర అవకలజాల ఋజు సంయోగము y_pలో కలిగివుండవలెను. సందర్భము (1)కి చెందిన x^2 పదము $Q(x)$లో వుండవలెను. ఈ పదమునకు సంబంధించి ఆ పదము మరియు దానివన్ని ఋజు స్వతంత్ర అవకలజాల ఋజు సంయోగము y_pలో ఉండవలెను. e^{2x} పదము y_cలో అగుపించుట వలన ఆ పదమును వదిలివేయవచ్చును.

$$y_p = Ax^2 + Bx + C + Dxe^{2x}$$

దానిని రెండుసార్లు అవకలనము చేయగా

$$y_p' = 2Ax + B + 2Dxe^{2x} + De^{2x}$$

$$y_p'' = 2A + 4Dxe^{2x} + 4De^{2x}$$

y_p, y_p' మరియు y_p'' విలువలను ఇచ్చిన అవకలన సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించగా

$$2A + 4Dxe^{2x} + 4De^{2x} - 3\left(2Ax + B + 2Dxe^{2x} + De^{2x}\right) + 2\left(Ax^2 + Bx + C + Dxe^{2x}\right)$$

$$= 2x^2 + 3e^{2x}$$

$$\Rightarrow 2Ax^2 + (2B - 6A)x + (2A - 3B + 2C) + De^{2x} = 2x^2 + 3e^x$$

రెండు వైపులా ఒకే రకమైన పదాల గుణకాలను సమానము చేయగా

$$2A = 2,\ 2B - 6A = 0;\ 2A - 3B + 2C = 0,\ D = 3$$

$$\Rightarrow A = 1,\ B = 3,\ C = \frac{7}{2}, D = 3$$

$$\therefore y_p = x^2 + 3x + \frac{7}{2} + 3xe^{2x}$$

$\therefore$ సాధారణ సాధన

$$y = y_c + y_p$$

$$= c_1e^x + c_2e^{2x} + x^2 + 3x + \frac{7}{2} + 3xe^{2x}$$

8.4.7 ఉదాహరణ: $\left(D^2 - 3D + 2\right)y = xe^{2x} + \sin x$

సాధన : A.E. $m^2 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow m = 1, 2$

C.F. $y_c = C_1e^x + C_2e^{2x}$

$$y_p = Ax^2e^{2x} + Bxe^{2x} + C\sin x + D\cos x$$

y_p ని రెండుసార్లు అవకలనము చేయగా

$$y_p' = 2Axe^{2x} + 2Ax^2e^{2x} + Be^{2x} + 2Bxe^{2x} + C\cos x - D\sin x$$

$$= \left(2Ax^2 + 2Ax + 2Bx + B\right)e^{2x} + C\cos x - D\sin x$$

$$y_p'' = \left[4Ax^2 + (8A + 4B)x + 2A + 4B\right]e^{2x} - C\sin x - D\cos x$$

y_p, y_p', y_p'' విలువలను ఇచ్చిన అవకలన సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించగా

$$\left(4Ax^2 + (8A + 4B)x + 2A + 4B\right)e^{2x} - C\sin x - D\cos x$$

$$-3\left\{\left(2Ax^2 + (2A + 2B)x + B\right)e^{2x} + C\cos x - D\sin x\right\}$$

$$+2\left\{\left(Ax^2 + Bx\right)e^{2x} + C\sin x + D\cos x\right\} = xe^{2x} + \sin x$$

ఈ సమీకరణములో ఇరువైపులా పదాల గుణకాలను పోల్చగా

$$4A - 6A + 2A = 0$$

$$8A + 4B - 6A - 6B + 2B = 1$$

$$2A + 4B - 3B = 0$$

$$-C + 3D + 2C = 1$$

$$-D - 3C + 2D = 0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2A = 1 \\ 2A + B = 0 \\ C + 3D = 1 \\ -3C + D = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = \dfrac{1}{2} \\ B = -2A = -1 \\ C = \dfrac{1}{10} \\ D = \dfrac{3}{10} \end{array}$$

$$y_p = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - xe^{2x} + \frac{1}{10}\sin x + \frac{3}{10}\cos x$$

సాధారణ సాధన $y = y_c + y_p$

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x} - xe^{2x} + \frac{1}{10}\sin x + \frac{3}{10}\cos x$$

8.4.8 సందర్భము (3) :

(ఎ) సహాయక సమీకరణంలో ఒక మూలం 'r' సార్లు పునరావృతం

(బి) y_c పదాలలోని ఒక పదం, $f(x)$ ఈ మూలం నుంచి లభించింది.

(సి) $Q(x)$లో ఒక పదం $x^k f(x)$, (k సున్నా కాని, ధన పూర్ణాంకం కాని) C స్థిరరాశి గుణకాలు వదిలేసి) అయినప్పుడు ప్రత్యేక సమాకలని y_p, $x^{k+r}f(x)$ మరియు దాని ఋజు స్వతంత్ర అవకలజాల ఋజు సంయోగమవుతుంది. ఇవిగాక $Q(x)$లో మొదటి రెండు సందర్భాలకు సంబంధించిన పదాలుంటే, వాటికి సంబంధించిన పదాలను కూడా y_p లో చేర్చాలి.

8.4.9 ఉదాహరణ : $\left(D^2 + 4D + 4\right)y = 3xe^{-2x}$ సాధించుము.

సాధన: A.E.. $m^2 + 4m + 4 = 0 \Rightarrow m = -2, -2$

$\therefore$ C.F. $y_c = \left(C_1 + C_2x\right)e^{-2x}$.

$Q(x)$లోని xe^{-2x} పదము y_cలో e^{-2x} పదమునకు x రెట్లు ఉన్నది మరియు y_c లోని ఈ పదము A.E. యొక్క మూలము -2 నుండి వచ్చినది. A.E. యొక్క మూలముగా -2 యొక్క పునరావృతి $r = 2$ & $k = 1$. y_p ని $x^3\ e^{-2x}$ని మరియు దాని యొక్క ఋజు స్వతంత్ర అవకలజముల ఋజు సంయోగము అగును.

$y_p = Ax^3e^{-2x} + Bx^2e^{-2x}$ (y_cలో ఉన్నందున e^{-2x} మరియు xe^{-2x} లను లోపింపజేయుము)

దీనిని రెండుసార్లు అవకలనము చేయగా

$$y_p' = \left(3Ax^2 + 2Bx\right)e^{-2x} - 2\left(Ax^3 + Bx^2\right)e^{-2x}$$

$$y_p' = \left(-2Ax^3 + (3A - 2B)x^2 + 2Bx\right)e^{-2x}$$

$$y_p'' = \left(-6Ax^2 + 2(3A - 2B)x + 2B\right)e^{-2x} - 2\left[-2Ax^3 + (3A - 2B)x^2 + 2Bx\right]e^{-2x}$$

$$= \left[4Ax^3 + (-12A + 4B)x^2 + (6A - 8B)x + 2B\right]e^{-2x}$$

y_p, y_p', y_p'' విలువలను ఇచ్చిన అవకలన సమీకరణములోని ప్రతిక్షేపించగా

$$\left\{4Ax^3+(-12A+4B)x^2+(6A-8B)x+2B+4\left[-2Ax^3+(3A-2B)x^2+2Bx\right]+4\left[Ax^3+Bx^2\right]\right\}e^{-2x}$$
$$=3x\,e^{-2x}$$

$$\Rightarrow(6Ax+2B)e^{-2x}=3xe^{-2x}$$

ఇరువైపులా ఏకరీతి పదాలను పోల్చగా

$$6A=3 \;\Rightarrow A=\frac{1}{2}$$
$$2B=0\Rightarrow B=0$$

$$y_p=\frac{1}{2}x^3\,e^{-2x}$$

$\therefore$ సాధారణ సాధన $y=y_c+y_p$

$$y=(c_1+c_2x)e^{-2x}+\frac{1}{2}x^3e^{-2x}$$

8.5 సమకాలిక అవకలన సమీకరణములు

నిర్వచనము : $y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots, y_n$ లు t లో ప్రమేయాలు $D=\frac{d}{dt}$ అవకలన పరికర్త $P_{ij}(D), 1\le i,\ j\le n,$ బహుపది అవకలన పరికర్తలు అయినప్పుడు సమీకరణాల సరణి

$$\left.\begin{array}{l}P_{11}(D)y_1+P_{12}(D)y_2+\cdots\cdots+P_{1n}(D)y_n=Q_1(t)\\ P_{21}(D)y_1+P_{22}(D)y_2+\cdots\cdots+P_{2n}(D)y_n=Q_2(t)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ P_{n1}(D)y_1+P_{n2}(D)y_2+\cdots\cdots+P_{nn}(D)y_n=Q_n(t)\end{array}\right\}\text{------------ (1)}$$

ను ఋజు అవకలన సమీకరణాల సరణి అంటాము.

8.5.1 సరళ సమీకరణముల సరణి యొక్క సాధన : ఉమ్మడి అంతరము I పై $y_1(t),\ y_2(t),\cdots\cdots, y_n(t)$ ప్రమేయాలు సరణి **(1)**లోని అన్ని సమీకరణాలను సంతృప్తిపరిస్తే, ప్రమేయాల సమితి $\{y_1(t),\ y_2(t),\cdots\cdots, y_n(t)\}$ ని **(1)** యొక్క సాధన అంటాము.

$n = 2$ కు సరణి (1)ని పరికర్తల ద్వారా సాధించవచ్చును. బహుపది పరికర్తలు బీజగణిత నియమాలన్ని పాటించును. కావున బీజీయ సమకాలిక సమీకరణాల సరణిను సాధించుటలో ఉపయోగించు పద్ధతిని ఉపయోగించి సమకాలిక అవకలన సమీకరణాల వ్యవస్థ (1)ని సాధించవచ్చును. రెండు వ్యవస్థల మధ్య ఈ క్రింది రెండు ముఖ్యమైన అంతరాలు వున్నవి.

(1) పరికర్త సంకేతము D సంఖ్యాత్మక విలువ కాదు. అది ప్రమేయము పై ప్రయోగించు అవకలన పరికర్త. పరికర్తలను ప్రయోగించు క్రమము చాలా ముఖ్యము.

(2) బీజ గణిత వ్యవస్థల సాధనలలో యాదృచ్ఛిక స్థిరాంకములు వుండవు. కాని (1) యొక్క సాధారణ సాధనలో యాదృచ్ఛిక స్థిరాంకములు ఉండును.

(1) యొక్క సాధారణ సాధనలో యాదృచ్ఛిక స్థిరాంకాల సంఖ్యను నిర్ణయించుటలో ఈ క్రింది సిద్ధాంతాన్ని ఉపపత్తి లేకుండా అనుసరిస్తాము.

8.5.2 సిద్ధాంతము:

$$\left.\begin{aligned} P_1(D)x + P_2(D)y = q_1(t) \\ P_3(D)x + P_4(D)y = q_2(t) \end{aligned}\right\} \text{----------} \ (2)$$

సమీకరణ యుగ్మమును తీసుకొనుము. (2) యొక్క సాధారణ సాధనలు $x(t), y(t)$లలో యాదృచ్ఛిక స్థిరాంకాల సంఖ్య $P_1(D)\,P_4(D) - P_2(D)\,P_3(D)$ ---------- (3) యొక్క తరగతి (D ఘాతానికి) సమానము.

ఇచ్చట $P_1(D)\,P_4(D) - P_2(D)\,P_3(D) \neq 0$ కావలెను.

$P_1(D)\,P_4(D) - P_2(D)\,P_3(D) = 0$ అయితే సరణి (2)ను హీనసరణి అని అంటారు. మరియు అది శూన్యేతరమైతే సరణి (2)ను అహీన సరణి సమాసము (3) స్థిరాంకము రూపములో ఉన్నది కావున

సమాసము (3) నిర్ధారకము రూపములో ఉన్నది. కావున

$$\begin{vmatrix} P_1(D) & P_2(D) \\ P_3(D) & P_4(D) \end{vmatrix} = P_1(D)\,P_4(D) - P_2(D)P_3(D) \text{ గా వ్రాస్తాము.}$$

8.5.3 ఉదాహరణ: $2\dfrac{dx}{dt} - x + \dfrac{dy}{dt} + 4y = 1$

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = t - 1 \text{ -------} \ (1)$$

సాధన : $D = \dfrac{d}{dt}$, అనుకొనగా

$$\left.\begin{aligned}(2D-1)x+(D+4)y&=1\\ Dx-Dy&=t-1\end{aligned}\right\}\text{ --------- (2)}$$

మొదటి సమీకరణాన్ని D తో రెండవ దాన్ని $(D+4)$తో గుణకారము చేసి సంకలనము చేయగా

$$D(2D-1)x+\cancel{D(D+4)y}=D(1)=0$$
$$(D+4)Dx-\cancel{D(D+4)y}=(D+4)(t-1)=4t-3$$

సంకలనము చేయగా $\left(3D^2+3D\right)x=4t-3$ ---------------- (3)

(3) యొక్క A.E. $3m^2+3m=0\Rightarrow m(m+1)=0\Rightarrow m=0,-1$

(3) యొక్క C.F. $x_c=c_1+c_2e^{-t}$

(3) యొక్క P.I. $x_p=\dfrac{1}{3D^2+3D}(4t-3)=\dfrac{1}{3D(D+1)}(4t-3)$

$$=\frac{1}{3D}(1+D)^{-1}(4t-3)$$

$$=\frac{1}{3D}\left(1-D+D^2-\cdots\right)(4t-3)$$

$$=\frac{1}{3D}(4t-3-4)=\frac{1}{3D}(4t-7)$$

$$=\frac{1}{3}\int(4t-7)dt=\frac{1}{3}\left(\frac{4t^2}{2}-7t\right)$$

$$=\frac{2}{3}t^2-\frac{7}{3}t$$

(3) యొక్క సాధారణ సాధన $x=x_c+x_p$

$$x(t)-c_1+c_2e^{-t}+\frac{2}{3}t^2-\frac{7}{3}t \text{ ---------- (4)}$$

(2) యొక్క రెండవ సమీకరణములో (4)ను ప్రతిక్షేపించగా

$$Dx - Dy = t - 1$$

$$Dy = Dx - t + 1$$

$$= D\left[c_1 + c_2e^{-t} + \frac{2}{3}t^2 - \frac{7}{3}t\right] - t + 1$$

$$= -c_2e^{-t} + \frac{4}{3}t - \frac{7}{3} - t + 1$$

$$Dy = -c_2e^{-t} + \frac{t}{3} - \frac{4}{3}$$

ఇరువైపులా సంకలనము చేయగా

$$y(t) = \int\left(-c_2\, e^{-t} + \frac{t}{3} - \frac{4}{3}\right)dt + c_3$$

$$y(t) = c_2e^{-t} + \frac{t^2}{6} - \frac{4}{3}t + c_3 \text{ -------- (5)}$$

(2) యొక్క స్థిరాంకము

$$\begin{vmatrix} 2D-1 & D+4 \\ D & -D \end{vmatrix} = -3D^2 - 3D$$

దీని యొక్క క్రమము 2. సిద్ధాంతము 8.5.2 ప్రకారము సాధారణ సాధనలో కనిపించే స్థిరాంకాల సంఖ్య 2, కాని సమీకరణములు (4) మరియు (5)లలో మూడు స్థిరాంకాలు ఉన్నవి. ఈ మూడు స్థిరాంకాల మధ్య సంబంధాన్ని కనుగొనుటకు సమీకరణముల వ్యవస్థ యొక్క సాధన ప్రమేయాల సమితి అనే సత్యాన్ని ఉపయోగిస్తాము. ఈ సాధన వ్యవస్థలోని ప్రతి సమీకరణాన్ని సమానంగా తృప్తి పరచును. (4) మరియు (5)ల నుంచి $x(t)$, $y(t)$ లను (2)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$(2D-1)\left[c_1 + c_2e^{-t} + \frac{2}{3}t^2 - \frac{7}{3}t\right] + (D+4)\left[c_2e^{-t} + \frac{t^2}{6} - \frac{4}{3}t + c_3\right] = 1 \text{ ---------- (6)}$$

$$\Rightarrow c_3 = \frac{c_1 + 7}{4}$$

c_3 యొక్క ఈ విలువతో t యొక్క అన్ని విలువలకు (6) సత్యము.

ఈ విలువను (5)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$y(t) = c_2 e^{-t} + \frac{t^2}{6} - \frac{4}{3}t + \frac{c_1 + 7}{4} \text{ ------------ (7)}$$

సమీకరణములు (4), (7)లచే నిర్వచింపబడిన ప్రమేయాల యుగ్మం $x(t)$, $y(t)$లలో రెండు యాదృచ్ఛిక స్థిరాంకాలు ఉండును. మరియు ఇది (2) యొక్క సాధారణ సాధన.

8.5.4 ఉదాహరణ : $\frac{dx}{dt} = 3x + 2y$

$\frac{dy}{dt} + 5x + 3y = 0$ సాధించుము.

సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణములు

$$(D-3)x - 2y = 0$$

$$5x + (D+3)y = 0, \; D = \frac{d}{dt}$$

y ను తొలగించుటకు సమీకరణము (1) పై $(D+3)$ను ప్రయోగించి మరియు రెండవ సమీకరణమును (2)తో గుణకారము చేయవలెను.

$$\begin{aligned} (D+3)(D-3)x - \cancel{2(D+3)y} &= 0 \\ 10x + \cancel{2(D+3)y} &= 0 \\ \hline \end{aligned}$$

సంకలనము చేయగా $\left(D^2 + 1\right)x = 0$ -------- (2)

(2) యొక్క A.E. (సహాయక సమీకరణం) $m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m = \pm i$

(2) యొక్క సాధన $x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ --------- (3)

(1) యొక్క మొదటి సమీకరణములో x విలువను ప్రతిక్షేపించగా

$$(D-3)[c_1 \cos t + c_2 \sin t] - 2y = 0$$

$$\Rightarrow 2y = -c_1 \sin t + c_2 \cos t - 3c_1 \cos t - 3c_2 \sin t$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}\left[(c_2 - 3c_1)\cos t - (c_1 + 3c_2)\sin t\right] \text{ ----------- (4)}$$

(1) యొక్క స్థిరాంకము

$$\begin{vmatrix} D-3 & -2 \\ 5 & D+3 \end{vmatrix} = D^2 - 9 + 10 = D^2 + 1$$

దీని తరగతి 2. $x(t), y(t)$ లలోని స్థిరాంకల సంఖ్య, క్రమమునకు సమానము. సమీకరణములు (3) మరియు (4)లలోని $x(t), y(t)$ ప్రమేయాల యుగ్మంలో రెండు స్థిరాంకాలు మాత్రము వున్నాయి. మరియు అది (1) యొక్క సాధారణ సాధన.

8.5.7 ఉదాహరణ: $\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} + 2y + z = 0$

$\frac{dz}{dx} + 5y + 3z = 0$ ను సాధించుము.

సాధన: ఇచ్చిన సమీకరణములు $D \equiv \frac{d}{dx}$

$(D+2)y + (D+1)z = 0$ ---------- (1)

$(D+3)z + 5y = 0$ ---------------- (2)

(1) మరియు (2)ల నుంచి y ని లోపింపచేయుటకు

(1)ని 5తో గుణకారము చేసి మరియు (2) పై $(D+2)$ పరిక్రియను ప్రయోగించిన

$$\begin{array}{rl} & 5(D+2)y + 5(D+1)z = 0 \\ & \underline{5(D+2)y + (D+2)(D+3)z = 0} \\ (-) & (5(D+1) - (D+2)(D+3))z = 0 \end{array}$$

$$-(D^2+1)z = 0$$

$$\Rightarrow (D^2+1)z = 0 \text{ ---------- (3)}$$

A.E. . $m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m = \pm i$

(3) యొక్క సాధన

$$Z = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

(2)లో z విలువను ప్రతిక్షేపించగా

$$(D+3)\left[c_1\cos x + c_2\sin x\right] + 5y = 0$$

$$(-c_1\sin x + c_2\cos x + 3c_1\cos x + 3c_2\sin x) + 5y = 0$$

$$5y = (c_1 - 3c_2)\sin x - (c_2 + 3c_1)\cos x$$

$$y = \frac{1}{5}(c_1 - 3c_2)\sin x - \frac{(c_2 + 3c_1)}{5}\cos x$$

$$\begin{vmatrix} D+2 & D+1 \\ D+3 & 5 \end{vmatrix} = 5D + 10 - D^2 - 4D - 3$$

$$= -(D^2 - D - 7)$$

దీని క్రమము 2. కాబట్టి సాధారణ సాధనలో రెండు యాధృచ్ఛిక స్థిరాంకములు ఉంటాయి.

(1) మరియు (2)ల సాధారణ సాధన

$$z = c_1\cos x + c_2\sin x$$

$$y = \frac{(c_1 - 3c_2)}{5}\sin x - \frac{(c_2 + 3c_1)}{5}\cos x$$

8.5.8 ఉదాహరణ: $\frac{dx}{dt} + 4x + 3y = t$

$\frac{dy}{dx} + 2x + 5y = e^t$ సాధించుము.

సాధన: పరిక్రియా రూపంలో ఇచ్చిన సమీకరణములు

$(D+4)x + 3y = t$ ---------- (1)

$2x + (D+5)y = e^t$ --------- (2)

(1)మరియు (2)ల నుంచి y ని లోపింపజేయుటకు

(1)లో $(D+5)$ ని ఉపయోగించి మరియు (2)ను 3తో గుణకారము చేయగా

$$(D+5)(D+4)x+3(D+5)y=(D+5)t------(3)$$

$$6x+3(D+5)y=3e^t \qquad ------(4)$$

సమాకలనము చేయగా $\left(D^2+9D+20-6\right)x=1+5t-3e^t$

$$\left(D^2+9D+14\right)x=1+5t-3e^t \text{ -------- (5)}$$

A.E. $m^2+9m+14=0 \Rightarrow m=-2,-7$

$$\therefore x_c=c_1e^{-2t}+c_2e^{-7t}$$

$$x_p=\frac{1}{D^2+9D+14}\left(1+5t-3e^t\right)$$

$$=\frac{1}{D^2+9D+14}(1+5t)-3\frac{1}{D^2+9D+14}\cdot e^t$$

$$=\frac{1}{14\left[1+\frac{D^2+9D}{14}\right]}(1+5t)-3\frac{e^t}{1^2+9\cdot1+14}$$

$$=\frac{1}{14}\left[1+\frac{D^2+9D}{14}\right](1+5t)-\frac{3e^t}{24}$$

$$=\frac{1}{14}\left[1-\frac{D^2+9}{14}+\cdots\right](1+5t)-\frac{e^t}{8}$$

$$=\frac{1}{14}\left[1+5t-\frac{9.5}{14}\right]-\frac{e^t}{8}=\frac{5t}{14}-\frac{3t}{196}-\frac{1}{8}e^t$$

(5) యొక్క సాధన

$$x=x_c+x_p$$

$$x=c_1e^{-2t}+c_2e^{-7t}+\frac{5t}{14}-\frac{31}{196}-\frac{1}{8}e^t$$

$$\frac{dx}{dt}=-2c_1e^{-2t}-7c_2e^{-7t}+\frac{5t}{14}-\frac{31}{196}-\frac{1}{8}e^t$$

$x, \frac{dx}{dt}$ లను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$(D+4)x+3y=t$$

$$-2c_1e^{-2t}-7c_2e^{-7t}+\frac{5}{14}-\frac{1}{8}e^t-4\left(c_1e^{-2t}+c_2e^{-7t}+\frac{5}{14}t-\frac{37}{196}-\frac{1}{8}e^t\right)+3y=t$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{3}\left[3e_1e^{-7t}\cdot 2c_2\,e^{-2t}-\frac{3}{7}t+\frac{27}{98}+\frac{5e^t}{8}\right]$$

$$\begin{vmatrix} D+4 & 3 \\ 2 & D+5 \end{vmatrix} = D^2+9D+14,$$

దీని తరగతి 2 కావున సాధారణ సాధనలో రెండు యాధృచ్ఛిక స్థిరాంకాలు వుంటాయి.

(1) మరియు (2)ల సాధారణ సాధన

$$x=c+e^{-2t}-7c_2e^{-7t}+\frac{5}{14}-\frac{1}{8}e^t$$

$$y=\frac{1}{3}\left[3c_1\,e^{-7t}-2c_2\,e^{-2t}-\frac{3}{7}t+\frac{27}{98}+\frac{5e^t}{8}\right]$$

8.6 తుల్య త్రిభుజ రూప సరణి:

రెండు సమీకరణములు

$$\left.\begin{aligned} P_1(D)x+P_2(D)y=q_1(t) \\ P_3(D)x+P_4(D)y=q_2(t) \end{aligned}\right\} \text{------------ (1)}$$

మనము ఈ క్రింది విధముగా క్రొత్త సరణిను పొందవచ్చును. (1)లోని రెండు సమీకరణములలో ఒక దానిని (మొదటి సమీకరణం అనుకొందాము). ఉంచి రెండవ దానిని మార్పుచేయవలెను. మొదటి సమీకరణమును యాధృచ్ఛిక పరికర్త $K(D)$ -తో గుణకారము చేసి మరియు రెండవ దానితో సంకలనము చేయుట ద్వారా దీనిని పొందవచ్చును.

$$\left.\begin{aligned} &P_1(D)x+P_2(D)y=q_1(t) \\ &\left[P_1(D)K(D)+P_3(D)\right]x+\left[P_2(D)K(D)+P_4(D)\right]y=K(D)q_1(t)+q_2(t) \end{aligned}\right\} \text{-------- (2)}$$

ప్రమేయాల యుగ్మం $x(t), y(t)$ లు సరణి (1)ని తృప్తి పరచినట్లే సరణి (2)ని తృప్తి పరచును. మరియు (1), (2) సరణులు తుల్య సరణులు.

రెండు సరణుల నిర్ధారకములు సమానము.

కాబట్టి ఎప్పుడు సరణిలోని ఒక సమీకరణమును మార్పు చేయకుండా ఉంచి రెండవ దానిని పై పద్ధతి ద్వారా మార్పు చేసి (1)తో తుల్యమయ్యే క్రొత్త సరణిని పొందవచ్చును.

$$\left.\begin{aligned} &P_1(D)x = q_1(t) \\ &P_3(D)x + P_4(D)y = q_2(t) \end{aligned}\right\} \text{---------- (3)}$$

x యొక్క గుణకము లేక y యొక్క గుణకము సున్నా అయ్యేటటువంటి సరణిని తుల్య త్రిభుజ రూప సరణి అంటారు.

ఇచ్చిన సరణి

$$\left.\begin{aligned} &P_1(D)x = q_1(t) \\ &P_4(D)y = q_2(t) \end{aligned}\right\} \text{---------- (4.క)}$$

రూపములో (లేక)

$$\left.\begin{aligned} &P_1(D)x = q_1(t) \\ &P_3(D)x + P_4(D)y = q_2(t) \end{aligned}\right\} \text{-------- (4.ఖ)}$$

రూపములో ఉన్నట్లయితే సరణిని సాధించగా వచ్చు ప్రమేయములు $x(t), y(t)$లలో స్థిరాంకములు.

8.6.1 ఉదాహరణ : $\left.\begin{aligned} &(3D^2+3D)x = 4t-3 \\ &(D-1)x - D^2y = t^2 \end{aligned}\right\}$ సాధించుము --------- (1)

సాధన:

$$\left.\begin{aligned} &(3D^2+3D)x = 4t-3 \\ &(D-1)x - D^2y = t^2 \end{aligned}\right\} \text{సాధించుము ------- (1)}$$

(1)లో మొదటి సమీకరణము $(3D^2+3D)x = 4t-3$

A.E. $3m^2+3m=0 \Rightarrow 3m(m+1)=0 \quad m=0,-1$

C.F. $x_c = c_1 + c_2 e^{-t}$

$$\text{P.I.} = x_p = \frac{1}{3D(D+1)}(4t-3)$$

$$= \frac{1}{3D}(1+D)^{-1}(4t-3)$$

$$= \frac{1}{3D}\left(1 - D + D^2 - \cdots\cdots\right)(4t-3)$$

$$= \frac{1}{3D}(4t-3-4) = \frac{1}{3D}(4t-7)$$

$$= \frac{1}{3D}\int(4t-7)\,dt$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{4t^2}{2} - 7t\right) = \frac{2}{3}t^2 - \frac{7}{3}t$$

(1)లో మొదటి సమీకరణానికి సాధారణ సాధన

$$x(t) = x_c + x_p = c_1 + c_2 e^{-t} + \frac{2}{3}t^2 - \frac{7}{3}t \text{ ----------- (2)}$$

దీనిని (1)లోని రెండవ సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించగా

$$(D-1)\left[c_1 + c_2\, e^{-t} + \frac{2}{3}t^2 + \frac{7}{3}t\right] - D^2 y = t^2$$

$$\left(-c_2 e^{-t} + \frac{4}{3}t - \frac{7}{3} - c_1 - c_2 e^{-t} - \frac{2}{3}t^2 + \frac{7}{3}t\right) - D^2 y = t^2$$

$$D^2 y = -\frac{7}{3} - c_1 - c_2 e^{-t} + \frac{11}{3}t - \frac{5}{3}t^2$$

$$\Rightarrow Dy = \int\left(-\frac{7}{3} - c_1 - 2c_2 e^{-t} + \frac{11}{3}t - \frac{5}{3}t^2\right)dt + c_3$$

$$= -\frac{7}{3}t - c_1 t + 2c_2 e^{-t} + \frac{11}{3}\cdot\frac{t^2}{2} - \frac{5}{3}\cdot\frac{t^3}{3} + c_3$$

$$\Rightarrow y=\int\left[c_3-\left(\frac{7}{3}+c_1\right)t+2c_2\cdot e^{-t}+\frac{11}{6}t^2-\frac{5}{9}t^3\right]dt+c_4$$

$$y=c_4+c_3t-\left(\frac{7}{6}+\frac{c_1}{2}\right)t^2+\frac{11}{18}t^3-\frac{5}{36}t^4-2c_2e^{-t} \text{ -------- } (3)$$

సమీకరణాలు (2) మరియు (3)లలోని ప్రమేయములు, (1) యొక్క సాధారణ సాధన అగును. మరియు సిద్ధాంతము 8.5.2 నుంచి ఇది నాలుగు యాదృచ్ఛిక స్థిరాంకముల కలిగియున్నవి.

8.6.2 ఉదాహరణ: $\left.\begin{aligned}(3D-1)x+4y&=t\\ Dx-Dy&=t-1\end{aligned}\right\}$ సాధించుము.

సాధన: ఇచ్చిన సమీకరణములు

$$\left.\begin{aligned}(3D-1)x+4y&=t\\ Dx-Dy&=t-1\end{aligned}\right\} \text{ ---------- } (1)$$

మొదటి సమీకరణమును మార్పు చేయకుండా ఉంచి మరియు మొదటి సమీకరణమును $\frac{D}{4}$ తో గుణించి మరియు దానిని రెండవ సమీకరణములో సంకలనము చేసిన సరణి (2) వచ్చును.

$$\frac{D}{4}(3D-1)x+Dy=\frac{D}{4}(t)$$

$$Dx-Dy=t-1$$

సమాకలనం చేయగా $\frac{1}{4}\left(3D^2+3D\right)x=\frac{1}{4}(1+4t-4)$

i.e. $\left(3D^2+3D\right)x=4t-3$

$$\left.\begin{aligned}(3D-1)x+4y&=t\\ \left(3D^2+3D\right)x&=4t-3\end{aligned}\right\} \text{ ----------- } (2)$$

(2)లో రెండవ సమీకరణము తీసుకొనుము.

$$\left(3D^2+3D\right)x=4t-3$$

A.E. $3m^2+3m=0\Rightarrow m(m+1)=0 \quad \Rightarrow m=0,-1.$

C.F. $x_c=c_1+c_2e^{-t}$

P.I. $x_p = \frac{1}{3D^2+3D}(4t-3) = \frac{1}{3D(D+1)}(4t-3)$

$$= \frac{1}{3D}(1+D)^{-1}(4t-3)$$

$$= \frac{1}{3D}\left(1-D+D^2-\cdots\right)(4t-3)$$

$$= \frac{1}{3D}(4t-3-4) = \frac{1}{3D}(4t-7)$$

$$= \frac{1}{3}\int(4t-7)\,dt$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{4t^2}{2}-7t\right) = \frac{2}{3}t^2 - \frac{7}{3}t$$

$\therefore$ **(2)**లోని రెండవ సమీకరణమునకు సాధారణ సాధన

$$x(t) = c_1 + c_2e^{-t} + \frac{2}{3}t^2 - \frac{7}{3}t$$

దీనిని **(2)**లోని మొదటి సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించగా

$$(3D-1)\left[c_1 + c_2e^{-t} + \frac{2}{3}t^2 - \frac{7}{3}t\right] + 4y = t$$

$$3\left(-c_2e^{-t} + \frac{4}{3}t - \frac{7}{3} - c_1 - c_2e^{-t} - \frac{2}{3}t^2 + \frac{7}{3}t\right) - t = -4y$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{c_1+7}{4} + c_2e^{-t} + \frac{1}{6}t^2 - \frac{4}{3}t$$

(1) యొక్క నిర్ధారకము $(3D-1)(-D)-4D = -3D^2-3D$, దీని తరగతి **2.** ప్రమేయాల యుగ్మం $x(t), y(t)$ సరియగు సంఖ్యలో స్థిరాంకములు కలిగి ఉండును. కావున ఇది దత్త సమీకరణ సరణి యొక్క సాధారణ సాధన అగును.

8.6.3 ఉదాహరణ:

$$\left.\begin{array}{l}(D+4)x+Dy=1\\(D-2)x+y=t^2\end{array}\right\}\text{ ---------- (1)}$$

సాధన: ఇక్కడ సరణి (1)లో మొదటి సమీకరణము మార్పు చేయకుండా ఉంచి, రెండవ సమీకరణమును $-D$తో గుణించి మొదటి దానికి కూడగా,

$$(D+4)x+Dy=1$$
$$-D(D-2)x-Dy=-D\left(t^2\right)$$

సమాకలనము చేయగా $\left(-D^2+3D+4\right)x=-2t+1$

కావున తుల్య త్రిభుజ రూప సరణి

$$\left.\begin{array}{l}\left(-D^2+3D+4\right)x=-2t+1\\(D-2)x+y=t^2\end{array}\right\}\text{ ---------- (2)}$$

(2)లో మొదటి సమీకరణమును తీసుకొనుము.

$$\left(-D^2+3D+4\right)x=-2t+1$$

A.F. $-m^2+3m+4=0\Rightarrow m=-1,\ 4$

C.F.. $x_c=c_1e^{4t}+c_2e^{-t}$

P.I. $x_p=\dfrac{1}{\left(-D^2+3D+4\right)}(-2t+1)=\dfrac{1}{-[D+1](D-4)}(-2t+1)$

$$=\frac{1}{4(1+D)\left(1-\dfrac{D}{4}\right)}(-2t+1)=\frac{1}{-[D+1](D-4)}(-2t+1)$$

$$=\frac{1}{4(1+D)}\left(1+\frac{D}{4}+\frac{D^2}{16}+\cdots\cdots\right)(-2t+1)$$

$$=\frac{1}{4(1+D)}\left(-2t+1-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - D + D^2 - \cdots\right)\left(-2t + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(-2t + \frac{1}{2} + 2\right) = -\frac{t}{2} + \frac{5}{8}$$

(2) యొక్క మొదటి సమీకరణమునకు సాధారణ సాధన

$$x(t) = x_c + x_p = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t} - \frac{t}{2} + \frac{5}{8} \text{ --------- (3)}$$

దీనిని (1) యొక్క రెండవ సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించగా

$$(D-2)\left[c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t} - \frac{t}{2} + \frac{5}{8}\right] + y = t^2$$

$$\Rightarrow y(t) = -2c_1 e^{4t} + 3c_2 e^{-t} + t^2 - t + \frac{7}{4} \text{ -------- (4)}$$

(1) యొక్క నిర్ధారకము తీసుకొనిన దాని తరగతి రెండు మరియు ప్రమేయాల యుగ్మం (3) మరియు (4)లలో రెండు స్థిరాంకములు వున్నవి మరియు ఇది (1) యొక్క సాధారణ సాధన.

8.6.4 హీన సరణి సందర్భము : ఋజు సమీకరణముల సరణి

$$\left.\begin{aligned} P_1(D)x + P_2(D)y = q_1(t) \\ P_3(D)x + P_4(D)y = q_2(t) \end{aligned}\right\} \text{ ---------- (1)}$$

స్థిరాంకము $\begin{vmatrix} P_1(D) & P_3(D) \\ P_2(D) & P_4(D) \end{vmatrix} = 0$ అయినపుడు హీన సరణి అంటారు.

x లేకy ని లోపింపచేసినపుడు సరణి (1) యొక్క కుడివైపు భాగము సున్నా కాకపోతే, దీనికి సాధన లేదు. కుడివైపు భాగము సున్నా అయినట్లయితే దత్త సరణికి అనంత సంఖ్యలో సాధనాలుంటాయి.

8.6.5 ఉదాహరణ:

$$Dx - Dy = t$$
$$Dx - Dy = t^2$$

సరణిని హీనసరణి అని చూపుము మరియు దత్త సరణికి ఎన్ని సాధనలు ఉన్నాయో తెలుపుము.

సాధన : ఇక్కడ నిర్ధారకము $\begin{vmatrix} D & -D \\ D & -D \end{vmatrix} = 0$ కావున దత్త సరణి హీన సరణి. x లేక yని లోపింపచేయగా కుడి వైపు భాగము సున్నా కావడము లేదు. కావున దీనికి సాధన లేదు.

8.6.6 : $Dx - Dy = t,\ 4Dx - 4Dy = 4t$

సాధన : ఇక్కడ నిర్ధారకము $\begin{vmatrix} D & -D \\ 4D & -4D \end{vmatrix} = 0$.

కావున దత్త సరణి హీన సరణి అగును. x లేక y ని లోపింపజేసినపుడు దత్త సరణి యొక్క కుడివైపు భాగము సున్నా అగును. కావున దీనికి అనంత సంఖ్యలో సాధనలు ఉండును.

8.7 సారాంశము:

ఈ పాఠములో అనిర్థారిత గుణకముల పద్ధతి ద్వారా $f(D)y = Q(x)$ అనే అవకలన సమీకరణమునకు ప్రత్యేక సమాకలని (P.I.) ని కనుగొను విధానము గురించి చర్చించాము. వివిధ సందర్భాలలో ఉన్న సమకాలిక సరళ సమీకరణములను చర్చించాము మరియు కొన్ని సమస్యలను సాధించాము.

8.9 సాంకేతిక పదాలు:

అనిర్ధారిత గుణకములు

పునరావృత మూలము

సమకాలిక ఋజు సమీకరణములు

నిర్ధారకము

తుల్య త్రిభుజ రూప సరణి

హీనసరణి

8.9 అభ్యాసము:

1. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4x + y = te^{3t}$

$\dfrac{d^2y}{dt^2} + y - 2x = \cos^2 t$ సాధించుము.

2. $(5D+4)y=(2D+1)z=e^{-x}$

$(D+8)y-3z=5e^{-x}$ సాధించుము.

3. $\dfrac{dx}{dt}+y-1=\sin t$

$\dfrac{dy}{dt}+x=\cos t$ సాధించుము.

4. $\dfrac{dx}{dt}+y=\sin t$

$\dfrac{dy}{dx}+x=\cos t$ సాధించుము, $t=0$ అయినపుడు $x=2$ మరియు $y=0$ ఇవ్వబడినవి.

5. $\dfrac{dx}{dt}+2y=e^{t}$

$\dfrac{dy}{dt}-2x=e^{-t}$ సాధించుము.

6. $\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}-2x=\sin 2t$

$\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}+2y=\cos 2t$ సాధించుము.

ఈ క్రింది సమీకరణాలను అనిర్ధారిత గుణకాల పద్ధతి ద్వారా సాధించుము.

7) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dx}+2y=12e^{x}$

8) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dx}+2y=\sin x$

9) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}+y=x^2$

10) $\left(D^2-2D-8\right)y=9xe^{x}+10e^{-x}$

8.10 అభ్యాసములకు సమాధానములు:

1) $x = \left(c_1 \cos\sqrt{3}t + c_2 \sin\sqrt{3}t\right) + \left(c_3 \cos\sqrt{2}t + c_4 \sin\sqrt{2}t\right) + \frac{5}{66}te^{3t} - \frac{49}{1452}e^{3t} - \frac{1}{12} - \frac{1}{4}\cos 2t$

$y = -\left(c_1 \cos\sqrt{3}t + c_2 \sin\sqrt{3}t\right) - 2\left(c_3 \cos\sqrt{2}t + c_4 \sin\sqrt{2}t\right) + \frac{1}{66}te^{3t} - \frac{23}{1452}e^{3t} + \frac{1}{3}$

2) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} + 2e^{-x}$

$z = 2c_1 e^{-2x} + 3c_2 e^{x} + 3e^{-x}$

3) $x = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t}$

$y = 1 + \sin t - c_1 e^{t} + c_2 e^{-t}$

4) $x = e^{t} + e^{-t}, \; y = -e^{t} + e^{-t} + \sin t$

5) $x = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \frac{1}{5}e^{t} - \frac{2}{5}e^{-t}$

$y = \frac{1}{2}\left[e^{t} + 2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t - \frac{1}{5}e^{t} - \frac{2}{5}e^{-t}\right]$

6) $x = e^{t}\left(c_1 \cos t + c_2 \sin t\right) - \frac{1}{2}\cos 2t$

$y = e^{t}\left(c_1 \sin t - c_2 \cos 2t\right) - \frac{1}{2}\sin 2t$

7) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + 2e^{x}$

8) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{10}(\sin x - 3\cos x)$

9) $y = e^{-x/2}\left[c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right] + x^2 - 2x$

10) $y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-2x} - xe^{x} - 2e^{-x}$

8.11 మాదిరి ప్రశ్నలు

1) $$\frac{dx}{dt} = x - 2y$$

$\frac{dy}{dt} = 5x + 3y$ ను సాధించుము.

2) $$\frac{dx}{dt} = -ay$$

$\frac{dy}{dt} = ax$ ను సాధించుము.

3) $$\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} + 2y + z = 0$$

$\frac{dz}{dx} + 5y + 3z = 0$ ను సాధించుము.

4) $(D^2 - 3D)y = 2e^{2x}\sin x$ ను అనిర్ధారిత గుణకాల పద్ధతి ద్వారా సాధించుము.

5) $(D^2 + D)y = x^2 + 2x$ ను అనిర్ధారిత గుణకాల పద్ధతి ద్వారా సాధించుము.

8.12 ప్రామాణిక గ్రంథములు

1. Erwin Kroyszing, Advanced Engineering Mathematics, Wiley Student Edition.
2. Zafar, Asham, Differential Equations and their Applications.
3. Earl A. Coddington, An Introduction to ordinary Differential Equations, Pentice Hall of India.

-- డాక్టర్ బి. రామిరెడ్డి

పాఠం - 9

సంఖ్యా వాదము, సమూహాలు, ఉప సమూహాలు

9.1 పాఠ్య లక్ష్యం:

సంఖ్యా వాదంలోని కొన్ని ప్రాథమిక ఫలితాలను మరియు "సమూహము" అనే ఒక ముఖ్యమైన బీజీయ నిర్మాణము, దాని యొక్క కొన్ని ధర్మాలను విద్యార్థులకు పరిచయం చేయడం అనేవి-ఈ పాఠం యొక్క లక్ష్యాలు.

9.2 పాఠ్య నిర్మాణం:

ఈ పాఠంలో యీ క్రింది అంశాలు ఉన్నాయి.

9.3 పరిచయం

9.4 భాజకాలు

9.5 ప్రధాన సంఖ్యలు

9.6 సమ శేషకతలు

9.7 ఏకఘాత సమ శేషకతల సాధనలు

9.8 ఆయిలర్, ఫెర్మా సిద్ధాంతాలు

9.9 ఆయిలర్ ప్రమేయం $\phi(n)$

9.10 యుగ్మ పరిక్రియ

9.11 సమూహం

9.12 ఉప సమూహాలు

9.13 స్వయం మదింపు ప్రశ్నలకు సమాధానాలు

9.14 అభ్యాసాలు

9.15 సంఖ్యా వాదంలోని అభ్యాసాలకు సమాధానాలు

9.16 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు

9.17 ప్రామాణిక గ్రంథాలు

9.3 పరిచయం:

9.4 నుండి **9.9** విభాగాలలో సంఖ్యా వాదం చర్చించబడింది. గరిష్ఠ సామాన్య భాజకం (గ.సా.భా.) (g.c.d.) మరియు కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజం (క.సా.గు.) (L.C.M.) లను నిర్వచించి, గ.సా.భా.ను గణించడానికి యూక్లిడిన్ విశేష విధి (algorithm) నిరూపించబడింది. ప్రధాన సంఖ్యలను నిర్వచించి, 1 కంటే పెద్దదైన ప్రతి పూర్ణాంకాన్ని ఏకైక విధంగా ప్రధాన సంఖ్యల లబ్ధంగా

వ్రాయవచ్చని నిరూపించబడింది. ప్రధాన సంఖ్యల సమితి అనంతం అని కూడ చూపించబడింది. ఏక ఘాత సమశేషకతా సమీకరణాల సాధనలు, చైనీస్ శేష సిద్ధాంతము, ఆయిలర్ సిద్ధాంతము, ఫెర్మా సిద్ధాంతము, విల్సన్ సిద్ధాంతము మొదలగు సంఖ్యా వాదంలోని ప్రముఖ సిద్ధాంతాల బుజువులు చర్చించబడినవి.

9.10 నుండి 9.12 విభాగాలలో "సమూహ వాదం" చర్చించబడింది. "యుగ్మ పరిక్రియ", " సమూహం", "ఉప సమూహం", "చక్రీయ సమూహం" అనే భావనలను ప్రవేశపెట్టి సమూహాల యొక్క కొన్ని ముఖ్య ధర్మాలను ప్రస్తావించడం జరిగినది.

సంఖ్యా వాదము, సమూహ వాదాలలోని భావనలను సులభంగా అర్థం చేసుకోవడానికి వీలుగా అనేక ఉదాహరణలు ఇవ్వబడినాయి.

సంఖ్యా వాదము

9.4 భాజకాలు:

పూర్ణాంకాల సమితిని Z తో సూచిస్తాము. అన్యథా నిర్దేశింపబడనంత వరకు ఆంగ్ల భాషలోని నిమ్న తరగతి బీజాక్షరాలు (Lower Case English Letters) పూర్ణాంకాలను సూచిస్తాము.

9.4.1. నిర్వచనం : a, b లు పూర్ణ సంఖ్యలు, $a \neq 0$ లకు $ax = b$ అయ్యేటట్లు పూర్ణ సంఖ్య ఉంటే b ని a భాగిస్తుంది. లేక a చే b భాగింపబడుతుంది అని అంటాము. ఈ సందర్భములో $a \mid b$ అని వ్రాస్తాము. b ని a భాగించకపోతే $a \nmid b$ అని వ్రాస్తాము.

$a \mid b$ అయితే a ని b కు కారణాంకము లేక భాజకము అని, b ని a కు గుణిజము అని అంటాము.

9.4.2. ఉదాహరణలు : $5 \mid 25,\ -8 \mid 56, 17 \mid 51, \cdots$

$12 \nmid 17,\ 2 \nmid 13, \ldots$

9.4.3. నిర్వచనము : $a \mid b,\ 0 < a < b$ అయితే a ని b కు శుద్ధ భాజకము అని అంటాము.

eg: 36 కు 3 శుద్ధ భాజకము.

$a \neq 0$ అయితే $a \mid a,\ a \mid 0$ అనియు, $a \mid 1$ అయితే $a = \pm 1$ అనియు గమనించవచ్చును.

9.4.4. సిద్ధాంతము :

(1) $a \mid b \Rightarrow a \mid bc,\ (c \in Z)$

(2) $a \mid b\ ,\ b \mid c \Rightarrow a \mid c$

(3) $a \mid b\ ,\ a \mid c \Rightarrow a \mid (bx + cy)\ ,\ x, y \in Z$.

(4) $a \mid b\ ,\ b \mid a \Rightarrow a = \pm b$

(5) $a \mid b, a > 0, b > 0 \Rightarrow a \leq b$

(6) $m \neq 0$ అయితే $a \mid b \Leftrightarrow ma \mid mb$

ఉపపత్తి :

(1) $a \mid b \Rightarrow b = ax$ అయ్యేటట్లు Z లో x ఉంటుంది.

$\Rightarrow bc = axc$

$\Rightarrow a \mid (bc)$

(2) $a \mid b,\ b \mid c \Rightarrow b = ax,\ c = by$ అయ్యేటట్లు Z లో x, y లు ఉంటాయి.

$\Rightarrow c = by = axy$

$\Rightarrow a \mid c$

(3) $a \mid b\ ,\ a \mid c \Rightarrow b = aq_1\ ,\ c = aq_2\ ,\ q_1, q_2 \in Z$

$bx + cy = aq_1x + aq_2y \ = a(q_1x + q_2y),\ q_1x + q_2y \in z$

$\Rightarrow a \mid (bx + cy)$

(4) $a \mid b.\ b \mid a \Rightarrow \exists\ q_1, q_2 \in z \ni b = aq_1, a = bq_2$

$\Rightarrow a = aq_1q_2$

$\Rightarrow a\ (1 - q_1q_2) = 0$

$\Rightarrow 1 = q_1q_2\ (\because\ a \neq 0)$

$\Rightarrow q_1 = q_2 = 1$ లేక $q_1 = q_2 = -1$

$\Rightarrow a = b$ లేక $a = -b$

(5) $a \mid b \Rightarrow \exists q \in z \ni b = aq$

$a > 0, b > 0, b = aq \Rightarrow q > 0 \Rightarrow q \geq 1 \Rightarrow aq \geq a$

$\Rightarrow b \geq a$ (లేక $a \leq b$)

(6) $a \mid b \Leftrightarrow \exists q \in z \ni b = aq$

$\Leftrightarrow mb = maq, \quad (\because m \neq 0)$

$\Leftrightarrow ma \mid mb$

గణితానుగమన పద్ధతిన ఈ క్రింది ఉప సిద్ధాంతాన్ని రాబట్టవచ్చును.

9.4.5. ఉపసిద్ధాంతం : $a \neq 0, b_1, b_2, \cdots, b_n, x_1, x_2, \cdots, x_n \in Z$ అనుకొనుము.

అపుడు, $a \mid b_1, a \mid b_2, \cdots, a \mid b_n \Rightarrow a \mid (b_1x_1 + \cdots + b_nx_n)$.

9.4.6. సిద్ధాంతము (భాగాహార విశేష విధి) : a, b లు పూర్ణాంకాలు, $a > 0$ అయితే $b = aq + r, 0 \leq r < a$ అయ్యేటట్లు ఏకైక పూర్ణాంకాలు q, r వ్యవస్థితమవుతాయి. ఈ సందర్భంలో $a \nmid b$ అయితే $0 < r < a$ అవుతుంది.

ఉపపత్తి : $S = \{b - ma / b - ma \geq 0; m \in Z\}$ అనుకొనుము.

ఆర్కిమిడియన్ ధర్మాననుసరించి $\exists m \in Z \ \exists ma \leq b$.

$b - ma \geq 0 \Rightarrow S \neq \phi$.

సుష్ఠు క్రమ నియమము ప్రకారం, S లో కనిష్ఠ మూలకం r ఉంటుంది.

$r \in S \Rightarrow \exists q \in Z \ni r = b - qa$

$\Rightarrow b = qa + r$

$r \in S \Rightarrow r \geq 0$

$r \geq a$ అనుకొంటే, $0 \leq r - a = b - qa - a = b - (q+1)a \in S$ నుండి $r - a \in S, r - a < r$ అవుతుంది. ఇది S లో r కనిష్ఠ మూలకం అనే దానికి విరుద్ధం.

కనుక $0 \leq r < a$

ఏకైకత - $b = aq_1 + r_1$, $q_1, r_1 \in Z, 0 \leq r_1 < a$ అనుకొనుము.

$qa + r = q_1a + r_1 \Rightarrow (q - q_1)a = r_1 - r$

$\Rightarrow |q - q_1|a = |r_1 - r|$

$0 \leq r < a, 0 \leq r_1 < a \Rightarrow 0 \leq |r_1 - r| < a \Rightarrow 0 \leq |q - q_1|a < a$

$\Rightarrow 0 \leq |q - q_1| < 1 \Rightarrow |q - q_1| = 0$

$\Rightarrow q - q_1 = 0 \Rightarrow q = q_1$

$qa + r = qa + r_1 \Rightarrow r = r_1.$

9.4.7. **ఉప సిద్ధాంతం :** $a, b \in Z, a \neq 0$ అయితే $b = qa + r, 0 \le r < |a|$ అవుతూ, Zలో ఏకైక మూలకాలు q, rలు ఉంటాయి.

ఉపపత్తి : $a > 0$ అయినపుడు సిద్ధాంతాన్ని 9.4.6లో నిరూపించాము.

$a < 0$ అనుకొనుము.

$|a| = -a > 0$

సిద్ధాంతం 9.4.6. నుండి, $\exists\, q', r' \in Z \ni$

$$b = q'|a| + r', 0 \le r' < |a|$$

$$b = q'(-a) + r' = (-q')a + r', 0 \le r' < |a|$$

$q = -q'$, $r = r'$ గా తీసుకుంటే

$\therefore b = qa + r$, $0 \le r < |a|$ అవుతుంది.

9.4.8. **నిర్వచనం :** $b = aq + r, 0 \le r < |a|$ అయితే bను a చే భాగించగా వచ్చిన విభక్తం q అని, శేషం r అని అంటాము.

9.4.9. **నిర్వచనం :** $a | b$, $a | c$ అయితే a ని b, c లకు సామాన్య భాజకం లేక సామాన్య కారణాంకం లేదా ఉమ్మడి భాజకం లేదా ఉమ్మడి కారణాంకం అంటాము.

9.4.10. **నిర్వచనం :** కనీసం ఒకటి సున్న కాని పూర్ణాంకాలు అయి, ధన పూర్ణాంకం gకు

(i) $g | b$, $g | c$ మరియు

(ii) $g_1 | b, g_1 | c \Rightarrow g | g_1$ అయితే

g ని b, c ల గరిష్ఠ సామాన్య భాజకం (గ.సా.భా.) అంటాము. b, c ల గ.సా.భా.ను (b, c)తో సూచిస్తాము.

సిద్ధాంతము 9.4.4.లో (4) నుండి b, c ల గ.సా.భా. ఏకైకమని చూడవచ్చును.

ఇదే విధంగా కనీసం ఒక్కటైనా సున్న కానటువంటి పూర్ణాంకాలు $b_1, \cdots, b_n$ ల యొక్క గ.సా.భా.ను నిర్వచించవచ్చును. $b_1, \cdots, b_n$ ల యొక్క గ.సా.భా.ను $(b_1, b_2, \ldots\ldots\ldots, b_n)$తో సూచిస్తాము.

9.4.11. **సిద్ధాంతం :** $k \in Z$, $a = bk + c$, అయితే $(a, b) = (b, c)$ అవుతుంది.

ఉపపత్తి : $(a, b) = g$, $(b, c) = g_1$ అనుకొనుము.

$(a,b)=g \Rightarrow g|a, g|b$

సిద్ధాంతం 9.4.4లో (3) ప్రకారం

$g|(a-bk)$ అవుతుంది.

$a-bk=c$ కనుక $g|b, g|c$ అవుతుంది.

$\therefore \quad g|g_1 \cdots\cdots\cdots(1)$

$(b,c)=g_1 \Rightarrow g_1|b, g_1|c$

$\Rightarrow g_1|bk+c$ (సిద్ధాంతం 9.4.4.లో (3) నుండి)

$\Rightarrow g_1|b,\ g_1|a$

$\Rightarrow g_1|g$ ----------- (2)

(1) , (2) ల నుండి $g=g_1$

9.4.12 సిద్ధాంతం : కనీసం ఒక్కటైనా సున్న కాని పూర్ణాంకాలు b,c ల యొక్క గ.సా.భా. వ్యవస్థితము. ఇంకా $(b,c)=bx_0+cy_0$ అయ్యేటట్లు పూర్ణాంకాలు x_0, y_0 ఉంటాయి.

ఉపపత్తి : $S=\{bx+cy/bx+cy>0 \text{ and } x,y\in Z\}$ అనుకొనుము. $b\neq 0$ లేక $c\neq 0$ నుండి $b\cdot b+c\cdot c>0$ అవుతుంది. $b^2+c^2\in S$. కనుక $S\neq\phi$.

సుష్ఠు క్రమ నియమం ప్రకారం, Sలో కనిష్ఠ మూలకం s ఉంటుంది.

$s\in S \Rightarrow \exists x_0,y_0\in Z \ni s=bx_0+cy_0$

భాగాహార విశేష విధిననుసరించి $\exists q, r\in Z \ni$

$b=sq+r,\ 0\le r<s$

$r\neq 0 \Rightarrow o<r=b-sq=b-(bx_0+cy_0)q$

$=b(1-x_0q)+c(-y_0q)\in s$

$\Rightarrow r\in S$

ఇది Sలో s కష్ఠ మూలకం అనే దానికి విరుద్ధత. కనుక $r=0$ అవుతుంది. కనుక

$b=sq$ దీని నుండి $s|b$

ఇదే విధంగా $s|c$ అని చూపవచ్చును.

$\therefore b,c$ లకు s ఉమ్మడి భాజకము .... (1)

$d|b,\ d|c \Rightarrow d|bx_0 + cy_0$

$\Rightarrow d|s$ .... (2)

(1), (2) ల నుండి $s=(b,c)=bx_0+cy_0,\ x_0, y_0 \in Z$ అవుతుంది.

9.4.13 Corollary : $b, c \in z,\ b \neq 0$ లేదా $c \neq 0,\ g=(b,c)$ అయితే

(1) $\{bx+cy/x, y \in z\}$ సమితిలోని కనిష్ఠ ధన మూలకం g అవుతుంది.

(2) b, c ల ఉమ్మడి భాజకాలలో g గరిష్ఠం అవుతుంది.

ఉపపత్తి : (1) సిద్ధాంతం 9.4.12. యొక్క ఉపపత్తి నుండి దీనిని ఋజువు చేయవచ్చును.

(2) $d|b, d|c$ అయితే $d|g$ అవుతుంది. $d \leq 0$ అయితే $g>0$ కనుక $d \leq g$

$d>0$, అయితే సిద్ధాంతం 9.4.4లోని (5) నుండి $d \leq g$ అవుతుంది.

9.4.14. స్వయం మదింపు ప్రశ్న (స్వ.మ.ప్ర.) (Self Assement Question (S.A.Q.)) : అశూన్య పూర్ణాంకాలు a,b,c లకు $(a,(b,c))=((a,b),c)$ అని చూపుము.

9.4.15. ఉప సిద్ధాంతం : కనీసం ఒక్కటైనా శూన్యం కాని పూర్ణాంకాలు $b_1, \ldots\ldots\ldots, b_n$ లకు

$g=(b_1, \cdots, b_n)=\sum_{i=1}^{n} b_i x_i$ అయ్యేటట్లు పూర్ణాంకాలు $x_1, x_2, \ , x_n$ లు ఉంటాయి.

ఉపపత్తి : $T=\left\{\sum_{i=1}^{n} b_i x_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} b_i x_i > 0 \text{ and } x_i \in Z \text{ for } i=1,\cdots,n\right\}$ అనుకొనుము.

అపుడు $T \neq \phi$ అవుతుంది.

T లోని కనిష్ఠ మూలకం g అయితే

$g=(b_1,\cdots\cdots\cdots,b_n)$ అవుతుంది.

9.4.16. SAQ : a, b లు పూర్ణాంకాలు, $a \neq 0$ లేదా $b \neq 0$, $g=(a,b)$ అనుకొనుము. అపుడు $g|m \Leftrightarrow m=ax+by$ అవుతూ Z లో x, y లు ఉంటాయి.

9.4.17. సిద్ధాంతం : $a, b \in z, a \neq o$ లేదా $b \neq 0, m \in z, m>0$ అనుకొనుము. అపుడు $(ma, mb)=m(a,b)$.

ఉపపత్తి : ఉప సిద్ధాంతం 9.4.13. నుండి

$(ma, mb) =$ $max + mby$, యొక్క కనిష్ఠ ధన విలువ, $(x, y \in z)$

$= m$ ($ax + by$ యొక్క కనిష్ఠ ధన విలువ $x, y \in z$)

$= m(a,b)$

9.4.18. సిద్ధాంతం : (i) $d|a,\ d|b,\ d>0$ అయితే $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \frac{(a,b)}{d}$ అవుతుంది.

(ii) $(a,b) = g$ అయితే $\left(\frac{a}{g}, \frac{b}{g}\right) = 1$

ఉపపత్తి : (i) $(a,b) = \left(d\left(\frac{a}{d}\right), d\left(\frac{b}{d}\right)\right) = d\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)$

$$\therefore \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \frac{1}{d}(a,b)$$

(ii) $\left(\frac{a}{g}, \frac{b}{g}\right) = \frac{1}{g}(a,b) = \frac{1}{g}\cdot g = 1$

9.4.19. సిద్ధాంతం : $(a,m) = (b,m) = 1$ అయితే $(ab,m) = 1$ అవుతుంది.

ఉపపత్తి : సిద్ధాంతం 9.4.12 ప్రకారం $\exists\ x_0, y_0, x_1, y_1 \in Z \ni 1 = ax_0 + my_0,\ 1 = bx_1 + my_1$.

$$(ax_0)(by_1) = (1 - my_0)(1 - my_1)$$

$$= 1 - my_1 - my_0 + m^2 y_0 y_1$$

$$= 1 - m(y_0 + y_1 - m y_0 y_1)$$

$$= 1 - my_2, \qquad y_2 = y_0 + y_1 - my_0 y_1$$

$$\therefore 1 = abx_0 y_1 + my_2$$

$$\therefore g = (ab, m) \Rightarrow g | ab,\ g | m$$

$$\Rightarrow g | (abx_0 y_1 + my_2)$$

$$\Rightarrow g | 1$$

$\Rightarrow g=1$

$\therefore (ab,m)=1.$

9.4.20. నిర్వచనం : $a,\ b \in z,\ (a,b)=1$ అయితే $a,\ b$లను సాపేక్ష ప్రధాన సంఖ్యలు లేక సహ ప్రధాన సంఖ్యలు అంటాము. ఈ సందర్భంలో bకి a ప్రధానంగా ఉందని అంటాము.

bకి a ప్రధానంగా ఉంటే aకి b ప్రధానంగా ఉంటుందని నిర్వచనం నుండి విశదము.

9.4.21. నిర్వచనం : $a_1, a_2, \cdots, a_n$ లు $(a_i, a_j)=1,\ 1 \le i, j \le n, i \ne j$ అయ్యేటట్లుగా ఉంటే $a_1, a_2, \ldots, a_n$లను సాపేక్ష లేక సహ ప్రధాన సంఖ్యలు అంటాము.

9.4.22. సిద్ధాంతము : $a, b, x \in Z$ అయితే $(a,b)=(b,a)=(a,-b)=(a,b+ax)$

ఉపపత్తి : $(a,b)=d,\ (a,b+ax)=g$ అనుకొనుము.

$(b,a)=(a,-b)=d$ అనేది స్పష్టం

సిద్ధాంతం 9.4.4.లోని (3), (4)లను ఉపయోగించి $d|g,\ g|d$ అనియు $g=d$ అనియు రాబట్టవచ్చును.

9.4.23. సిద్ధాంతం : అశూన్య పూర్ణాంకాలు a, b లు సాపేక్ష ప్రధానం కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమం $ax+by=1$ అయ్యేటట్లు zలో x, y లు ఉంటాయి.

ఉపపత్తి : a, bలు సాపేక్ష ప్రధానాలైతే

$(a,b)=1$

సిద్ధాంతం 9.4.12. నుండి $ax+by=1$ అయ్యేటట్లు zలో x, yలు ఉంటాయి.

విపర్యంగా $ax+by=1,\ x,\ y \in z$ అనుకొనుము.

$d=(a,b) \Rightarrow d|a,\ d|b$

$\Rightarrow d|ax+by$

$\Rightarrow d|ax+by$

$\Rightarrow d|1$

$\Rightarrow d=1$

$\therefore (a,b)=1$

కనుక a, bలు సాపేక్ష ప్రధానాలు.

9.4.24. సిద్ధాంతం : $c|ab,\ (b,c)=1$ అయితే $c|a$ అవుతుంది.

ఉపపత్తి : సిద్ధాంతం 9.4.17 నుండి

$$(ab,ac)=a(b,c)=a$$

ఉప సిద్ధాంతం 9.4.13. ను ఉపయోగిస్తే

$$c|ab,\quad c|ac \Rightarrow c|a.$$

9.4.25. యూక్లిడ్ భాగాహార విశేష విధి లేక యూక్లిడ్ భాగాహార జంత్రి : b,c లు పూర్ణాంకాలు, $c>0$ అనుకొనుము. భాగాహార విశేష విధిని క్రమంలో అనువర్తింప జేస్తూ, యీ క్రింది సమీకరణ సరళిని రాబడతాము.

$$b=cq_1+r_1,\qquad 0\le r_1<c$$

$$c=r_1q_2+r_2,\qquad 0\le r_2<r_1$$

$$r_1=r_2q_3+r_3,\qquad 0\le r_3<r_2$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$r_{j-2}=r_{j-1}q_j+r_j,\quad 0\le r_j<r_{j-1}$$

$$r_{j-1}=r_jq_{j+1}$$

$$r_0=C$$

యీ భాగాహార ప్రక్రియలో వచ్చే కనిష్ఠ అశూన్య శేషము r_j అనేది b,c ల గ.సా.భా. అవుతుంది. $(b,c)=bx_0+cy_0$ అయ్యేటట్లు x_0, y_0 లను పై సమివకరణాల నుండి $r_{j-1}, r_{j-2}, \ldots\ldots, r_2, r_1$ లను తొలగించడం ద్వారా రాబట్టవచ్చును.

ఉపపత్తి : $r_1>r_2>\cdots\ \ \ge 0$ కనుక $r_{j+1}=0$ అయ్యేటట్లుగా మొట్ట మొదటి j ఉంటుంది.

$$r_j|r_{j-1}\ \Rightarrow\ r_j|r_{j-1}q_j+r_j=r_{j-2}$$

$$r_j|r_{j-2},\ r_j|r_{j-1}\ \Rightarrow\ r_j|r_{j-2}\,q_{j-1}+r_{j-1}=r_{j-3}$$

ఈ విధంగా చేస్తూ ఉంటే

$$r_j|r_{j-1},\ r_j|r_{j-2},\cdots r_j|r_1,\ r_j|c,\ r_j|b$$

$\therefore r_j \mid C,\ r_j \mid b$ ....(1)

$d \mid b,\ d \mid c \Rightarrow d \mid (b - cq_1) \Rightarrow d \mid r_1$

$d \mid c,\ d \mid r_1 \Rightarrow d \mid c - r_1 q_2 \Rightarrow d \mid r_2$

$d \mid r_1,\ d \mid r_2 \Rightarrow d \mid (r_1 - r_2 q_3) \Rightarrow d \mid r_3$

ఈ విధంగా చేస్తూ ఉంటే

$d \mid r_1,\ d \mid r_2,$ ...., $d \mid r_j$ అని వస్తుంది.

$\therefore\ d \mid r_j$ .... (2)

(1), (2)ల నుండి

$r_j = (b, c)$

9.4.26. SAQ : సిద్ధాంతం 9.4.25. లోని మొట్ట మొదటి రెండు సమీకరణాల నుండి $(b,c) = (r_1, r_2)$ అని చూపుము.

9.4.27. ఉదాహరణ : యూక్లిడ్ జంత్రీ నుపయోగించి $d = (1769, 2378)$ ను కనుగొని (1769, 2378) = 1769x + 2378 y అయ్యే x, y లను కనుగొనుము.

$$c = 1769)\ 2378 = b\ (1 = q_1$$
$$\underline{1769}$$
$$r_1 = 609 \left| \begin{array}{c} 1769 \\ \underline{1218} \end{array} \right| 2 = q_2$$
$$r_2 = 551 \left| \begin{array}{c} 609 \\ \underline{551} \end{array} \right| 1 = q_3$$
$$r_3 = 58 \left| \begin{array}{c} 551 \\ \underline{522} \end{array} \right| 9 = q_4$$
$$r_4 = 29 \left| \begin{array}{c} 58 \\ \underline{58} \end{array} \right| 2 = q_5$$
$$r_5 = \underline{0}$$

$d=(1769, 2378)=29$

$2378=1\times 1769+609\,(b=cq_1+r_1)$

$1769=2\times 609+551,\ (c=r_1q_2+r_2)$

$609=1\times 551+58,\ (r_1=r_2q_3+r_3)$

$551=9\times 58+29,\ (r_2=r_3q_4+r_4)$

$58=2\times 29,\ (r_3=r_4q_5)$

$d=29=r_4=r_2-r_3q_4=r_2-(r_1-r_2q_3)q_4$

$=r_2-r_1q_4+r_2q_3q_4=r_2(1+q_3q_4)-r_1q_4 \quad =(c-r_1q_2)(1+q_3q_4)-r_1q_4$

$=c(1+q_3q_4)-r_1q_2(1+q_3q_4)-r_1q_4$

$=c(1+q_3q_4)-r_1(q_2+q_2q_3q_4+q_4)$

$=c(1+q_3q_4)-(b-cq_1)(q_2+q_2q_3q_4+q_4)$

$=c(1+q_3q_4+q_1q_2+q_1q_2q_3q_4+q_1q_4)-b(q_2+q_2q_3q_4+q_4)$

$29=c(1+1\times 9+1\times 2+1\times 9+1\times 2\times 1\times 9)-b(2+9+2\times 1\times 9)$

$=39c-29b=(39)(1769)+(-29)(2378)$

9.4.28. నిర్వచనం : అశూన్య పూర్ణాంకాలు a, b లకు

(i) $a\mid m,\ b\mid m$, (ii) $a\mid k,\ b\mid k \Rightarrow m\mid k$

అయ్యేటట్లుగా వ్యవస్థితమయ్యే ఏకైక ధన పూర్ణాంకము m ను a, b ల కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజము (క.సా.గు.) అంటాము. దీనిని $[a, b]$ తో సూచిస్తాము.

9.4.29. ఉదాహరణ : $[5, 10]=10, [16, 20]=80$

9.4.30 SAQ : రెండు వరుస సహజ సంఖ్యల క.సా.గు. వాటి లబ్ధమని చూపండి.

గమనిక : (i) $[a,b]=[-a,b]=[a,-b]=[-a,-b]$

(ii) $a\neq 0, b\neq 0\in Z$ అయితే $a\mid c,\ b\mid c \Rightarrow [a,b]\,\|\,c$.

(iii) $a\neq 0, b\neq 0$ అయితే $[a,b]\,\|\,ab$

9.4.31 సిద్ధాంతము : a, b లు ధన పూర్ణాంకాలైతే $[a,b](a,b) = ab$ అవుతుంది.

ఉపపత్తి : $(a,b) = d$ అనుకొనుము.

$\exists r, s \in Z \ni a = dr, b = ds.$

$m = \dfrac{ab}{d}$ అనుకొనుము.

$$m = \frac{ab}{d} = \frac{ads}{d} = as; \; m = \frac{ab}{d} = \frac{drb}{d} = rb$$

$\Rightarrow a \mid m, b \mid m$

$a \mid c, b \mid c \Rightarrow \exists A, B \in Z \ni \quad c = Aa, c = bB$

$(a,b) = d \Rightarrow \exists x, y \in Z \ni d = ax + by$

$$\frac{c}{m} = \frac{c}{\frac{ab}{d}} = \frac{cd}{ab} = c\frac{(ax+by)}{ab} = \frac{c}{b}x + \frac{c}{a}y = Bx + Ay$$

$\therefore \dfrac{c}{m}$ ఒక పూర్ణాంకము

$\therefore m \mid c$

$$\therefore m = [a,b] = \frac{ab}{d} = \frac{ab}{(a,b)}$$

కనుక $[a,b](a,b) = ab$

9.4.32 ఉదాహరణ : $a = 2210, b = 493$ అయితే (a,b), $[a,b]$లను కనుగొనుము.

జవాబు :

$$
\begin{array}{l}
493 \,|\, 2210 \,|\, 4 \\
\quad\;\; \underline{1972} \\
\qquad 238 \left|\begin{array}{c} 493 \\ 476 \end{array}\right| 2 \\
\qquad\qquad\quad 17 \left|\begin{array}{c} 238 \\ 238 \end{array}\right| 14 \\
\qquad\qquad\qquad\;\; 0
\end{array}
$$

$\therefore (a,b) = 17$

$$[a,b] = \frac{|ab|}{(a,b)} = \frac{2210 \times 493}{17} = 64090$$

9.4.33 ఉప సిద్ధాంతము : $0 \neq a,\ 0 \neq b,\ a, b \in Z$ **అయితే**

$$[a,b](a,b) = |a\,b|$$

ఉపపత్తి : $|a|$, $|b|$ లు ధన పూర్ణాంకాలు.

$[|a|, |b|](|a|, |b|) = |a||b| = |ab|$

కాని $[|a|, |b|] = [a,b]$, $(|a|,|b|) = (a,b)$.

కనుక $[a,b](a,b) = |a,b|$

9.5 ప్రధాన సంఖ్యలు :-

9.5.1. నిర్వచనం : p పూర్ణాంకము, $p > 1$ అయి $1 < d < p$ అయ్యేటట్లుగా ఉండే ప్రతి పూర్ణాంకము d, pని భాగించకుంటే p ను ప్రధాన సంఖ్య లేదా ప్రధానాంకం అంటాం. a పూర్ణాంకము, $a > 1$ అయి a ప్రధానాంకం కాకపోతే aను సంయుక్త సంఖ్య అంటాం.

ఉదాహరణకు 2,3,5,7 ప్రధాన సంఖ్యలు, 4,6,8,9 సంయుక్త సంఖ్యలు.

1 ప్రధాన సంఖ్య కాదు. 1 సంయుక్త సంఖ్య కూడ కాదని గమనించండి.

9.5.2. సిద్ధాంతం : p ప్రధాన సంఖ్య, $a, b \in Z$, $p|ab$ అయితే $p|a$ లేక $p|b$ అవుతుంది.

ఉపపత్తి : $p \nmid a$ అనుకొనుము. అపుడు $(p,a)=1$.

సిద్ధాంతం 9.4.24. ప్రకారం $p|b$ అవుతుంది.

9.5.3. ఉప సిద్ధాంతం : p ప్రధాన సంఖ్య, $a_1, a_2, \cdots a_n \in Z$, $p|a_1a_2a_3 \ldots\ldots a_n$ అయితే ఏదో ఒక i కి $p|a_i$ అవుతుంది.

ఉపపత్తి : సిద్ధాంతం 9.5.2 ప్రకారం $n=2$ కు ఉప సిద్ధాంతం 9.5.3 జరుగుతుంది.

n కంటే తక్కువ సంఖ్య గల కారణాంకాల లబ్ధాన్ని p భాగించినపుడల్లా ఉప సిద్ధాంతం నిజమనుకొందాము.

$p|a_1 a_2 \cdots a_n \Rightarrow p|ac$, $a=a_1$, $c=a_2 \cdots a_n$

$\Rightarrow p|a$ లేదా $p|c$

$\Rightarrow p|a_1$ లేదా $p|a_2a_3 \ldots\ldots a_n$

$\Rightarrow p|a_1$ లేదా $2 \le i \le n$, $p|a_i$ అవుతూ ఒక i ఉంటుంది.

9.5.4. ఉప సిద్ధాంతం : $p, q_1, \cdots, q_k$ ప్రధానాంకాలు, $p|q_1 q_2 \cdots q_k$ అయితే ఏదో ఒక i, $1 \le i \le k$ కు $p=q_i$ అవుతుంది.

ఉపపత్తి : ఉపసిద్ధాంతం 9.5.3. ప్రకారం $p|q_1 q_2 \cdots q_k$ అయితే $p|q_i$ అయ్యేటట్లు ఒక q_i ఉంటుంది.

$p>1$, q_i ప్రధానాంకం. కనుక $p=q_i$

9.5.5. సిద్ధాంతం : (అంక గణిత మూల సిద్ధాంతం లేక అంక గణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం లేక ఏకైక కారణాంకీకరణ సిద్ధాంతం)

1 కంటే ఎక్కువ అయిన ప్రతి పూర్ణాంకము a ను ప్రధాన సంఖ్యల లబ్ధంగా వ్రాయవచ్చును. కారణాంకాలను వ్రాసే క్రమాన్ని పరిగణనలోనికి తీసుకోకుంటే a యొక్క యీ కారణాంకీకరణ ఏకైకము.

ఉపపత్తి : ఉనికి Existence) :

$S=\{a>1 / a \in Z$, a ప్రధాన సంఖ్యల లబ్ధం కాదు $\}$

$S=\phi$ అయితే సిద్ధాంతం ఋజువయినట్లే.

$S \neq \phi$ అనుకొనుము. సుష్ఠుక్రమ నియమం ప్రకారం S లో కనిష్ఠ మూలకం m ఉంటుంది.

యీ m ప్రధాన సంఖ్య కాదు. కనుక

$S=\{a>1 / a \in Z$, a ప్రధాన సంఖ్యల లబ్ధం కాదు $\}$

$m=m_1 m_2$, $1<m_1<m, 1<m_2<m$ అయ్యేటట్లు Zలో m_1, m_2లు ఉంటాయి.

Sలో m కనిష్ఠ మూలకం కనుక

$$m_1 \notin S, m_2 \notin S$$

$\therefore m_1, m_2$లను ప్రధాన సంఖ్యల లబ్ధంగా వ్రాయవచ్చు.

కనుక $m=m_1 m_2$ను ప్రధాన సంఖ్యల లబ్ధంగా వ్రాయవచ్చును.

ఇది $m \in S$కు విరుద్ధత.

కనుక $S=\phi$

ఏకైకత : $a=p_1 p_2 \cdots p_s = q_1 q_2 \cdots q_t$, $p_1, p_2, \ldots, p_s$, $q_1, q_2, \ldots, q_t$లు ప్రధానాంకాలు అనుకొనుము.

$S=1$ అనుకుంటే

$$p_1 = q_1 q_2 \cdots q_t \Rightarrow t=1 \quad p_1 = q_1 \text{ అవుతుంది.}$$

$p_1 p_2 \cdots p_r = q_1 q_2 \cdots q_t$ అయితే $r=t$ అయి ప్రతి p_i ఒక q_jకు సమానమనుకొందాం.............. (1)

$p_1 p_2 \ldots p_r p_{r+1} = q_1 q_2 \ldots q_t$ అనుకొందాము.

$p_{r+1} \mid p_1 p_2 \ldots p_{r+1} \Rightarrow p_{r+1} \mid q_1 q_2 \ldots q_t$

కనుక ఏదో ఒక jకు $p_{r+1} = q_j$

$\therefore p_1 p_2 \cdots p_r = q_1 \cdots q_{j-1} q_{j+1} \cdots q_t$.

(1) నుండి $r=t-1$ అయి

ప్రతి p_i, $1 \le i \le r$ ఏదో ఒక $q_k, k \ne j$కు సమానమవుతుంది.

కనుక $r+1=t$ అయి

ప్రతి $p_i, 1 \le i \le r+1$ ఏదో ఒక $q_j, 1 \le j \le r+1$కు సమానం అవుతుంది.

కనుక గణితానుగమన సూత్రం ప్రకారం సిద్ధాంతం ఋజువయినది.

9.5.6. సిద్ధాంతము (యూక్లిడ్) : ప్రధాన సంఖ్యల సమితి ఒక అనంత సమితి.

ఉపపత్తి : ప్రధానాంకాల సమితిని P అనుకొనుము.

2 ఒక ప్రధాన సంఖ్య కనుక $2 \in P$.

$P_1, P_2, \ldots\ldots, P_n \in P$ అనుకొనుము.

$n = 1 + p_1 p_2 \cdots p_r \in P$ అనుకొనుము. అపుడు

ప్రతి $1 \le i \le r$ కు p_i చే n ను భాగించగా వచ్చే శేషం 1

కనుక ప్రతి i కి $p_i \nmid n$.

ఇంకా ప్రతి i కి $n \neq p_i$

n ప్రధానాంకమయితే $n \neq p_i, 1 \le i \le r, n \in P$ ....(1)

n ప్రధానాంకము కాకపోతే n కు ప్రధానాంక భాజకం q ఉంటుంది.

ఇంకా $q \neq p_i, 1 \le i \le r, q \in P$ .... (2)

(1), (2)ల నుండి P అపరిమితమని గమనించవచ్చును.

9.5.7. గమనిక : $n > 1$ అయ్యే ప్రతి పూర్ణాంకం n ను $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_k$ లు ప్రధానాంకాలు, $p_1 < p_2 < \ldots\ldots < p_k$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ లు ధన పూర్ణాంకాలుగా ఏకైకంగా వ్రాయవచ్చును.

n యొక్క యీ చిత్రణను n యొక్క ప్రామాణిక చిత్రణ లేక ప్రధానాంక ఘాత కారణాంకీకరణ అని అంటాము.

9.5.8. గమనిక : $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$, $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots\cdots p_n^{\beta_n}$

$p_1, \ldots\ldots, p_n$ లు ప్రధానాంకాలు $r_i =$ కనిష్ఠ $\{\alpha_i, \beta_i\}$

$1 \le i \le n$ అయితే

$(a, b) = \prod_{j=1}^{n} p_j^{\gamma_j}$ అవుతుంది.

9.6. సమశేషకతలు :-

9.6.1. నిర్వచనం :- m సున్నకానటువంటి ధన పూర్ణాంకం, పూర్ణాంకాలు a, b లకు $m \mid a-b$ అయితే m మాపంగా, b కు a సమశేషకం అంటాము. ఈ సందర్భంలో $a \equiv b$ (మాపం m) లేక $a \equiv b \pmod{m}$ అని వ్రాస్తాము. $a \equiv b \pmod{m}$ కాకపోతే $a \not\equiv b \pmod{m}$ అని వ్రాస్తాము.

గమనిక : $m \mid (a-b) \Leftrightarrow -m \mid (a-b)$

ఈ పాఠమంతటిలోను ధన పూర్ణాంకం m మాపంగా గల సమశేషకతంను మాత్రమే చర్చిస్తాము.

9.6.2. సిద్ధాంతం : $a \not\equiv b \pmod{m}$ కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమం a, b లను m తో భాగించగా వచ్చు శేషములు సమానం కావటం.

ఉపపత్తి : $a \equiv b \pmod{m}$ అనుకొనుము.

$m \mid a-b \Rightarrow \exists k \in Z \ni a-b = km$ ---------- (1)

భాగాహార విశేష విధి నుండి $\exists\ q, r \in Z \ni b = mq + r,\ 0 \le r \le m$

b ని m తో భాగించగావచ్చు శేషం r అవుతుంది .... (2)

(1) నుండి $a = b + km = mq + r + km$

$$= m(q+k) + r,\ 0 \le r < m$$

కనుక a ను m చే భాగించగా వచ్చు శేషం కూడా r అవుతుంది.

విపర్యయం : a, b లను m తో భాగించగా వచ్చు శేషము r అనుకొందాము.

$\exists q_1, q_2 \in Z \ni a = q_1 m + r,\ b = q_2 m + r.$

$a - b = mq_1 + r - mq_2 - r$

$= m(q_1 - q_2)$

$\therefore m \mid a-b$

$a \equiv b \pmod{m}$

9.6.3. a, b, c, d, x, y, m లు పూర్ణాంకాలు, $m > 0$ అనుకొందాము. అపుడు

(1) $a \equiv a \pmod{m}$ (పరావర్తన ధర్మము)

(2) $a \equiv b \pmod m \Rightarrow b \equiv a \pmod m$ (సౌష్ఠవ ధర్మము)

(3) $a \equiv b \pmod m \Rightarrow b \equiv c \pmod m \Rightarrow a \equiv c \pmod m$ (సంక్రమ ధర్మము)

(4) $a \equiv b \pmod m,\ c \equiv d \pmod m \Rightarrow a + c \equiv b + d \pmod m, ac \equiv bd \pmod m$

(5) $a \equiv b \pmod m \Rightarrow a + c \equiv b + c \pmod m,\ ac \equiv bc \pmod m$

(6) $a \equiv b \pmod m \Rightarrow a^k = b^k \pmod m,\ k \geq 1,\ k \in Z$

(7) $ac = bc \pmod m,\ (c, m) = 1 \Rightarrow a \equiv b \pmod m$

(8) $ac \equiv bc \pmod m, c \mid m \Rightarrow a \equiv b\left(\bmod \dfrac{m}{c}\right)$

ఉపపత్తి : (1) $a - a = 0 \cdot m \Rightarrow a \equiv a \pmod m$

(2) $a \equiv b \pmod m \Rightarrow m \mid (a-b) \Rightarrow m \mid (-1)(a-b) \Rightarrow m \mid (b-a) \Rightarrow b \equiv a \pmod m$

(3) $a \equiv b \pmod m,\ b \equiv c \pmod m \Rightarrow m \mid (a-b),\ m \mid (b-c)$

$$\Rightarrow m \mid (a-b)+(b-c) \Rightarrow m \mid (a-c) \Rightarrow a \equiv c \pmod m$$

(4) $a \equiv b \pmod m,\ c \equiv d \pmod m$

$$\Rightarrow m \mid (a-b),\ m \mid (c-d) \Rightarrow m \mid (a-b)+(c-d)$$

$$\Rightarrow m \mid (a+c)-(b+d) \Rightarrow (a+c) \equiv (b+d) \pmod m$$

$$m \mid (a-b),\ m \mid (c-d) \Rightarrow \exists k_1, k_2 \in Z$$

$$a - b = mk_1,\ c - d = mk_2 \Rightarrow a = b + mk_1 c = d + mk_2$$

$$\Rightarrow ac = (b + mk_1)(d + mk_2)$$

$$= bd + (bk_2 + dk_1)m + k_1k_2m^2$$

$$\Rightarrow ac - bd = m(bk_2 + dk_1 + k_1k_2m)$$

$$\Rightarrow m \mid (ac - bd) \Rightarrow ac \equiv bd \pmod m$$

(5) $a \equiv b \pmod m$ అనుకోండి. (1) నుండి $C \equiv C \pmod m$

(4) నుండి $ac \equiv bc \pmod m$ అవుతుంది.

$m \mid a - b = a + c - (b + c) \Rightarrow a + c \equiv b + c \pmod m$

(6) దీనిని గణితాను గమనం ద్వారా ఋజువు చేస్తాము

$k=1$ అయితే $a^k = a \equiv b = b^k \pmod{m}$

$k=r$ కు $a^k \equiv b^k \pmod{m}$ అనుకొందాము.

$k=r+1$ అయితే $a^r \equiv b^r \pmod{m}$, $a \equiv b \pmod{m}$

(4) నుండి $a^r a \equiv b^r b \pmod{m} \Rightarrow a^k = a^{r+1} \equiv b^{r+1} = b^k \pmod{m}$

గణితానుగమ సూత్రం ప్రకారం

$a^k \equiv b^k \ \forall k$ అవుతుంది.

(7) $ac \equiv bc \pmod{m}$, $c \mid m$

$\Rightarrow m \mid c(a-b)$, $c \mid m$

$\Rightarrow \frac{m}{c} \mid (a-b)$

$\Rightarrow a \equiv b \left(\bmod \frac{m}{c}\right)$

9.6.4. సిద్ధాంతము : $a \equiv b \pmod{m}$ పూర్ణాంకాలు గుణకాలు గల బహుపది f అయితే $f(a) \equiv f(b) \pmod{m}$.

ఉపపత్తి : $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n$, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_n \in Z$ అనుకొనుము. $\alpha_0 \pmod{m}$ అనేది స్పష్టం.

$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^i \equiv b^i \pmod{m}$ అన్ని $1 \le i \le n$ లకు

$\alpha_i a^i \equiv \alpha_i b^i \pmod{m}$ అన్ని $1 \le i \le n$ లకు

$$\Rightarrow f(a) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i a^i \equiv \sum_{i=0}^{n} \alpha_i b^i = f(b) \pmod{m}$$

9.6.5. సిద్ధాంతము : $ax \equiv ay \pmod{m} \Leftrightarrow x \equiv y \left(\bmod \frac{m}{(a,m)}\right)$

ఉపపత్తి : $(a,m) = d$ అనుకొనుము. అపుడు $\left(\frac{a}{d}, \frac{m}{d}\right) = 1$

$ax \equiv ay(\text{mod}\, m) \Leftrightarrow m \mid (ax - ay) \Leftrightarrow$ ఒక $q \in Z$ కు $ax - ay = mq$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{d}(x-y) = \frac{m}{d}q$$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{d} \Big| \frac{a}{d}(x-y) \Leftrightarrow \frac{m}{d} \Big| (x-y) \quad \left(\because \left(\frac{a}{d}, \frac{m}{d}\right) = 1\right)$$

$$\Leftrightarrow x \equiv y\left(\text{mod}\, \frac{m}{d}\right)$$

$$\Leftrightarrow x \equiv y\left(\text{mod}\, \frac{m}{(a,m)}\right)$$

9.6.6. SAQ : $ax \equiv ay(\text{mod}\, m)$, $(a, m) = 1$ అయితే $x \equiv y(\text{mod}\, m)$ అవుతుంది.

9.6.7. **సిద్ధాంతము :** m_1, m_2 ల క.సా.గు. $m = [m_1, m_2]$, $a \equiv b\ (\text{mod}\ m_1)$

$a \equiv b\ (\text{mod}\ m_2)$ అయితే $a \equiv b\ (\text{mod}\ m)$ అవుతుంది.

ఉపపత్తి : $a \equiv b(\text{mod}\ m_1) \Rightarrow m_1 \mid (a-b)$

$a \equiv b(\text{mod}\ m_2) \Rightarrow m_2 \mid (a-b)$

$m_1 \mid a-b,\ m_2 \mid a-b \Rightarrow m = [m_1, m_2] \mid a-b$

$$\Rightarrow a \equiv b(\text{mod}\ m)$$

9.6.8. SAQ : $x \equiv y(\text{mod}\, m_i)\ 1 \le i \le n \Leftrightarrow$

$x \equiv y\ (\text{mod}[m_1, m_2, \ldots\ldots\ldots, m_n])$

9.6.9. **నిర్వచనం :** m ధన పూర్ణాంకమైతే m మాపకముగా సమశేషకత అనే సంబంధం, Z పై తుల్య సంబంధమవుతుంది. ఈ తుల్య సంబంధం వలన ఏర్పడే తుల్య వర్గాలను "m మాపం"గా గల అవశేష వర్గాలు అంటాము.

9.6.10. **సంకేతం :** (1) a ను కలిగిఉన్న అవశేష వర్గాన్ని [a] లేక $\bar{a}$ తో సూచిస్తాము.

(2) m మాపంగా గల అవశేష వర్గాల సమితిని Z_m తో సూచిస్తాము.

9.6.11. సిద్ధాంతం : ధన పూర్ణాంకం m కు $Z_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \cdots, \overline{m-1}\}$, $O(Z_m) = m$ అవుతాయి.

ఉపపత్తి : $a \in Z$ అనుకొనుము. భాగాహార విశేష విధి నుంచి

$$\exists q, r \in Z \ni a = mq + r, 0 \le r < m$$

$$a - r = mq \Rightarrow m \mid (a - r) \Rightarrow a \equiv r (\bmod m)$$

$$\Rightarrow \bar{a} = \bar{r}$$

$$\bar{a} \in \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \overline{m-1}\}$$

$\bar{r} = \bar{s}$, $0 \le r \le m-1$, $0 \le s \le m-1$ అనుకొందాము.

$r > s$ అనుకొంటే $o < r - s < m$, $m \mid (r - s)$ అవుతుంది. ఇది విరుద్ధత. కనుక $r \not> s$.

అదే విధముగా $s \not> r$

$$\therefore r = s$$

కనుక m మాపంగా అవశేష వర్గాల సమితి

$$\therefore Z_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \cdots \overline{m-1}\}.$$

9.7. ఏకఘాత సమశేషకతల సాధనలు :

9.7.1. నిర్వచనం : బహుపది $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ యొక్క గుణకాలు $a_0, \ldots\ldots\ldots\ldots, a_n$ లు పూర్ణాంకాలనుకొందాము. u అనే పూర్ణాంకం $f(u) \equiv 0 (\bmod m)$ అయ్యేటట్లుగా ఉంటే u ను $f(x) \equiv 0 (\bmod m)$ అనే సమ శేషక సమీకరణానికి సాధన అంటాము.

9.7.1(ఎ). గమనిక :- $f(u) \equiv 0 (\bmod m)$, $v \equiv u (\bmod m)$ అయితే

$f(v) \equiv f(u) (\bmod m)$, $f(u) \equiv 0 \ (\bmod m)$ ల నుండి

$f(v) \equiv 0 \ (\bmod m)$ అవుతుందని గమనించవచ్చును.

9.7.2. నిర్వచనం :- $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$, $a_0, a_1, \ldots\ldots\ldots\ldots, a_n \in Z$

$a_j \not\equiv 0 \ (\bmod m)$ అయ్యేటట్లు కనిష్ఠ పూర్ణాంకం j ఉంటే $f(x) \equiv 0 (\bmod m)$ అనే సమ శేషక సమీకరణం యొక్క ఘాతాన్ని పరిమాణాన్ని $n - j$ గా నిర్వచిస్తాము. j యొక్క అన్ని విలువలకు $a_j \equiv 0 \ (\bmod m)$ అయితే $f(x) \equiv 0 \ (\bmod m)$ యొక్క ఘాతాన్ని నిర్వచించం.

9.7.2(ఎ) గమనిక :-

(i) $f(x) \equiv 0 (\bmod m)$ సమ శేషక సమీకరణం యొక్క ఘాతం బహుపది $f(x)$ యొక్క ఘాతానికి సమానం కానక్కర లేదు.

(ii) సమ శేషక సమీకరణం యొక్క ఘాతం, ఆ సమశేషక సమీకరణానికి సంబంధమైన మాపం పై ఆధారపడుతుంది.

$g(x) = 6x^3 + 3x^2 + 1$, అయితే $g(x) \equiv 0 (\bmod 5)$ యొక్క ఘాతం 3, $g(x) \equiv 0 (\bmod 2)$ యొక్క ఘాతం 2 అవుతాయి. బహుపది $g(x)$ యొక్క ఘాతం 3.

9.7.3. నిర్వచనం :- ఏకఘాత సమశేషక సమీకరణాన్ని రేఖీయ సమశేషక సమీకరణం అంటాము.

గమనిక :- $ax + b \equiv 0 \ (\bmod\ m)$, $a \not\equiv 0 (\bmod\ m)$ అయితే

$$ax + b - b \equiv 0 - b (\bmod\ m),$$

$$ax \equiv -b\ (\bmod\ m)$$

కనుక ఏక ఘాత సమశేషక సమీకరణం యొక్క సాధారణ రూపం $ax \equiv b (\bmod m)$, $a \not\equiv 0 (\bmod m)$ గా తీసుకొనవచ్చును.

9.7.4. సిద్ధాంతం :- $ax \equiv b (\bmod m)$, కు x_0 ఒక సాధన $x_1 \equiv x_0 (\bmod m)$ అయితే $ax \equiv b (\bmod m)$ కు x_1 కూడ ఒక సాధన అవుతుంది.

ఉపపత్తి :- $x_0 \equiv x_1 (\bmod\ m) \Rightarrow ax_0 \equiv ax_1 (\bmod\ m)$ $ax_0 \equiv b\ (\bmod\ m)$ సమశేషకతా సంబంధం సంక్రమ సంబంధం కనుక $ax_1 \equiv b (\bmod\ m)$ అవుతుంది.

9.7.5. నిర్వచనం :- $ax \equiv b (\bmod m)$ కు x_1, x_2 లు సాధనలయి, $x_1 \not\equiv x_2 (\bmod m)$ అయితే $ax \equiv b (\bmod m)$ కు x_1, x_2 లు అసమశేషక సాధనలు అంటాము.

$ax \equiv b (\bmod m)$ యొక్క సాధనల ఉనికి :

9.7.6. సిద్ధాంతం :- $ax \equiv b (\bmod m)$ కు సాధన ఉండటానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమం b కు $d = (a, m)$ భాజకం కావడం.

ఈ సందర్భంలో $ax \equiv b$ కు ఖచ్చితంగా d అసమశేషక సాధనలుంటాయి.

ఉపపత్తి :- (ఎ) $ax \equiv b (\bmod m)$ కు x_0 సాధన అనుకొందాము.

$ax_0 \equiv b(\text{mod}\, m) \Rightarrow \exists y_0 \in Z \ni ax_0 - b = y_0 m$

$ax_0 + m(-y_0) = b \Rightarrow d \mid b$

విపర్యయంగా $d \mid b$ అనుకొనుము.

$$(a,m) = d \Rightarrow \exists k, \ell \in Z \ni ak + ml = d$$

$d \mid b$ కనుక ఒక $d' \in Z$కు $b = dd'$ అవుతుంది.

$b = dd' = (ak + m\ell)d' = a(kd') + m(\ell d')$.

$\Rightarrow a(kd') - b = m\ell d'$

$\Rightarrow a(kd') \equiv b(\text{mod } m)$

కనుక $ax \equiv b\ (\text{mod } m)$కు kd' ఒక సాధన అవుతుంది.

(బి) ఇప్పుడు $ax \equiv b(\text{mod}\, m)$కు x_0 సాధన అయితే $x_0, x_0 + \frac{m}{d}, \cdots\cdots\cdots x_0 + (d-1)\frac{m}{d}$ అనేవి $ax \equiv b(\text{mod}\, m)$.............................. (1) కు అసమ శేషక సాధనలని చూపుతాము :

$ax_0 \equiv b(\text{mod}\, m) \Rightarrow m \mid (ax_0 - b) \Rightarrow ax_0 - b = mq$, ఒక $q \in Z \Rightarrow ax_0 = b + mq$ ----- (2)

k పూర్ణాంకము $0 \le k \le d-1$ అయితే

$a\left(x_0 + \frac{m}{d}k\right) = ax_0 + \frac{a}{d}km = b + mq + \frac{a}{d}km$ .... (2) నుండి

$$= b + m\left(q + \frac{a}{d}k\right)$$

$$\therefore a\left(x_0 + k\frac{m}{d}\right) \equiv b(\text{mod } m)$$

కనుక $x_0, x_0 + \frac{m}{d}, x_0 + 2\frac{m}{d}, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_0 + (d-1)\frac{m}{d}$ లు

$ax \equiv b\ (\text{mod } m)$కు సాధనలవుతాయి.

$0 \le k < \ell < d, \quad x_0 + K\frac{m}{d} \equiv x_0 + \ell\frac{m}{d} \pmod{m}$ అనుకుంటే

$\frac{m}{d}k \equiv \frac{m}{d}\ell \pmod{m}$ అవుతుంది.

దీని నుండి $k \equiv \ell \pmod{m}, 0 \le k < \ell < d$ అవుతుంది.

కనుక $d \mid \ell - k$. ఇది విరుద్ధత.

$\therefore x_0, x_0 + \frac{m}{d}, x_0 + 2\frac{m}{d}, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_0 + (d-1)\frac{m}{d}$ అనేవి

$ax \equiv b \pmod{m}$ యొక్క d అసమశేషక సాధనలు.

(సి) $ax \equiv b \pmod{m}$ కు y_0 సాధన అనుకొందాము.

అపుడు $ax_0 \equiv b \pmod{m}$

$$ay_0 \equiv b \pmod{m}$$

$$\Rightarrow ax_0 \equiv ay_0 \pmod{m}$$

$$\Rightarrow m \mid a(x_0 - y_0)$$

$$\Rightarrow \frac{m}{d} \mid \frac{a}{d}(x_0 - y_0)$$

$$\Rightarrow \frac{m}{d} \mid (x_0 - y_0), \because (m, a) = d \Rightarrow \left(\frac{m}{d}, \frac{a}{d}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \exists t \in Z \ni y_0 = x_0 + t\frac{m}{d}$$

భాగాహార విశేష విధి నుండి,

$t = qd + r, 0 \le r < d$ అవుతూ Zలో q, r లు ఉంటాయి.

$$y_0 = x_0 + t\frac{m}{d}$$

$$= x_0 + (qd + r)\frac{m}{d} = x_0 + mq + r\frac{m}{d}$$

$$\Rightarrow y_0 \equiv x_0 + r\frac{m}{d}\ (\text{mod } m),\ 0 \le r < d$$

కనుక $x_0,\ x_0 + \frac{m}{d}, \ldots\ldots, x_0 + (d-1)\frac{m}{d}$ లలో ఒక దానికి y_0 సమశేషకం అవుతుంది.

9.7.8. ఉప సిద్ధాంతం :- $(a,m) = 1$, అయితే సమ శేషకత $ax \equiv b(\text{mod } m)$కు ఏకైక సాధన ఉంటుంది.

9.7.9. గమనిక :- $(a,m) = d,\ d \nmid b$ అయితే $ax \equiv b(\text{mod } m)$ కు సాధన ఉండదు.

9.7.10. నిర్వచనం :- m ధన పూర్ణాంకము, $S = \{x_1, \ldots\ldots, x_m\} \le Z$ అనుకొందాము. ప్రతి $y \in Z$కు $y \equiv x_i\ (\text{mod } m)$ అయ్యేటట్లు Sలో ఒకే ఒక x_i ఉంటే Sను ఒక m మాపక సంపూర్ణ అవశేష సరణి అంటాము.

9.7.10(ఎ) సిద్ధాంతం :- $S = \{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_m\}$ ఒక m మాపక సంపూర్ణ అవశేష సరణి $\Leftrightarrow i \ne j$లకు $x_i \not\equiv x_j\ (\text{mod } m)$.

ఉపపత్తి :- S ఒక m మాపక సంపూర్ణ అవశేష సరణి అనుకొందాము. $x_i \equiv x_i\ (\text{mod } m)$ కనుక నిర్వచనం నుండి $j \ne i$ అయితే $x_i \not\equiv x_j(\text{mod } m)$ అనుకొందాము. అపుడు Sలోని మూలకాలను mతో భాగిస్తే వచ్చే శేషముల సమితిని T అనుకుంటే, యీ శేషములన్నీ విభిన్నాలు కనుక, $T = \{0, 1, 2, \ldots\ldots, m-1\}$ అవుతుంది. సార్వత్రికకు భంగం లేకుండా $x_i \equiv i(\text{mod } m),\ 0 \le i < m$ అనుకొనవచ్చును.

$y \in Z$ భాగాహార విశేష విధి నుండి, $\exists q, i \in Z$

$\ni y = mq + i,\ 0 \le i < m$

$\therefore\ y \equiv i\ (\text{mod } m)$

$$i \equiv x_i(\text{mod } m) \Rightarrow y \equiv x_i(\text{mod } m)$$

$\therefore \{x_1, \ldots\ldots, x_m\}$ ఒక m మాపక సంపూర్ణ అవశేష సరణి.

9.7.11. ఉదాహరణలు : యీ క్రింది సమ శేషకతలను సాధింపుము.

(i) $135x \equiv 6(\text{mod } 10)$ (ii) $84x \equiv 16(\text{mod } 35)$ (iii) $66x \equiv 8(\text{mod } 78)$ (iv) $12x \equiv 7(\text{mod } 21)$

జవాబు : $d=(a,m)$ అనుకొంటే

$ax \equiv b$ కు సాధన ఉంటుంది. $\Leftrightarrow d \mid b$ అని మనకు తెలుసు.

(i) $a=135,\ b=6,\ m=10$

$d=(a,\ m)=(135,\ 10)=5 \nmid b=6$

$135x \equiv 6 \pmod{10}$ కు సాధన లేదు.

(ii) $a=84,\ b=16,\ m=35$

$d=(a,\ m)=(84,\ 35)=7 \nmid b=16$

$\therefore 84x \equiv 16 \pmod{35}$ కు సాధన లేదు.

(iii) $a=66,\ b=8,\ m=78$

$d=(a,m)=(66,78)=6 \nmid 8$

$\therefore 12x \equiv 7 \pmod{21}$ కు సాధన లేదు.

(iv) $a=12,\ b=7,\ m=21$

$d=(a,\ m)=3 \nmid b=7$

$\therefore 12x \equiv 7 \pmod{21}$ కు సాధన లేదు.

9.7.12. ఉదాహరణలు : సాధింపుము.

(i) $3x+2 \equiv 0 \pmod 7$

(ii) $2x+1 \equiv 0 \pmod 7$

(iii) $3x \equiv 1 \pmod{125}$

జవాబులు : (i) $a=3,\ b=-2, m=7,\ d=(3,7)=1,\ d \mid -2$

$\therefore 3x+2 \equiv 0 \pmod 7$ కు ఏకైక అసమశేషక సాధన ఉంటుంది.

$3x \equiv -2 \pmod 7$

$0 \equiv 14 \pmod 7$

$\Rightarrow 3x \equiv 12 \pmod 7$

$\Rightarrow x \equiv 4 \pmod 7, \because (3, 7) = 1$

$4 \equiv 4 \pmod 7$ అని మనకు తెలుసు.

కనుక $3x + 2 = 0 \pmod 7$కు ఏకైక అసమశేషక సాధన 4 అవుతుంది.

(ii) $a = 2, b = -1, m = 7, d = (a, m) = (2, 7) = 7$

$\therefore 2x + 1 = 0 \pmod 7$కు ఏకైక 4 సమ శేషక సాధన ఉంటుంది.

$2x \equiv -1 \pmod 7$

$0 \equiv 7 \pmod 7 \Rightarrow 2x \equiv 6 \pmod 7$

$\Rightarrow x \equiv 3 \pmod 7, \because (37) = 1$

$3 \equiv 3 \pmod 7$ అని మనకు తెలుసు.

కనుక $2x + 1 = 0 \pmod 7$కు ఏకైక అసమశేషక సాధన అవుతుంది.

(iii) $a = 3, b = 1, m = 125$

$d = (a, m) = (3, 125) = 1$

$\therefore 3x \equiv 1 \pmod{125}$కు ఏకైక అసమశేషక సాధన ఉంటుంది.

$0 \equiv 125 \pmod{125}$

$3x \equiv 1 \pmod{125}$

$\therefore 3x \equiv 126 \pmod{125}, (3, 125) = 1$

$\therefore x \equiv 42 \pmod{125}$

కనుక $3x \equiv 1 \pmod{125}$కు ఏకైక అసమశేషక సాధన 4 అవుతుంది.

9.7.13. SAQ : సాధింపుము. (i) $4x \equiv 5 \pmod 6$

(ii) $3x \equiv 5 \pmod 7$

9.7.14. **ఉదాహరణలు :** క్రింది సమశేషకతలను సాధింపుము.

(i) $259x \equiv 5 \pmod{11}$

(ii) $342x \equiv 5 \pmod{13}$

జవాబు : (i) $259 \equiv 6 \pmod{11}$

$$259x \equiv 6x \pmod{11}$$

$\therefore 6x \equiv 5 \bmod(11),\ d=(6,11)=1$

$\therefore 259x \equiv 5 \pmod{11}$ ఏకైక అసమశేషక సాధన ఉంటుంది.

$$6x \equiv 5 \pmod{11}$$

$$0 \equiv 55 \pmod{11}$$

$\therefore 6x \equiv 60 \pmod{11}, (6,11) =$

$\therefore x \equiv 10 \pmod{11}$

$\therefore 259x \equiv 5$ ఏకైక అసమశేషక సాధన 10 అవుతుంది.

(ii) $342x \equiv 5 \pmod{13}$

$342 \equiv 4 \pmod{13}$

$342x \equiv 4x \pmod{13}$

$4x \equiv 5 \pmod{13}, (4,13)=1$

$0 \equiv 39 \pmod{13}$

$\therefore 4x \equiv 44 \pmod{13}, (4, 13) = 1$

$\therefore x \equiv 11 \pmod{13}$

$342x \equiv 5 \pmod{13}$కు ఏకైక అసమశేషక సాధన 11 అవుతుంది.

9.7.15. ఉదాహరణలు :- సాధింపుము

(i) $13x \equiv 10 \pmod{28}$, (ii) $16x \equiv 25 \pmod{19}$

సాధన :- (i) $a = 13, \ b = 10, m = 28$

$d = (13, 28) = 1$

కనుక $13x \equiv 10 \pmod{28}$కు ఏకైక అసమశేషక సాధన ఉంటుంది.

$13x \equiv 10 \pmod{28}$......................(1)

$0 \equiv 224 \pmod{28}$....................(2)

(1)+(2) $13x \equiv 234 \pmod{28}, (13, 28) = 1$

$\therefore x \equiv 18 \pmod{28}$

$\therefore 13x \equiv 10 \pmod{28}$కు 18 ఏకైక అసమశేషక సాధన

(ii) అభ్యాసముగా వదలబడినది. (జవాబు - $x = 17$)

9.7.16. ఉదాహరణ : సాధింపుము

(i) $15x \equiv 6 \pmod{21}$ (ii) $222x \equiv 12 \pmod{18}$

(iii) $15x \equiv 25 \pmod{35}$

సాధన : (i) $a = 15, b = 6, m = 21, d = (a, m) = (15, 21) = 3 \mid b = 6$

కనుక $15x \equiv 6 \pmod{21}$కు 3 అసమశేషక సాధనలుంటాయి.

$15x \equiv 6 \pmod{21}$

$3\times5\times x \equiv 3\times2 (\text{mod } 3\times7)$

$\Rightarrow 5x \equiv 2 (\text{mod } 7)$

$5x \equiv 2 \ (\text{mod } 7)$

$0 \equiv 28 \ (\text{mod } 7)$

$\Rightarrow 5x \equiv 30 (\text{mod } 7), (5, 7) = 1$

$\Rightarrow x \equiv 6 \ (\text{mod } 7)$

$x_0 = 6, \qquad \frac{m}{d} = \frac{21}{3} = 7$

$x_0 = 6,\ x_1 = x_0 + \frac{m}{d} = 13,\ x_1 = x_0 + 2\frac{m}{d} = 20$

(i) $15x \equiv 6 \ (\text{mod } 21)$కు అసమశేషక సాధనలు.

(ii) $a = 222, b = 12, m = 18$

$d = (a, m) = (222, 18) = 6 | b = 12, \ \frac{m}{d} = 3$

కనుక $222x \equiv 12 \ (\text{mod } 18)$కు 6 అసమశేషక సాధనలుంటాయి.

$222x \equiv 12 \ (\text{mod } 18)$

$222 \equiv 6 \ (\text{mod } 18)$

$222x = 6x \ (\text{mod } 18)$

$6x \equiv 12 \ (\text{mod } 18)$

సిద్ధాంతం 9.6.3.లో (8) నుండి.

$x \equiv 2 \text{ mod } (3)$

$\therefore x_0 = 2$ ఇచ్చిన సమశేషకతకు ఒక సాధన.

$$x_0 = 2,\ x_1 = x_0 + \frac{m}{d} = 5,\ x_2 = x_1 + \frac{m}{2} = 8,\ x_3 = x_2 + \frac{m}{d} = 11,$$

$$x_4 = x_3 + \frac{m}{d} = 14,\ \ x_5 = x_4 + \frac{m}{d} = 17$$

కనుక 2, 5, 8; 11, 14, 17లు $222x = 12 \pmod{18}$ కు అసమ శేషక సాధనలు.

(iii) $a = 15,\ b = 25,\ m = 35,\ d = (a, b) = (15, 35) = 5,\ d \mid b$

$\therefore$ దత్త సమశేషకతకు 5 అసమశేషక సాధనలుంటాయి.

$$15x = 25 \pmod{35}$$

$$\therefore\ 3x \equiv 5 \pmod 7$$

$$0 \equiv 7 \pmod 7$$

$$\therefore 3x \equiv 12 \pmod 7), \qquad (3, 7) = 1$$

కనుక $x \equiv 4 \pmod 7$

$$\therefore \frac{m}{d} = \frac{35}{5} = 7$$

$\therefore$ ఇచ్చిన సమశేషకతకు అసమశేషక సాధనలు

4, 11, 18, 25, 32 అవుతాయి.

9.7.17. చైనీయుల శేష సిద్ధాంతం :- ధన పూర్ణాంకాలు $m_1, m_2, \ldots\ldots, m_r$లు వాటిలో ప్రతి రెండు సాపేక్ష ప్రధానాలు. $a_1, \ldots\ldots, a_r$లు పూర్ణాంకాలు అనుకొంటే సమ శేషకతలు $x \equiv a_i \mod m_i$, $1 \le i \le r$లకు ఉమ్మడి సాధన ఉంటుంది. ఇంకా ఏ రెండు ఉమ్మడి సాధనలైనా $m_1, m_2, \ldots\ldots, m_r$ మాపంగా సమ శేషాలవుతాయి.

ఉపపత్తి :- దత్త సమశేషకతలు

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ --------- \\ --------- \\ x \equiv a_r \pmod{m_r} \end{array}\right\} -------(1)$$

$m = m_1, m_2, \ldots\ldots, m_r$; $M_j = \dfrac{m}{m_j}$, $1 \le j \le r$ అనుకొనుము.

అపుడు $(M_j, m_j) = 1$ -------(2)

సిద్ధాంతం 9.7.6. నుండి $M_j x \equiv 1 \pmod{m_j}$కు ఏకైక అసమ శేషక సాధన x_j ఉంటుంది.

$X = a_1x_1M_1 + a_2x_2M_2 + \ldots\ldots + a_rx_rM_r$ అనుకొనుము.

$i \ne j$ కు $m_j | M_i \Rightarrow M_i \equiv 0 \pmod{m_j}$ ....(3)

$X = a_1M_1x_1 + a_2M_2x_2 + \ldots\ldots + a_rM_rx_r$

$\equiv a_jM_jx_j \pmod{m_j}$, $1 \le j \le r$.................(3) నుండి

$\equiv a_j \pmod{m_j}$..................(2) నుండి

ఏకైకత :- x, yలు (1)కి ఉమ్మడి సాధనలనుకొందాము.

$x \equiv a_i \pmod{m_i}$, $y \equiv a_i \pmod{m_i}$, $1 \le i \le r$

$\Rightarrow x \equiv y \pmod{m_i}$ అన్ని $1 \le i \le r$లకు సిద్ధాంతం 9.6.7. నుండి

$\therefore$ $x \equiv y \pmod{m}$ అవుతుంది.

9.7.18. ఉదాహరణ :- $x \equiv 1 \pmod 3$, $x \equiv 1 \pmod 5$, $x \equiv 1 \pmod 7$కు, 1 కాని ఉమ్మడి కనిష్ఠ ధన పూర్ణాంక సాధనను కనుగొనండి.

సాధన :- $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, $m_1 = 3$, $m_2 = 5$, $m_3 = 7$. $m = m_1 m_2 m_3 = 3 \times 5 \times 7 = 105$

$M_1 = m_2m_3 = 35$, $M_2 = 21$, $M_3 = 15$

$j = 1, 2, 3$లకు $M_jx \equiv 1 \pmod{m_j}$కు ఏకైక సాధనలు x_jలు ఉంటాయి.

$35x_1 \equiv 1 \pmod 3 \Leftrightarrow x_1 \equiv 2 \pmod 3$

$21x_2 \equiv 1 \pmod 5 \Leftrightarrow x_2 \equiv 1 \pmod 5$

$15x_3 \equiv 1 \pmod 7 \Leftrightarrow x_3 \equiv$

$x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1$గా తీసుకుందాం.

$X = a_1x_1M_1 + a_2x_2M_2 + a_3x_3M_3$

$= 1\times2\times35 + 1\times1\times21 + 1\times1\times15 = 106$

$\therefore\ X = 106$ ఒక ఉమ్మడి సాధన

$y \neq 1$, y ఉమ్మడి సాధన, $0 < y < 106$ అనుకొంటే $x \equiv y \pmod{105}$

$105 \mid x - y \Rightarrow 105 \mid 106 - y \quad \& \quad 0 \le 106 - y < 105$

ఇది విరుద్ధత

$Y \ge 106$

$\therefore$ దత్త సమశేషకతలకు, 1 కాని, ఉమ్మడి కనిష్ఠ ధన పూర్ణాంక సాధన 106 అవుతుంది.

9.8. ఆయిలర్ మరియు ఫెర్మా సిద్ధాంతాలు :

9.8.1. నిర్వచనం :- Z_mపై $\bar{a} \oplus \bar{b} = \overline{a+b}$, $\forall \bar{a}, \bar{b} \in Z_m$ గా నిర్వచింపబడిన పరిక్రియ $\oplus$ను అవశేష వర్గాల సంకలనం లేక m మాపంగా సంకలనం అంటాము. m మాపంగా గల సంకలనాన్ని $+_m$తో సూచిస్తాము.

9.8.2. నిర్వచనం :- Z_mపై $\bar{a} \odot \bar{b} = \overline{ab}$, $\forall\ \bar{a}, \bar{b} \in Z_m$ గా నిర్వచింపబడిన పరిక్రియ $\odot$ను అవశేష వర్గాల గుణకారం లేక m మాపంగా గుణకారము అంటాము. m మాపంగా గల గుణకారాన్ని $\cdot_m$తో సూచిస్తాము.

9.8.3. నిర్వచనం :- $x \equiv y \pmod m$ అయితే y ను మాపం m దృష్ట్యా x యొక్క అవశేషం అంటాము. $\{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_m\}$ అనే సమితిలో ప్రతి పూర్ణాంకం yకు $y \equiv x_i \pmod m$ అయ్యేటట్లు ఒకే ఒక x_i ఉంటే, $\{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_m\}$ ను m మాపంగా సంపూర్ణ అవశేష సరణి అంటాము.

9.8.4. ఉదాహరణ :- (i) $m = 6$, అయితే $\{0,1,2,3,4,5\}$, $\{1,2,3,4,5,6\}$, $\{-6,-5,-4,-3,-2,-1\}$ లు m మాపంగా సంపూర్ణ అవశేష సరణులవుతాయి.

$\{0,5,7,14,16\}$ కూడ సంపూర్ణ అవశేష సరణి అవుతుంది.

(ii) $x_0 \in \bar{0},\ x_1 \in \bar{1},\ x_2 \in \bar{2}, \ldots\ldots, x_{m-1} \in \overline{m-1}$ గా తీసుకొంటే

$\{x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{m-1}\}$ సంపూర్ణ అవశేష సరణి అవుతుంది.

9.8.5. సిద్ధాంతము :- $x \equiv y \pmod m$ అయితే $(x,m)=(y,m)$ అవుతుంది.

ఉపపత్తి :- $x \equiv y \pmod m \Rightarrow m \mid (x-y)$

$$\Rightarrow \text{ ఒక } q \in Z \text{ కు } x-y=mq$$

$$(x,m) \mid x,\ (x,m) \mid m$$

$$\Rightarrow (x,m) \mid y$$

$$\Rightarrow (x,m) \mid (y,m)$$

అదే విధముగా $(y,m) \mid (x,m)$

$$\therefore (x,m)=(y,m)$$

9.8.6. నిర్వచనం :- $r_1, r_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, r_k$ లు పూర్ణాంకాలు, m ధన పూర్ణాంకము, $k \le m$ అనుకొందాము. $S=\{r_1, r_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, r_k\}$ అనుకొందాము.

S కు ఈ క్రింది లక్షణాలు ఉంటే S ను m మాపంగా సంపూర్ణ క్షీణ అవశేష సరణి అంటాము.

లక్షణాలు - (i) $(r_i, m)=1 \quad \forall\, i \in \{1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots,k\}$

(ii) $i,j \in \{1,2,\ldots\ldots\ldots,k\}\ i \ne j \Rightarrow r_i \not\equiv r_j \pmod m$

(iii) $x \in Z,\ (x,m)=1 \Rightarrow r_i \in S \ni r_i \equiv x \bmod m$

9.8.6(ఎ).గమనిక :- సిద్ధాంతము 9.8.5. దృష్ట్యా m మాపంగా గల సంపూర్ణ అవశేష సరణి నుండి m కు సాపేక్ష ప్రధానం కాని మూలకాలను తొలగించగా, మిగిలిన మూలకాల సమితి m మాపంగా ఒక సంపూర్ణ క్షీణ అవశేష సరణి అవుతుంది. ఇంకా m మాపంగా గల సంపూర్ణ క్షీణ అవశేష సరణులన్నింటిలోను మూలకాల సంఖ్య ఒకటే. ఈ సంఖ్యను $\phi(m)$ తో సూచిస్తాము.

9.8.7. ఆయిలర్ ϕ – ప్రమేయము :- $n \in Z,\ n \ge 1$ అయితే $\{1,2,\cdots,n\}$ n – మాపంగా ఒక సంపూర్ణ అవశేష సరణి అవుతుంది. కనుక $\phi(n)$ అనేది $1 \le k \le n,\ (k,n)=1$ అయ్యేటటువంటి పూర్ణాంకాలు k యొక్క సంఖ్య అవుతుంది. ధన పూర్ణాంకాల సమితి పై ϕ ఒక ప్రమేయమవుతుంది. దీనిని ఆయిలర్ ϕ - ప్రమేయం అంటాము.

3

9.8.8. సిద్ధాంతము :- $(a,m)=1$, $r_1, r_2, \cdots, r_n$ లు m మాపంగా ఒక సంపూర్ణ క్షీణ అవశేష సరణి అనుకొంటే $ar_1, ar_2, \cdots, ar_n$ కూడ ఒక సంపూర్ణ క్షీణ అవశేష సరణి అవుతుంది.

ఉపపత్తి :- $(a,m)=1$ ప్రతి i కు $(r_i,m)=1$ కనుక సిద్ధాంతం 9.4.19. నుండి ప్రతి i కు $(ar_i,m)=1$ అవుతుంది.

$ar_i \equiv ar_j \pmod m$

$\Rightarrow r_i \equiv r_j \pmod m$

$\Rightarrow i = j$

$\therefore$ $i \neq j$ అయితే $ar_i \not\equiv ar_j \pmod m$

కనుక $ar_1, ar_2, \cdots ar_n$ లు m మాపంగా ఒక సంపూర్ణ క్షీణ అవశేష సరణి అవుతుంది.

9.8.9. సిద్ధాంతము (ఆయిలర్ సిద్ధాంతము) :- $(a,m)=1$ అయితే $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod m$ అవుతుంది.

ఉపపత్తి :- m మాపంగా $r_1, r_2, \cdots r_{\phi(m)}$ ఒక సంపూర్ణ క్షీణ అవశేష సరణి అనుకొందాము.

సిద్ధాంతము 9.8.8. ప్రకారము $ar_1, ar_2, \cdots ar_{\phi(m)}$ కూడ m మాపంగా ఒక సంపూర్ణ క్షీణ అవశేష సరణి అవుతుంది.

కనుక ప్రతి r_i కు $ar_j \equiv r_i \pmod m$ అయ్యేటట్లు ఒకే ఒక r_j ఉంటుంది. ఇంకా $i \neq j$ అయితే $ar_i \not\equiv ar_j \pmod m$.

కనుక సిద్ధాంతము 9.6.3.లో (5) నుండి

$$ar_1, ar_2, \ldots\ldots\ldots, ar_{\phi(m)} \equiv r_1 r_2 \ldots\ldots r_{\phi(m)} \pmod m$$

కనుక $a^{\phi(m)} r_1 r_2 \ldots\ldots r_{\phi(m)} \equiv r_1 r_2 \ldots\ldots r_{\phi(m)} \pmod m$

$(r_j, m) = 1$ కనుక సిద్ధాంతాలు 9.4.19., 9.6.5.ల నుండి $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod m$ అవుతుంది.

9.8.10. సిద్ధాంతము (ఫెర్మా సిద్ధాంతము) :- p ప్రధాన సంఖ్య అనుకొనుము.

అపుడు

(i) $p \nmid a \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$

(ii) ప్రతి పూర్ణాంకము a కు, $a^p \equiv a \pmod p$ అవుతుంది.

ఉపపత్తి :- (i) $p \nmid a \Rightarrow (a,p)=1$

సిద్ధాంతం 9.8.9. నుండి $a^{\phi(p)} \equiv 1 \pmod{p}$

p ప్రధాన సంఖ్య కావడం చేత $\phi(p)=p-1$

$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

(ii) సిద్ధాంతం 9.6.3.లోని (5) వలన

$a^p = a^{p-1} \cdot a \equiv 1 \cdot a = a \pmod{p}$

9.8.11. సిద్ధాంతము (విల్సన్ సిద్ధాంతము) : p ప్రధాన సంఖ్య అయితే $\underline{|p-1} \equiv -1 \pmod{p}$.

ఉపపత్తి :- p=2 లేక 3 అయితే $\underline{|p-1} \equiv -1 \pmod{p}$ అనేది సులభంగా నిర్ధారింపవచ్చును.

$p \geq 5$ అనుకొనుము.

$S=\{1,2,3,\cdots,p-1\}$ అనుకొనుము. అపుడు

$\forall\, a \in S,\ (a, p)=1$ అవుతుంది.

సిద్ధాంతము 9.7.6. నుండి $ax \equiv 1 \pmod{p}$కు ఏకైక అసమశేషక సాధన $a'(1 \leq a' \leq p-1)$ ఉంటుంది.

$aa' \equiv 1 \pmod{p}$

$a' = a \Leftrightarrow aa \equiv 1 \pmod{p}$

$\Leftrightarrow aa \equiv 1 \pmod{p} \Leftrightarrow a^2 \equiv 1 \pmod{p}$

$\Leftrightarrow p \mid (a^2-1)$

$\Leftrightarrow p \mid a+1$ లేక $p \mid a-1$

$\Leftrightarrow a+1=0$ లేక $a-1=0$

$\Leftrightarrow a-1=0$ లేక $p=a+1$

$\Leftrightarrow a=1$ లేక $a=p-1$

$\therefore$ కనుక $a \in S, a \neq 1$ మరియు $a \neq p-1$, అయితే $a' \neq a$ అవుతుంది.

$a \in S, a \neq 1, a \neq p-1$ అయితే $\exists\, a' \in S \ni aa' \equiv 1 \pmod p$ and $a \neq a'$

ఇటువంటి సమశేషకతలనన్నింటిని గుణించగా $2\cdot 3\cdot 4\cdots(p-2) \equiv 1 \pmod p$ అవుతుంది.

$$\Rightarrow 2\cdot 3\cdot 4\cdots(p-2)(p-1) \equiv (p-1) \pmod p$$

$$\Rightarrow \underline{|p-1} \equiv (p-1) \pmod p \equiv -1 \pmod p$$

$$\Rightarrow \underline{|p-1} \equiv -1 \pmod p$$

విల్సన్ మరియు ఫెర్మా సిద్ధాంతాల నుపయోగించి $x^2 \equiv -1 \pmod p$ అయ్యేటట్లుండే ప్రధాన సంఖ్యలు pలను నిర్ధారించవచ్చును.

9.8.12. సిద్ధాంతము :- p ప్రధాన సంఖ్య అనుకొనుము. $x^2 \equiv -1 \pmod p$కు సాధన ఉండటానికి ఆవశ్యకత పర్యాప్త నియమం $p=2$ లేదా $p \equiv 1 \pmod 4$.

ఉపపత్తి :- $p=2$, అయితే $x^2 \equiv -1 \pmod p$ కు 1 ఒక సాధన.

p బేసి ప్రధాన సంఖ్య అయితే, విల్సన్ సిద్ధాంతం నుండి

$$\left(1\cdot 2\cdot 3\cdots j\cdots\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{p+1}{2}\cdots(p-j)\cdots(p-2)(p-1)\right) \equiv -1 \pmod p$$

పై సమశేషకత లోని ఎడమ చేతి వైపున లబ్ధంలో మొదటి భాగంలోని jను రెండవ భాగంలోని $(p-j)$తో జతపరుస్తూ సమశేషకతను

$1\cdot(p-1)\cdot 2(p-2)\cdots 3(p-3)\cdots j(p-j)\cdots\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{p+1}{2}\right) \equiv -1 \pmod p$ గా వ్రాయవచ్చును.

దీనినే $\prod_{j=1}^{\left(\frac{p-1}{2}\right)} j(p-j) \equiv -1 \pmod p$ గా వ్రాయవచ్చును .... (1)

కాని $j(p-j) \equiv -j^2 \pmod p$

$p \equiv 1 \pmod 4$ అయితే $4 \mid (p-1) \Rightarrow 2 \left| \frac{p-1}{2} \right. \Rightarrow \frac{p-1}{2}$ సరి సంఖ్య

అపుడు (1) నుండి $\prod_{j=1}^{\left(\frac{p-1}{2}\right)} j(p-j) \equiv \prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} (-j)^2 \equiv (-1)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)} \prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} j^2$

$\equiv -1 \pmod{p}$ .... (1) నుండి

$\therefore x^2 \equiv -1 \pmod{p}$కు $\prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} j$ ఒక సాధన అవుతుంది.

ఇపుడు $p \neq 2, p \not\equiv 1 \bmod p$ అయితే $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$కు సాధన లేదు అని చూపుదాం.

4 మాపంగా $\{0,1,2,3\}$ ఒక సంపూర్ణ అవశేష సరణి కనుక

$p \neq 2, p \not\equiv 1 \pmod{4}$ అయితే $p \equiv 3 \pmod{4}$ అవుతుంది.

ఒక $q \in Z$కు $p-3=4q$ అవుతుంది.

$\Rightarrow \frac{p-1}{2} = 2q+1$

$\Rightarrow \frac{p-1}{2}$ ఒక బేసి సంఖ్య

ఏదైనా పూర్ణాంకం x_0 కు $x_0^2 \equiv -1 \pmod{p}$ అనుకొందాము.

$x_0^{p-1} \equiv \left(x_0^2\right)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$------------- (3)

$p \nmid x_0$ అనేది స్పష్టము.

ఫెర్మా సిద్ధాంతం నుండి $x_0^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$---------------(4)

(3), (4) ల నుండి $1 \equiv -1 \pmod{p}$

$\Rightarrow 2 \equiv 0 \pmod{p}$

$\Rightarrow p|2 \Rightarrow p=2$ ఇది $p \neq 2$ కు విరుద్ధత

కనుక యీ సందర్భంలో $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$కు సాధన లేదు.

9.8.13. ఉదాహరణ :- $\underline{|18} \equiv -1 \pmod{437}$ అని చూపుము.

ఉపపత్తి :- విల్సన్ సిద్ధాంతము ప్రకారము

$$\underline{|23-1} \equiv -1 \pmod{23}$$

$$\Rightarrow 22 \times 21 \times 20 \times 19 \times \underline{|18} \equiv -1 \pmod{23}$$

$$\Rightarrow (-1)(-2)(-3)(-4)\underline{|18} \equiv -1 \pmod{23}$$

$$\Rightarrow 24 \times \underline{|18} \equiv -1 \pmod{23}$$

$$\Rightarrow 1 \times \underline{|18} \equiv -1 \pmod{23} \text{.........................} (1)$$

$$437 = 19 \times 23$$

విల్సన్ సిద్ధాంతం నుండి $\underline{|19-1} \equiv -1 \pmod{19}$

$$\Rightarrow \underline{|18} \equiv -1 \pmod{19} \text{ -------- } (2)$$

(1), (2)ల నుండి $\underline{|18} \equiv -1 \left(\bmod [19,23]\right)$

$$\Rightarrow \underline{|18} \equiv -1 \pmod{437}$$

9.9. ఆయిలర్ ప్రమేయము ϕ (n) :-

ఈ విభాగంలో చైనీయుల సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించి నిర్వచనం 9.8.7.లో నిర్వచించిన, ఆయిలర్ ప్రమేయము ϕ యొక్క ఒక ముఖ్య ధర్మాన్ని రాబడతాము.

9.9.1. సిద్ధాంతము :- m, n లు సాపేక్ష ప్రధానాలైన ధన పూర్ణాంకాలైతే $\phi(mn) = \phi(m)\,\phi(n)$ అవుతుంది.

ఉపపత్తి :- $\phi(m) = j$, m – మాపంగా $r_1, r_2, \cdots, r_j$ ఒక క్షీణ సంపూర్ణ అవశేష సంపూర్ణ అవశేష సరణి అనుకొనుము.

$\phi(n) = k$, n – మాపంగా $s_1, s_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, s_k$ ఒక క్షీణ సంపూర్ణ అవశేష సరణి అనుకొనుము.

ఇపుడు పూర్ణాంకం x అనేది mn మాపంగా గల క్షీణ సంపూర్ణ అవశేష సరణిలో ఉండడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమం ఏదో ఒక h, i లకు $x \equiv r_h \pmod{m}$, $x \equiv s_i \pmod{n}$ కావడం అని చూద్దాం.

mn - మాపంగా గల క్షీణ సంపూర్ణ అవశేష సరణిలో x ఉంది అనుకొనుము. అపుడు $(x, mn) = 1$ అవుతుంది.

$$(x, m) = d \Rightarrow d \mid x,\ d \mid m \Rightarrow d \mid x,\ d \mid mn$$

$$\Rightarrow d \mid (x, mn) = 1$$

$$\Rightarrow d = 1$$

$\therefore (x, m) = 1$

అదే విధంగా $(x, m) = 1$ అవుతుంది.

కనుక, ఒక h కు $r_h \equiv x \pmod{m}$

$(x, n) = 1$ కనుక, ఒక i కు $s_i \equiv x \pmod{n}$

విపర్యయంగా $x \equiv r_h \pmod{m}$, $x \equiv s_i \pmod{n}$ అనుకొనుము.

అపుడు $(x, m) = (x, r_h) = 1, (x, n) = (x, s_i) = 1$

$$(x, m) = (x, n) = 1 \Rightarrow (x, mn) = 1$$

కనుక mn మాపంగా గల ఒక క్షీణ సంపూర్ణ అవశేష సరణిలో ఉంటుంది.

కనుక $S = \{x / x \equiv r_h \pmod{m}, x \equiv s_i \pmod{n}, 1 \le h \le j, 1 \le i \le k\}$

అనేది mn - మాపంగా గల ఒక క్షీణ సంపూర్ణ అవశేష సరణి అవుతుంది.

చైనీయుల శేష సిద్ధాంతం నుండి ప్రతి యుగ్మం ఓ (h, i) mn మాపంగా ఒకే ఒక x ను నిర్ధారిస్తుంది. కనుక

S లోని మూలకాల సంఖ్య j, k అవుతుంది.

$\therefore \phi(mn) = jk = \phi(m)\phi(n)$

9.9.2. సిద్ధాంతము :- p ప్రధాన సంఖ్య అయితే ప్రతి ధన పూర్ణాంకము n కు $\phi(p^n) = p^n - p^{n-1} = p^n\left(1 - \frac{1}{p}\right)$

ఉపపత్తి :- $\phi(p^n)$ అనేది $1 \le x \le p^n, (x, p^n) = 1$ అయ్యేటట్లుగా ఉండే ధన పూర్ణాంకాలు x ల సంఖ్య.

$a \mid p^n \Leftrightarrow a \mid p$

$(x, p^n) = 1 \Leftrightarrow (x, p) = 1$

$\therefore (x, p^n) \ne 1 \Leftrightarrow (x, p) \ne 1$

కనుక p^n కు సాపేక్ష ప్రధానం కాని ధన పూర్ణాంకాల సమితి p యొక్క గుణిజాల సమితి

$$S = \{p, 2p, \ldots\ldots\ldots, (p-1)p, pp, (p+1)p, \ldots\ldots\ldots, (p^{n-1} - 1)p\}$$

Sలోని మూలకాల సంఖ్య $p^{n-1}-1$

$\therefore 1 \le x \le p^n$, $(x, p^n)=1$ అయ్యే పూర్ణాంకాలు xల సంఖ్య $=\phi(x)$

$$=(p^n-1)-(p^{n-1}-1)=p^n-p^{n-1}=p^n\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

9.9.3. సిద్ధాంతము :- p అనేది ప్రధానాంకాన్ని సూచిస్తుందనుకొందాము. $n>1$, అయితే $\phi(n)=n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$ అవుతుంది.

ఉపపత్తి :- n కు ప్రామాణిక చిత్రణ

$n=p_1^{\alpha_1}\, p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$, $p_1, \ldots\ldots, p_r$ లు ప్రధానాంకాలు అనుకొనుము.

$\left(p_j^{\alpha_j}, p_{j+1}^{\alpha_{j+1}}\, p_{j+2}^{\alpha_{j+2}}\cdots p_r^{\alpha_r}\right)=1$

సిద్ధాంతం 9.9.1. నుండి $\phi(n)=\phi\left(p_1^{\alpha_1}\right)\phi\left(p_2^{\alpha_2}\right)\ldots\ldots\ldots\phi\left(p_r^{\alpha_r}\right)$

$$=\prod_{j=1}^{r}\phi\left(p_j^{\alpha_j}\right)\ldots\ldots\ldots(1)$$

సిద్ధాంతం 9.9.2. నుండి $\phi\left(p_j^{\alpha_j}\right)=p_j^{\alpha_j}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)$

$$\therefore\ \phi(n)=p_1^{\alpha_1}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)p_2^{\alpha_2}\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots p_r^{\alpha_r}\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$$

$$=p_1^{\alpha_1}\, p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$$

$$=n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

9.9.4. సిద్ధాంతం :- $n \geq 1$, కు $\sum_{d|n} \phi(d) = n$.

ఉపపత్తి :- $n = 1$, సిద్ధాంతము స్పష్టము.

$n > 1, \quad S = \{1, 2, \cdots, n\}$ అనుకొనుము.

S పై సంబంధం $\sim$ ను

$a \sim b \Leftrightarrow (a, n) = (b, n) \ \forall \ a, b \in S$ గా నిర్వచిస్తే,

$\sim$ ఒక తుల్య సంబంధమవుతుంది.

a యొక్క తుల్య వర్గం $\tilde{a}$ అనుకొని, $(a, n) = d$ అనుకొంటే

$$\tilde{a} = \{b \in S / a \sim b\}$$

$$= \{b \in S / 1 \leq b \leq n, (b, n) = (a, n) = d\}$$

$$b \in S, 1 \leq b \leq n, (b, n) = d$$

$$\Leftrightarrow b \in S, 1 \leq \frac{b}{d} \leq \frac{n}{d}, \left(\frac{b}{d}, \frac{n}{d}\right) = 1$$

కనుక $T = \left\{\frac{b}{d} \middle/ b \in S, 1 \leq \frac{b}{d} \leq n/d, \left(\frac{b}{d}, \frac{n}{d}\right) = 1\right\}$ అనుకొంటే

$\tilde{a}$ లోను T లోను మూలకాల సంఖ్య సమానము

T లోని మూలకాల సంఖ్య $= \phi\left(\frac{n}{d}\right)$

S అనేది $\sim$ నిర్ధారించే వియుక్త తుల్య వర్గాల సమ్మేళనం $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, \tilde{a}_k$ అనేవి వియుక్త $\sim$ నిర్ధారించే వియుక్త తుల్య వర్గాలు $(a_i, n) = d_i$ అయితే

$$n = \sum |\tilde{a}_i| = \sum_{i=1}^{k} \phi\left(\frac{n}{d_i}\right)$$

ఇంకా $d|n$ అయితే $1 \leq d \leq n$.

కనుక ఒకే ఒక i కు $d \in \tilde{a}_i$ అవుతుంది.

$$\therefore n = \sum_{d/n} \phi\left(\frac{n}{d}\right)$$

9.10 యుగ్మ పరిక్రియ :-

9.10.1 సంకేతాలు : వివిధ సంఖ్యా సమితులను సూచించడానికి యీ క్రింది సంకేతాలను ఉపయోగిస్తాము.

Z: పూర్ణాంకాలన్నింటి సమితి

Z^+ : అన్ని అశూన్య ధన పూర్ణాంకాల సమితి

Q: అన్ని అకరణీయ వాస్తవ సంఖ్యల సమితి

Q^+ : అన్ని అకరణీయ, శూన్యేతర ధన వాస్తవ సంఖ్యల సమితి

R : అన్ని వాస్తవ సంఖ్యల సమితి

R^+ : అన్ని శూన్యేతర ధన వాస్తవ సంఖ్యల సమితి

C: అన్ని సంకీర్ణ సంఖ్యల సమితి

9.10.2 **నిర్వచనము :** G అశూన్య సమితి $G\times G$ నుండి G కు ప్రమేయాన్ని G పై యుగ్మ పరిక్రియ అంటాము.

9.10.3 **సంకేతం :** G పై $\cdot$ అనేది యుగ్మ పరిక్రియ అయితే $\cdot$ అనేది $G\times G$ నుండి G కు ప్రమేయం. $(a,b)\in G\times G$ కు $\cdot((a,b))$ ను $a\cdot b$ తో సూచిస్తాము. సందిగ్ధానికి అవకాశం లేనపుడు $a\cdot b$ ని ab తో కూడ సూచిస్తాము. $a\cdot b$ ని $\cdot$ యుగ్మ పరిక్రియను దృష్ట్యా a,b ల లబ్దము అని పిలుస్తాము. యుగ్మ పరిక్రియను సూచించే ఇతర సంకేతాలను వాడినపుడు a,b ల లబ్దాన్ని సూచించడానికి a,b మూలకాల మధ్య ఆ సంకేతాన్ని విధిగా వ్రాస్తాము.

9.10.4 **నిర్వచనం :** G పై యుగ్మ పరిక్రియ $\cdot$ అనుకొనుము.

1. $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)\ \forall\ a,b,c\in G$ అయితే $\cdot$ సహచర్య న్యాయాన్ని పాటిస్తుంది అని అంటాము. $\cdot$ ను సహచర్య యుగ్మ పరిక్రియ అని కూడ అంటాము.

2. $a\cdot b = b\cdot a\ \forall a,b\in G$ అయితే $\cdot$ వినిమయ న్యాయాన్ని పాటిస్తుంది అని అంటాము. $\cdot$ ను వినిమయ యుగ్మ పరిక్రియ అని కూడ అంటాము.

9.10.5 ఉదాహరణ : $G = Z^+$ అనుకొనుము.

$a \bullet b =$ కనిష్ఠ $\{a, b\}$ $\forall$ $a, b \in G$ గా నిర్వచిస్తే, G పై వినిమయ, సహచర్య యుగ్మ పరిక్రియ అవుతుంది.

9.10.6 ఉదాహరణ : కనీసం రెండు మూలకాలు గల సమితి G ని తీసికొని $a \bullet b = a$ $\forall$ $a, b \in G$ గా నిర్వచిస్తే, $\bullet$ వినిమయం కాని, సహచర్య యుగ్మ పరిక్రియ అవుతుంది.

9.10.7 SAQ : $G = Q$ అనుకొని G పై $\bullet$ ను $a \bullet b = a/b$ గా నిర్వచిస్తే, యుగ్మ పరిక్రియ కాదని చూపుము.

9.10.8 ఉదాహరణ : $G = Q^+$ అనుకొని, G పై $\bullet$ ను $a \bullet b = a/b$ గా నిర్వచిస్తే G పై $\bullet$ యుగ్మ పరిక్రియ. అది వినిమయము కాదు, సహచర్యము కాదు.

$2, 4, 8 \in G$.

$2 \bullet 4 = 2/4 = 1/2;\ 4 \bullet 2 = 4/2 = 2,\ 2 \bullet 4 \neq 4 \bullet 2$

$(2 \bullet 4) \bullet 8 = (2/4) \bullet 8 = (1/2)/8 = 1/16$

$2 \bullet (4 \bullet 8) = 2 \bullet (4/8) = 2 \bullet (1/2) = 2 \times 2/1 = 4$

$(2 \bullet 4) \bullet 8 \neq 2 \bullet (4 \bullet 8)$

9.10.9 ఉదాహరణ : $G = Z^+$. G పై $\bullet$ ను $a \bullet b = a/b$ $\forall$ $a, b \in G$ గా నిర్వచిస్తే, G పై $\bullet$ యుగ్మ పరిక్రియ కాదు.

$1, 2 \in G$. కాని $1 \bullet 2 = 1/2 = 0.5 \notin G$.

9.10.10 SAQ : R పై వాస్తవ మూల్య ప్రమేయాల సమితిని G అనుకొనుము. G పై సంకలనం '+'ను, $f, g \in G$ కు $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ $\forall x \in R$ గా నిర్వచిస్తే, G పై + వినిమయ, సహచర్య యుగ్మ పరిక్రియ అని నిరూపించుము.

9.10.11 SAQ : X ఒక సమితి, X యొక్క ఘాత సమితి G అనుకొనుము. G పై

(i) +ను $A + B = (A - B) \cup (B - A)$ $\forall A, B \in G$

(ii) $\bullet$ ను $A \bullet B = (A \cap B)$ $\forall A, B \in G$ గా నిర్వచిస్తే +, $\bullet$ లు G పై వినిమయ, సహచర్య యుగ్మ పరిక్రియలని చూపుము.

9.10.12 యుగ్మ పరిక్రియ యొక్క పట్టికా చిత్రణ : G పరిమిత సమితి. G పై • యుగ్మ పరిక్రియ అయితే •ను పట్టిక ద్వారా వర్ణించవచ్చును.

$G = \{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n\}$ అనుకొనుము. యొక్క పట్టికా చిత్రణ క్రిందనీయబడినది.

•	a_1	a_2	......	a_j	......	a_n
a_1						
a_2						
⋮						
a_i				$a_i \cdot a_j$		
⋮						
a_n						

$x, y \in G$ అయితే ఏదో ఒక i, jలకు $x = a_i$, $y = a_j$అవుతుంది. అపుడు $x \cdot y$ అనేది a_i యొక్క పంక్తి a_j యొక్క దొంతిలోనున్న మూలకం అవుతుంది.

వినిమయం $\Leftrightarrow a_i \cdot a_j = a_j \cdot a_i \; \forall i, j$

కనుక వినిమయం $\Leftrightarrow$ పట్టికా చిత్రణ ప్రధాన కర్ణం దృష్ట్యా సౌష్ఠవం.

$a_1 \cdot a_1, a_2 \cdot a_2, \cdots a_n \cdot a_n$ లను కలిగిన కర్ణం ప్రధాన కర్ణము అని గమనించండి.

9.10.13 ఉదాహరణ : $G = \{0,1,2,3,4\}$ క్రింద పట్టిక ద్వారా నిర్వచించబడిన యుగ్మ పరిక్రియ + వినిమయము, సహచర్యము అవుతుంది.

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

9.10.14 ఉదాహరణ : $G=\{a,b,c,d\}$ క్రింది పట్టిక G పై ఒక వినిమయ సహచర్య యుగ్మ పరిక్రియ • ను వర్ణిస్తుంది.

•	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

9.10.15 ఉదాహరణ : $G=\{e,a,b\}$.

•	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e	e
b	b	e	e

ఇక్కడ • వినిమయమవుతుంది.

$(a\bullet b)\bullet b=e\bullet b=b,\ \ a\bullet(b\bullet b)=a\bullet e=a$

$\therefore (a\bullet b)\bullet b\neq a\bullet(b\bullet b)$

అందుచే • సహచర్యం కాదు.

9.11. సమూహాలు :-

ఈ విభాగంలో బీజ గణితంలోని అత్యంత ప్రాముఖ్యత గల "సమూహం" అనే భావనను పరిచయం చేస్తాము.

9.11.1 నిర్వచనము : ఒక అశూన్య సమితి G పై యుగ్మ పరిక్రియ • యీ క్రింది నియమాలను సంతృప్తిపరిస్తే $\langle G,\bullet\rangle$ అనే యుగ్మాన్ని ఒక "సమూహము" అంటాము.

నియమాలు

(i) • సహచర్య యుగ్మ పరిక్రియ

(ii) G లో ఒక మూలకము e, G లోని అన్ని మూలకాలు a కు $e\bullet a=a\bullet e=a$ అయ్యేటట్లు ఉంటుంది.

(iii) G లోని ప్రతి మూలకం a కు $a\bullet b=b\bullet a=e$ అయ్యేటట్లు G లో మూలకం b ఉంటుంది.

e ని $\langle G,\bullet\rangle$ లోని తత్సమ మూలకమని అంటాము. నియమము (iii)లోని b ని a కు విలోమం అంటాము.

9.11.2 సహాయ సిద్ధాంతము : $\langle G, \bullet \rangle$ ఒక సమూహమనుకొనుము.

(i) $e \in G \ni a \bullet e = e \bullet a = a \ \forall a \in G$. అనుకొనుము. ఈ లక్షణంతో G లో e ఏకైకము.

(ii) G లోని తత్సమ మూలకం e అనుకొనుము. $a \in G$ అనుకొనుము. G లో $a \bullet b = b \bullet a = e$ అయ్యేటట్లుగా ఉండే, b ఏకైకము.

ఉపపత్తి : (i) $a \bullet e' = e' \bullet a = a \ \forall a \in G$ అయ్యేటట్లుగా G లో e' ఉందనుకొందాము.

$$e \bullet e' = e' \bullet e = e$$

$$\therefore e = e'$$

(ii) $a \bullet b = b \bullet a = e$, $a \bullet c = c \bullet a = e$ అనుకొంటే

$$b = b \bullet e = b \bullet (a \bullet c) = (b \bullet a) \bullet c = e \bullet c = c$$

$$\therefore b = c$$

9.11.3 సంకేతాలు :

(i) G ఒక సమూహము అని చెప్పినపుడు, G ఒక నిర్దిష్ట యుగ్మ పరిక్రియ దృష్ట్యా సమూహము అని భావిస్తాము. ఈ యుగ్మ పరిక్రియ దృష్ట్యా $(a, b) \in G \times G$ యొక్క ప్రతి బింబాన్ని ab తో సూచిస్తాము. ab ని సమూహం G లో a, b ల లబ్ధమని అంటాము.

(ii) సమూహంలోని యుగ్మ పరిక్రియను $+$తో సూచించినపుడు ఆ సమూహాన్ని సంకలన సమూహం అంటాము. (a, b) యొక్క ప్రతిబింబాన్ని $a + b$తో సూచిస్తాము $a + b$ని a, bల సంకలనం అంటాము. $\langle G, + \rangle$ను సంకలన సమూహము అని అంటాము.

9.11.4 నిర్వచనము : G ఒక సమూహమనుకొనుము. సహాయ సిద్ధాంతం 9.11.2లోని (i) నుండి $ae = ea = a \ \forall a \in G$ అయ్యేటట్లుండే G లోని మూలకం ఏకైకము. దీనిని సమూహం G యొక్క తత్సమ మూలకం అంటాము.

9.11.2లోని (ii) నుండి $a \in G$ కు $a \bullet b = b \bullet a = e$ అయ్యేటట్లుగా ఉండే G లోని మూలకం b ఏకైకము. bని a యొక్క విలోమము అని a^{-1} అనే సంకేతంతో సూచిస్తాము.

9.11.5 సంకేతము : సంకలన సమూహం $\langle G, + \rangle$ లో

(i) తత్సమ మూలకాన్ని 0తో సూచిస్తాము.

(ii) $a \in G$ యొక్క విలోమాన్ని $-a$ తో సూచిస్తాము.

9.11.6 సిద్ధాంతము : G ఒక సమూహమనుకొనుము. $a, b, c \in G$ అనుకొనుము.

(i) $ab = ac$ అయితే $b = c$ అవుతుంది. (ఎడమ కొట్టివేత న్యాయము)

(ii) $ba = ca$ అయితే $b = c$ అవుతుంది. (కుడి కొట్టివేత న్యాయము)

ఉపపత్తి : G లో తత్సమమూలకం e అనుకొందాము.

(i) $ab = ac \Rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac)$

$$\Rightarrow \left(a^{-1}, a\right) b = \left(a^{-1}, a\right) c$$

$$\Rightarrow eb = ec$$

$$\Rightarrow b = c$$

(ii) $ba = ca \Rightarrow (ba)a^{-1} = (ca)a^{-1}$

$$\Rightarrow b\left(aa^{-1}\right) = c\left(aa^{-1}\right)$$

$$\Rightarrow be = ce$$

$$\Rightarrow b = c$$

9.11.7 **సిద్ధాంతము :** G ఒక సమూహము, $a, b \in G$ అయితే

(i) $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$ (ii) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ అవుతాయి.

ఉపపత్తి : G లో తత్సమ మూలకాన్ని e అనుకొందాము.

(i) $\left(a^{-1}\right)\left(a^{-1}\right)^{-1} = e, \; a^{-1}a = e$

$$\Rightarrow a^{-1}a = a^{-1}\left(a^{-1}\right)^{-1}$$

ఎడమ కొట్టివేత న్యాయము ప్రకారము $a = \left(a^{-1}\right)^{-1}$

(ii) $(ab)\left(b^{-1}a^{-1}\right) = a\left(bb^{-1}\right)a^{-1} = aea^{-1} = aa^{-1} = e = ab(ab)^{-1}$

ఎడమ కొట్టివేత న్యాయము ప్రకారము $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

9.11.8 సహాయ సిద్ధాంతము : G ఒక అశూన్య సమితి. G లో $\cdot$ ఒక సహచర్య యుగ్మ పరిక్రియకు,

(i) $\exists e \in G \ni e \cdot a = a \, \forall \, a \in G$ (ఎడమ తత్సమ మూలకము)

(ii) $a \in G \Rightarrow \exists b \in G \ni b \cdot a = e$ (a కు b ఎడమ విలోమం)

జరిగితే $\langle G, \cdot \rangle$ ఒక సమూహమవుతుంది.

ఉపపత్తి : $a \in G$ అనుకొనుము

(i) నుండి $e \cdot a = a$

(ii) నుండి $\exists \, b \in G \ni b \cdot a = e.$

(ii) నుండి $\exists b' \in G \ni b' \cdot b = e.$

$b' \cdot e = b' \cdot (b \cdot a) = (b' \cdot b) \cdot a = e \cdot a = a$

$a \cdot e = (b' \cdot e) \cdot e = b' \cdot (e \cdot e) = b' \cdot e = a$

కనుక $\langle G, \cdot \rangle$ లో e తత్సమ మూలకం.

ఇంకా $a \cdot b = (b' \cdot e) \cdot b = b' \cdot (e \cdot b) = b' \cdot b = e$ కనుక a కు b విలోమం.

$\langle G, \cdot \rangle$ సమూహము.

9.11.9 సిద్ధాంతము : G ఒక సమూహము, $a, b \in G$ అనుకొనుము. అపుడు $ax = b$, $ya = b$ సమీకరణాలకు G లో ఏకైక సాధనలుంటాయి.

ఉపపత్తి : G లోని తత్సమ మూలకం e అనుకొందాము.

$x = a^{-1}b \in G, \; y = ba^{-1} \in G,$

$ax = a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = eb = b,$

$ya = (ba^{-1})a = b(a^{-1}a) = be = b$

$x_1, x_2 \in G$, $ax_1 = b$, $ax_2 = b$ అయితే $ax_1 = ax_2$ ఎడమ కొట్టివేత న్యాయము నుండి $x_1 = x_2$.

అదే విధంగా కుడి కొట్టివేత న్యాయం నుండి $y_1 a = y_2 a \Rightarrow y_1 = y_2$

$a^{-1}b$ ఏకైక సాధన, $ya = b$ కు ba^{-1} ఏకైక సాధన.

9.11.10 సిద్ధాంతము : G ఒక అశూన్య సమితి అనుకొనుము. G లో $\bullet$ ఒక యుగ్మ పరిక్రియ అనుకొనుము. G లోని అన్ని a, b లకు $a \bullet x = b$, $y \bullet a = b$ సమీకరణాలకు సాధనలుంటే $\langle G, \bullet \rangle$ సమూహామవుతుంది. ఇంకా యీ సాధనలు ఏకైకము.

ఉపపత్తి : $G \neq \phi$. G లో ఒక మూలకం a ఉంటుంది.

$y \bullet a = a$ కు సాధన ఉంటుంది. దానిని e అనుకుంటే $e \bullet a = a$ అవుతుంది.

$b \in G$ అయితే $a \bullet x = b$ కు G లలో సాధన c ఉంటుంది.

$a \bullet c = b$

$e \bullet b = e \bullet (a \bullet c) = (e \bullet a) \bullet c = a \bullet c = b$

కనుక యుగ్మ పరిక్రియ $\bullet$ దృష్ట్యా e ఎడమ తత్సమ మూలకం అవుతుంది.

$y \bullet b = e$ కు G లో సాధన ఉంటుంది. దానిని b' అనుకొంటే

$b' \bullet b = e$ అవుతుంది.

కనుక G లోని ప్రతి మూలకం b కు e దృష్ట్యా ఎడమ విలోమం ఉంటుంది.

సిద్ధాంతము 9.11.8 నుండి $\langle G, \bullet \rangle$ సమూహామవుతుంది.

సిద్ధాంతము 9.11.9 నుండి $a \bullet x = b$, $y \bullet a = b$ సమీకరణాల సాధనలు ఏకైకము.

9.11.11 సిద్ధాంతము : G అశూన్య పరిమిత సమితి పై సహచర్య యుగ్మ పరిక్రియ $\bullet$ యీ క్రింది నియమాలము పాటిస్తే $\langle G, \bullet \rangle$ సమూహామవుతుంది.

నియమాలు :

(i) $a \bullet b = a \bullet c \Rightarrow b = c$

(ii) $b \bullet a = c \bullet a \Rightarrow b = c$

ఉపపత్తి : $G = \{a_1, a_2, \cdots a_n\}$ అనుకొనుము. $a, b \in G$ అనుకొనుము.

$a \cdot a_i = a \cdot a_j$ అయితే (i) నుండి $a_i = a_j$ అవుతుంది.

$a_i \bullet a = a_j \bullet a$ అయితే (ii) నుండి $a_i = a_j$ అవుతుంది.

కనుక $G = \{a \bullet a_1, a \bullet a_2, \cdots, a \bullet a_n\} = \{a_1 \bullet a, a_2 \bullet a, \cdots, a_n \bullet a\}$ అవుతుంది.

$b \in G \Rightarrow \exists a_j, a_i \in G \ni a \bullet a_i = b,\ a_j \bullet a = b.$

కనుక అన్ని $a, b \in G$ కు $a \cdot x = b$, $y \cdot a = b$ సమీకరణాలకు G లో సాధనలున్నాయి.

సిద్ధాంతం 9.11.10 నుండి $\langle G, \cdot \rangle$ సమూహమవుతుంది.

9.11.12 నిర్వచనము : ఒక సమూహము G యొక్క యుగ్మ పరిక్రియ వినిమయ న్యాయాన్ని పాటిస్తే G ని వినిమయ సమూహము లేదా ఎబీలియన్ సమూహము అని అంటాము.

ఎబీలియన్ సమూహం G లో $ab = ba \ \forall \ a, b \in G$ అని గమనించండి.

9.11.13 ఉదాహరణ : పూర్ణాంకాల సాధారణ సమాకలనం $+$ తో Z^+ సమూహం కాదు. $+$ సహచర్య వినిమయ యుగ్మ పరిక్రియ అవుతుంది. పూర్ణాంకాలు x, y లకు $x + y = x$ అయితే $y = 0$ అవుతుంది. కాని $0 \notin Z^+$ కనుక Z^+ లో $+$ దృష్ట్యా తత్సమ మూలకం లేదు.

9.11.14 ఉదాహరణ : $G = Z^+ \cup \{0\}$ ను పూర్ణాంకాల సాధారణ సమాకలనం $+$ తో పరిగణిస్తే $\langle G, + \rangle$ లో తత్సమ మూలకం 0 అవుతుంది. $1 + g = 0$ అయ్యేటట్లు G లో g అనే మూలకం ఏదీ ఉండదు. కనుక $1 \in G$ కి విలోమం ఉండదు. కావున $\langle G, + \rangle$ సమూహం కాదు.

9.11.15 SAQ : పూర్ణాంకాల సాధారణ సమాకలనం $+$ తో సమూహమని చూపండి.

9.11.16 ఉదాహరణ : Q^+ by $*$ ను

$a * b = \dfrac{ab}{3} \ \forall \ a, b \in Q^+$ గా నిర్వచిస్తే $\langle Q^+, * \rangle$ వినిమయ సమూహమవుతుంది.

ఉపపత్తి : (i) $a, b \in Q^+$ అయితే $\dfrac{ab}{3}$ ఒక ధన అకరణీయ సంఖ్య

$\therefore a * b \in Q^+$

కనుక Q^+ పై $*$ యుగ్మ పరిక్రియ

(ii) $$(a * b) * c = \left(\frac{ab}{3}\right) * c = \frac{abc}{3^2} = \frac{a}{3}\left(\frac{bc}{3}\right)$$

$$= \frac{a}{3}(b * c) = a * b * c$$

(iii) $$a * b = \frac{ab}{3} = \frac{ba}{3} = b * a$$

(iv) $3 * a = \dfrac{3a}{3} = a \ \forall \ a \in Q^+$ కనుక $*$ దృష్ట్యా Q^+ లో 3 తత్సమ మూలకమవుతుంది.

(v) $\frac{3^2}{a} \in Q^+$, $a \in Q$ $\qquad a * \frac{3^2}{a} = \frac{a3^2}{3a} = \frac{3a}{3a} 3 = 3$

కనుక a కు * దృష్ట్యా $\frac{3^2}{a}$ విలోమం అవుతుంది.

(i), (ii), (iii), (iv), (v) ల నుండి $(Q^+, *)$ ఒక ఎబీలియన్ సమూహము అని గ్రహించవచ్చును.

9.11.16(ఎ) గమనిక : K ధన పూర్ణాంకమైతే Q^+లో * ను $a * b = \frac{ab}{K} \forall a, b \in Q^+$ గా నిర్వచిస్తే $(Q^+, *)$ వినిమయ సమూహమవుతుంది. దీనిలో తత్సమ మూలకం K అవుతుంది. $a \in Q^+$ యొక్క విలోమం $\frac{K^2}{a}$ అవుతుంది.

9.11.17 ఉదాహరణ : పూర్ణాంకాల సాధారణ గుణకారంతో Z సమూహం కాదు.

పూర్ణాంకాల గుణకారం వినిమయ, సహచర్య న్యాయాలను పాటిస్తుంది.

$1 \in Z$, $1a = a1 = a \forall a \in Z$

$2 \in Z$ · $2a = 1$ అయ్యేటట్లు Z లో మూలకం a ఏదీ ఉండదు. కనుక Z లో 2కు గుణకార విలోమం లేదు.

9.11.18 ఉదాహరణ : R^+ లో * ను $a * b = ab \forall a, b \in R^+$ గా నిర్వచిస్తే $(R^+, *)$ ఎబీలియన్ సమూహమవుతుంది. (ఇక్కడ ab అంటే వాస్తవ సంఖ్యలు a, b ల సాధారణ లబ్దము).

ఉపపత్తి : $a, b \in R^+$ అయితే $a > 0, b > 0$.

కనుక $ab > 0$, $ab \in R^+$ అవుతుంది.

$$a * b = ab \in R^+$$

$$(a * b) * c = (ab) * c = (ab)c = a(bc) = a(b * c) = a * (b * c) \ \forall a, b, c \in R^+$$

$$a * b = ab = ba = b * a \ \forall a, b \in R^+$$

$1 \in R^+$, $\qquad 1 * b = 1b = b \ \forall \ b \in R^+$

$a \in R^+$ అయితే $\frac{1}{a} \in R^+$, $\quad a * \frac{1}{a} = a \cdot \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \cdot a = \frac{1}{a} * a$

$\therefore$ $(R^+, *)$ ఒక ఎబీలియన్ సమూహము.

9.11.19 ఉదాహరణ : సంకీర్ణ సంఖ్యల సాధారణ సంకలనంతో C ఎబీలియన్ సమూహమవుతుంది. ఇందులో 0 తత్సమ మూలకమవుతుంది. a, b లు వాస్తవ సంఖ్య లయితే సంకీర్ణ సంఖ్య $a+ib$ యొక్క విలోమం $(-a)+i(-b)$ అవుతుంది.

9.11.20 ఉదాహరణ : సంకీర్ణ సంఖ్యల సాధారణ గుణకారంతో $C^* = C\setminus\{0\}$ ఎబీలియన్ సమూహమవుతుంది. దీనిలో 1 తత్సమ మూలకము. a, b వాస్తవ సంఖ్యలు $a+ib \in C^*$ అయితే $a+ib$ యొక్క విలోమం $\dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$ అవుతుంది.

9.11.21 నిర్వచనము : సమూహం G లోని మూలకాల సంఖ్య పరిమితమైతే G ని పరిమిత సమూహము అని అంటాము. G లోని మూలకాల సంఖ్య n అయితే G ని n వ తరగతి పరిమిత సమూహమని అంటాము మరియు $|G| = n$ అని వ్రాస్తాము. పరిమితం కాని సమూహాన్ని అపరిమిత సమూహమని అంటాము.

9.11.22 సహాయ సిద్ధాంతము : పరిమిత సమూహం G యొక్క తరగతి $2n$ ($n \geq 1$ పూర్ణాంకము), G లో తత్సమ మూలకం e అయితే $aa = e, a \neq e$ అయ్యేటట్లు గా G లో ఒక మూలకం a ఉంటుంది.

ఉపపత్తి : $G^* = G\setminus\{e\}$ అనుకొందాము.

G^* లోని ప్రతి a కు $A_a = \{a, a^{-1}\}$ అనుకొందాము.

వీలైతే $|A_a| = 2 \ \forall \ a \in G^*$ అనుకొందాము.

$x \in A_a \Rightarrow x = a$ లేదా $x = a^{-1}$

$x = a$ అయితే $x^{-1} = a^{-1}$, $x = a^{-1}$ అయితే $x^{-1} = a$ కనుక $A_a = A_x$

$\therefore \ x \in A_a \Rightarrow A_a = A_x$

ప్రతి $a, b \in G^*$ కు $A_a = A_b$ లేదా $A_a \cap A_b = \phi$.

కనుక G^* సమితి $\{A_a\}_{a \in G^*}$ సమితుల వియుక్త సమ్మేళనమవుతుంది. $|A_a| = 2$.

కాబట్టి $|G^*|$ సరిసంఖ్య అవుతుంది. అందువలన $|G|$ బేసి సంఖ్య అవుతుంది. ఇది దత్తాంశానికి విరుద్ధత.

$\therefore \ |A_a| = 1$ అయ్యేటట్లు G లో a అనే మూలకం $a \neq e$ ఉంటుంది. యీ a కు $a = a^{-1} \Rightarrow aa = e, a$

9.11.23 SAQ: సమితి G పై $*$ యుగ్మ పరిక్రియ. $x \in G$ కి $x * x = x$ అయితే x ను స్వయం హీన (idempotent) మూలకం అంటాము $\langle G, * \rangle$ సమూహమైతే G లో ఒకే ఒక స్వయంహీన మూలకముంటుందని చూపుము.

9.11.24 ఉదాహరణ : $R^* = R \setminus \{0\}$ అనుకొనుము.

$a * b = |a| b \ \forall \ a, b \in R^*$ గా నిర్వచిస్తే R^* పై $*$ సహచర్య యుగ్మ పరిక్రియ అవుతుంది.

$(-3) * 2 = 6, \ \ 2 * (-3) = -6$ కనుక $*$ వినిమయం కాదు.

$1 * a = a \ \forall \ a \in R^*; a * \dfrac{1}{|a|} = 1 \ \forall \ a \in R^*.$

కనుక $\langle R^*, * \rangle$ లో 1 ఎడమ తత్సమ మూలకం అవుతుంది. ఇంకా 1 దృష్ట్యా ప్రతి $a \in R^*$ కు కుడి విలోమం ఉంది.

$1 * 1 = 1 ; (-1) * 1 = 1$

$1 * 1 = (-1) * 1, 1 \neq -1$ కనుక $\langle R^*, * \rangle$ సమూహం కాదు.

$-1, 1$ లు $\langle R^*, * \rangle$ లో స్వయంహీన మూలకాలు.

S.A.Q. 9.11.23 వలన కూడ $\langle R^*, * \rangle$ సమూహం కాదని తెలుస్తుంది.

9.11.25 ఉదాహరణ : ఒక మూలకం ఉండే సమూహం యొక్క పట్టిక $G = \{e\}$ అనుకొనుము.

•	e
e	e

9.11.26 ఉదాహరణ : రెండు మూలకాలతో ఉండే సమూహం యొక్క పట్టిక $G = \{e, a\}$ అనుకొనుము.

•	e	a
e	e	a
a	a	e

ఈ సమూహము వినిమయ సమూహము.

9.11.27 ఉదాహరణ : 3 మూలకాలతో ఉండే సమూహం యొక్క పట్టిక $G = \{e, a, b\}$, e తత్సమ మూలకం అనుకొందాము. G పరిమిత సమూహము. కనుక ఎడమ, కుడి కొట్టివేత న్యాయాల వలన ప్రతి పంక్తిలోను G లోని అన్ని మూలకాలు ఉండవలయును, ప్రతి మూలకం ఒకే ఒకసారి వస్తుంది. అలాగే ప్రతి దొంతిలోను G లోని ప్రతి మూలకం ఒకే ఒకసారి వస్తుంది. కనుక పట్టిక

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

అవుతుంది. కనుక G సమూహం అయ్యేటట్లు G లో ఒకే ఒక యుగ్మ పరిక్రియ ఉంటుంది. ఈ సమూహం ఎబీలియన్ సమూహము.

9.11.28 **ఉదాహరణ (4 మూలకాలు గల సమూహం) :** Let $G=\{e,a,b,c\}$, e తత్సమ మూలకం అనుకొందాము.

సహాయ సిద్ధాంతం 9.11.22 ప్రకారం $\exists\, x \in G \ni xx = e$ $aa = e$ అనుకొందాము.

సందర్భము 1 : $bb = e$ అయితే $cc = e$ అవుతుంది.

అపుడు సమూహం G యొక్క పట్టిక

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

ఈ సమూహం ఎబీలియన్ సమూహము దీనిని క్లైయిన్ (klein) 4- సమూహము అంటాము. దీనిని V తో సూచిస్తాము. ఈ సమూహంలో $aa=e$, $bb=e$, $cc=e$, $ab=c$, $bc=a$, $ca=b$ అవుతాయి.

సందర్భము 2 : b యొక్క విలోమము C అవుతుంది.

$$bc = cb = e$$

పట్టిక దిగువనీయబడింది.

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

ఈ సమూహం ఎబీలియన్ సమూహము. ఇందులో

$aa = e,\ bb = a,\ cc = a$ ఇంకా

$bbb = ab = c$; $ccc = ac = b$

$G = \{e, b, bb, bbb\} = \{e, c, cc, ccc\}$.

9.11.29 ఉదాహరణ : $G = \{1, -1, i, -i\} \subseteq C$ అనుకొనుము. సంకీర్ణ సంఖ్యల గుణకారం దృష్ట్యా G సమూహమవుతుంది. పట్టిక దిగువనీయబడినది.

	1	−1	i	−i
1	1	−1	i	−i
−1	−1	1	−i	i
i	i	−i	−1	1
−i	−i	i	1	−1

1ని e గాను, -1ను a గాను, iను b గాను, -1 ను c గాను పేర్లను మార్పు చేస్తే ఈ సమూహ పట్టిక ఉదాహరణ 9.11.28. లోని సందర్భం 2లోని సమూహం యొక్క పట్టిక అవుతుంది. కనుక ఈ రెండు సమూహాలు వాటి మూలకాల నామకరణంలో తప్ప నిర్మాణాత్మకంగా ఒక్కటేనని గమనించవచ్చును.

9.11.30 అష్టక సమూహం (Quaternion Group) Q_8 : సమితి $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ క్రింది పట్టిక ద్వారా నిర్వచింపబడిన యుగ్మ పరిక్రియ • తో ఒక ఎబీలియన్ కాని సమూహమవుతుంది.

•	1	−1	i	−i	j	−j	k	−k
1	1	−1	i	−i	j	−j	k	−k
−1	−1	1	−i	i	−j	j	−k	k
i	i	−i	−1	1	k	−k	−j	j
−i	−i	i	1	−1	−k	k	j	−j
j	j	−j	−k	k	−1	1	i	−i
−j	−j	j	k	−k	1	−1	−i	i
k	k	−k	j	−j	−i	i	−1	1
−k	−k	k	−j	j	i	−i	1	−1

Q_8 పై • యుగ్మ పరిక్రియ అనేది స్పష్టము.

Q_8 పై • సహచర్య న్యాయాన్ని పాటిస్తుందని సరి చూడవచ్చును.

పట్టిక నుండి $\langle Q_8, \bullet\rangle$లో 1 తత్సమ మూలకం అని చూడవచ్చును.

$x \in Q_8, x \neq \pm 1$ అయితే $x\cdot(-x)=1$ కనుక $x^{-1}=-x$

$x=\pm 1$ అయితే $x\bullet x=1$ కనుక $x^{-1}=x$

$\therefore \langle Q_8, \bullet\rangle$ సమూహము.

Q_8లో $i^2=j^2=k^2=-1, i\bullet j=k, j\bullet k=i, k\bullet i=j, j\bullet i=-k, k\bullet j=-i, i\bullet k=-j,$

కనుక $(Q_8, \bullet)$ ఎబీలియన్ కాని సమూహము.

9.11.31 ఉదాహరణ : n ధన పూర్ణాంకము, $G_n=\{z/z\in C, z^n=1\}$ అనుకొనుము. సంకీర్ణ సంఖ్యల గుణకారంతో G_n ఒక ఎబీలియన్ సమూహము.

ఉపపత్తి : $1\in C, 1^n=1 \Rightarrow 1\in G_n$.

$z_1, z_2 \in G_n \Rightarrow z_1^n=1, z_2^n=1, \; Z_1Z_2\in C$

$\Rightarrow (z_1z_2)^n = z_1^n\, z_2^n = 1\cdot 1=1$

$\Rightarrow z_1z_2\in G_n$

సంకీర్ణ సంఖ్యా సమితి పై సాధారణ సంకీర్ణ సంఖ్యా గుణకారం సహచర్య, వినిమయ న్యాయాలను పాటిస్తుందని మనకు తెలుసు.

$z\in G_n \Rightarrow z^n=1 \Rightarrow z\neq 0$

$\therefore Z\in G_n \Rightarrow \frac{1}{z}\in C, \; \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n}=\frac{1}{1}=1$

$\Rightarrow \frac{1}{z}\in G_n$

ఇంకా $z\cdot\frac{1}{z}=1$ కనుక Z యొక్క విలోమం $\frac{1}{z}$ అవుతుంది. కనుక G_n ఒక ఎబీలియన్ సమూహము G_n లోని మూలకాలు 1 యొక్క n – వ మూలాలని, $|G_n|=n$ అని గమనించండి.

9.11.32 నిర్వచనం (ఘాతాలు) : G ఒక సమూహము, $a\in G$, n పూర్ణాంకము అనుకొనుము.

G లోని తత్సమ మూలకం e అనుకొనుము.

$n=0$ అయితే $a^n=e$ అని నిర్వచిస్తాము.

$n>0$ అయితే a^n ను గణితాను గమనాన్నుపయోగించి $a^1=a$, $a^n=a^{n-1}a$ గా నిర్వచిస్తాము.

$n<0$ అయితే $a^n=\left(a^{-1}\right)^{-n}$ గా నిర్వచిస్తాము.

$$a^n=\begin{cases} a\cdot a\cdots a(n \text{ times}) \text{ if } n>0 \text{ అయితే} \\ e \text{ if } n=0 \text{ అయితే} \\ a^{-1}a^{-1}\cdots a^{-1}(-n \text{ times}) \text{ if } n<0 \text{ అయితే} \end{cases}$$

అని గమనించండి.

9.11.33 సిద్ధాంతము : G సమూహాము, $a,b\in G$, $m,n\in Z$ అయితే

(i) $a^{-n}=\left(a^{-1}\right)^n$ (ii) $a^m a^n=a^{m+n}$

(iii) $\left(a^m\right)^n=a^{mn}$ (iv) $ab=ba$ అయితే $(ab)^n=a^n b^n$ అవుతాయి.

ఉపపత్తి : ఉపపత్తి పాఠకునికి అభ్యాసంగా వదలబడినది.

9.12 ఉప సమూహాలు :-

9.12.1 నిర్వచనము : $\langle G,*\rangle$ ఒక సమూహాము, G కు H ఒక అశూన్య ఉప సమిష్ఠి అనుకొనుము. ప్రతి $x,y\in H$ $x*y\in H$ అయితే $*$ దృష్ట్యా H సంవృతమవుతుందని అంటాము.

9.12.2 నిర్వచనము : G ఒక సమూహాము, H అనేది G లో సంవృతమయిన ఒక అశూన్య ఉప సమితి అనుకొనుము. H లో యుగ్మ పరిక్రియను $\forall\, a,b\in H$ కు H లో ab ను G లోని ab గా నిర్వచిస్తాము. H లోని యీ యుగ్మ పరిక్రియను H పై G నుండి సంక్రమిత లేక G నుండి ప్రేరిత పరిక్రియ అంటాము.

9.12.3 నిర్వచనము : G ఒక సమూహాము. G యొక్క శూన్యేతర ఉపసమితి H, G లోని యుగ్మ పరిక్రియ దృష్ట్యా సంవృతమగునుకొందాము. G ద్వారా ప్రేరిత పరిక్రియతో H సమూహం అయితే, H ను G కు ఒక ఉప సమూహం అంటాము. G కు H ఉప సమూహాము అని చెప్పడానికి $H\le G$ (లేక $G\ge H$) అనే సంకేతాన్ని ఉపయోగిస్తాము. $H\le G$, $H\ne G$ అయితే $H<G$ (లేక $G>H$) అని వ్రాస్తాము.

9.12.4 నిర్వచనము : G ఒక సమితి, $H<G$ అయితే H ను G కు శుద్ధ ఉప సమూహాము అంటాము. $G\le G$ అనేది స్పష్టము. G ను G కి విషమ (injropa) ఉపసమితి అంటాము.

$\{e\} \le G$ అవుతుంది. $\{e\}$ను అల్ప (trivial) ఉప సమూహము అంటాము. $H \le G, H \ne \{e\}$ అయితే H ను G కి (non – trivial) అనల్ప ఉప సమూహం అంటాము.

9.12.5 ఉదాహరణ : $Z_4 = \{0,1,2,3\}$ అనుకొనుము. Z_4 పై $+$ను యీ క్రింది పట్టిక ద్వారా నిర్వచించుదాము.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\langle Z_4, +\rangle$ ఎబీలియన్ సమూహమని, సులభంగా సరి చూడవచ్చును. Z_4లోని మూలకాలను $e=0, a=1, b=2, c=3$ గా గుర్తిస్తే, $\langle Z_4, +\rangle$ యొక్క పట్టిక ఉదాహరణ 9.8.28లోని 2వ సందర్భంలోని సమూహం G యొక్క పట్టిక ఒకటే అవుతాయి. $\langle Z_4, +\rangle$ యొక్క ఉప సమూహాలు $\{0\}, \{0,2\}, \{0,1,2,3\}$ లు.

9.12.6 ఉదాహరణ : క్లెయిన్ 4- సమూహం $V = \{e, a, b, c\}$ యొక్క ఉప సమూహాలు $\{e\}, \{e,a\}, \{e,b\}, \{e,c\}, \{e,a,b,c\} = V$ లు ఈ సమూహంలో $x^2 = e$ సమీకరణానికి 4 సాధనలు ఉన్నాయి.

9.12.7 ఉదాహరణలు : (i) గుణకారం దృష్ట్యా R^+ కు Q^+ శుద్ధోప సమూహం అవుతుంది.

(ii) $\langle Z,+\rangle < \langle Q,+\rangle < \langle R,+\rangle < \langle C,+\rangle$

9.12.8 ఉదాహరణ : $\langle 12Z,+\rangle < \langle 6Z,+\rangle < \langle 3Z,+\rangle < \langle Z,+\rangle < \langle R,+\rangle$

9.12.9 ఉదాహరణ : గుణకారంతో R^+కు $G = \{\pi^n / n \in Z\}$ ఒక ఉప సమూహమవుతుంది.

9.12.10 ఉదాహరణ : $G = \{6^n / n \in Z\}$ అనుకుంటే, గుణకారముతో $G < Q^+ < R^+$.

9.12.11 సిద్ధాంతము : G ఒక సమూహమనుకొనుము. G కు H ఒక ఉప సమితి అనుకొనుము. G కు H ఉప సమూహం కావడానికి యీ క్రింది నియమాలన్నీ ఆవశ్యక పర్యాప్తాలు.

(a) G లోని యుగ్మ పరిక్రియ దృష్ట్యా H సంవృతము.

(b) G లోని తత్సమ మూలకం e అనుకుంటే $e \in H$

(c) $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$

ఉపపత్తి : $H \le G$ అనుకొందాము. ఉప సమూహం నిర్వచనం నుండి G లోని యుగ్మ పరిక్రియ దృష్ట్యా H సంవృతము.

H లోని తత్సమ మూలకం e' అనుకొంటే H లోను, అందుచే G లోను $e'e' = e'$ అవుతుంది.

కాని G లో $e'e = e'$

$\therefore G$ లో $e'e = e'e'$ అవుతుంది. కొట్టివేత న్యాయం నుండి $e = e'$ అవుతుంది.

$a \in H$ అయితే H లో $ab = e$ అయ్యేటట్లు H లో b ఉంటుంది.

G లో కూడ $ab = e$ అవుతుంది.

$\therefore G$ లో $aa^{-1} = e = ab$ అవుతుంది.

కనుక $b = a^{-1} \in H$

విపర్యయంగా $(a),(b),(c)$ నియమాలు సంతృప్త పరచబడతాయి అనుకొందాము.

G లోని యుగ్మ పరిక్రియ సహచర్య న్యాయాన్ని పాటిస్తుంది. కనుక H లోని ప్రేరిత పరిక్రియ కూడ సహచర్య న్యాయాన్ని పాటిస్తుంది.

$e \in H \Rightarrow ae = ea = a \ \forall \ a \in H$

$a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H \Rightarrow H$ లో $a^{-1}a = aa^{-1} = e$

కనుక H ఒక ఉప సమూహము.

9.12.12 సిద్ధాంతము : సమూహము G కు H ఒక అశూన్య ఉపసమితి అనుకొనుము. G కు H ఉప సమూహం కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమం H లోని అన్ని a, b లకు $ab^{-1} \in H$ కావడం.

ఉపపత్తి : G కు H ఉప సమూహమనుకొందాము. $a, b \in H$ అనుకొనుము.

అపుడు $b^{-1} \in H$ అవుతుంది. H సంవృతమైనందు వలన $\therefore ab^{-1} \in H$ అవుతుంది.

విపర్యయంగా $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$ అనుకొనుము.

$a, a \in H$ కనుక $\therefore aa^{-1} = e \in H$

$b \in H \Rightarrow e, b \in H \Rightarrow eb^{-1} = b^{-1} \in H$

$b, c \in H \Rightarrow b, c^{-1} \in H$

$$\Rightarrow b\left(c^{-1}\right)^{-1} = bc \in H.$$

కనుక ప్రేరిత పరిక్రియ దృష్ట్యా H సంవృతమవుతుంది.

కనుక G కు H ఉప సమూహమవుతుంది.

9.12.13 SAQ : H, K లు ఉప సమూహాలైతే, G కు $H \cup K$ ఉప సమూహము $\Leftrightarrow$ $H \subseteq K$ లేదా $K \subseteq H$ అని నిరూపించుము.

9.12.14 ఉదాహరణ : $(Z,+)$కు $2Z, 5Z$ ఉప సమూహాలవుతాయి. $2,5 \in 2Z \cup 5Z$. $2+5=7 \notin 2Z \cup 5Z$ కనుక రెండు ఉప సమూహాల సమ్మేళనం ఉప సమూహం కానక్కరలేదు.

9.12.15 SAQ : G పరిమిత సమూహము, e దాని తత్సమ మూలకం $a \in G$ అనుకొనుము. $a^n = e$ అయ్యేటట్లు Z^+లో n ఉంటుందని చూపుము.

9.12.16 ఫలితం : e తత్సమ మూలకంగా G ఒక సమూహమనుకొనుము. G కు S ఒక ఉపసమితి అనుకొందాము.

అపుడు $H_S = \{x \in G / sx = xs \ \forall \ s \in S\}$, G కు ఉప సమూహం అవుతుంది.

ఉపపత్తి : $s = es = se \ \forall s \in S \Rightarrow e \in H_S \Rightarrow H_S \neq \phi$.

$x, y \in H_S \Rightarrow s(xy) = (sx)y = (xs)y = x(sy) = x(ys) = (xy)s \ \forall \ s \in S$

$\Rightarrow xy \in H_S$

$x \in H_S \Rightarrow sx = xs \Rightarrow x^{-1}s = sx^{-1} \ \forall \ s \in S \Rightarrow x^{-1} \in H_S$

కనుక G కు H_S ఉప సమూహమవుతుంది.

9.12.17 నిర్వచనము : G ఒక సమూహమనుకొనుము. $H_G = \{x \in G / xg = gx \ \forall \ g \in G\}$ ని G యొక్క కేంద్రము (centre) అంటాము.

9.12.18 SAQ : సమూహము G యొక్క కేంద్రం H_G ఒక ఏబీలియన్ ఉప సమూహమని చూపుము.

9.12.19 సిద్ధాంతము : G ఒక సమూహము $a \in G$ అనుకొందాము. అపుడు $H = \{a^n / n \in Z\}$, G కు సమూహమవుతుంది. G కు ఉప సమూహం K, $a \in K$ అయితే $H \subseteq K$ అవుతుంది.

ఉపపత్తి : $a^0 = e \Rightarrow e \in H$

$a^n, a^m \in H \Rightarrow a^n \left(a^m\right)^{-1} = a^n a^{-m} = a^{n-m} \in H$

$\therefore G$ కు H ఒక ఉప సమూహము.

$a \in K \Rightarrow a^n \in K \ \forall \ n \in Z$ కనుక $H \subseteq K$ అవుతుంది

9.12.20 నిర్వచనము : G ఒక సమూహము, $a \in G$ అయితే ఉప సమూహం $\{a^n / n \in Z\}$ ను, a తో జనితమయ్యే, G యొక్క చక్రీయ ఉప సమూహము అంటాము. దీనిని $\langle a \rangle$తో సూచిస్తాము.

9.12.21 నిర్వచనము : G సమూహమనుకొనుము. G లోని ఏదైనా ఒక మూలకం a కు $G = \langle a \rangle$ అయితే G ని చక్రీయ సమూహమని అంటాము. a ను G కి జనక మూలకం అంటాము.

9.12.22 ఉదాహరణ : సమూహం $(Z, +)$లో $n \in Z$ తో జనితమైన చక్రీయ ఉప సమూహం $\langle n \rangle = \{nx / x \in Z\}$.

9.12.23 గమనిక : G సమూహము, $a \in G$.అనుకొనుము. $\langle a \rangle = \left\{ a^n / n \in Z \right\}$.

$$= \left\{ \left(a^{-1}\right)^{-n} / n \in z \right\} = \left\{ \left(a^{-1}\right)^{m} / m = -n \in Z \right\} = \left\langle a^{-1} \right\rangle$$

9.12.24 ఉదాహరణ : $\langle Z_4, + \rangle$ ఒక చక్రీయ సమూహము. దీనికి 1, 3లు జనక మూలకాలు.

$\langle 3 \rangle = \{0, 3, 3+3, 3+3+3\} = \{0, 3, 2, 1\} = Z_4$

$\langle 1 \rangle = \langle 0, 1, 2, 3 \rangle = Z_4$

9.12.25 ఉదాహరణ : క్లైయిన్ 4 - సమూహము V చక్రీయ సమూహము కాదు.

$V = \{e, a, b, c\}$

$\langle e \rangle = \{e\}$, $\langle a \rangle = \{e, a\}$, $\langle b \rangle = \{e, b\}$, $\langle c \rangle = \{e, c\}$

కనుక V లోని ఏ మూలకము V కి జనక మూలకం కాదు.

9.12.26 SAQ : ఒకే ఒక జనక మూలకం ఉన్న చక్రీయ సమూహంలో 2 కంటే ఎక్కువ మూలకాలు ఉండవు అని ఋజువు చేయండి.

9.12.27 ఉదాహరణ : $\langle Z, + \rangle$ ఒక చక్రీయ సమూహము. $\langle Z, + \rangle$ కు 1, -1 జనక మూలకాలవుతాయి.

9.12.28 ఉదాహరణ : $\langle 6Z, + \rangle$ ఒక చక్రీయ సమూహము. దీనికి 6, -6లు జనక మూలకాలు.

9.12.29 ఉదాహరణ : $G = \{6^n / n \in Z\}$ సాధారణ గుణనంతో చక్రీయ సమూహము 6, $\frac{1}{6}$లు దీనికి జనక మూలకాలు.

9.12.30 ఉదాహరణ : $\langle Q, + \rangle$ చక్రీయ సమూహం కాదు.

ఉపపత్తి : $\langle Q, + \rangle$ చక్రీయ సమూహమనుకొంటే $\exists q \in Q \ni Q = \langle q \rangle$.

$q = 0$ అయితే $\langle q \rangle = \{0\} \neq Q$.

కనుక $q \neq 0$ అవుతుంది.

$1 \in Q = \langle q \rangle \Rightarrow \exists 0 \neq m \in Z \ni 1 = mq$

$\frac{1}{2m} \in Q = \langle q \rangle \Rightarrow 0 \neq n \in Z \ni \frac{1}{2m} = nq$

$\frac{1}{2m} = nq = n \cdot \frac{1}{m} = \frac{n}{m} \Rightarrow n = \frac{1}{2} \in Z$ ఇది అసంభవము

కనుక $\langle Q, + \rangle$ చక్రీయ సమూహం కాదు.

19.12.31 ఉదాహరణ : $\langle Q^+, \cdot \rangle$ చక్రీయ సమూహం కాదు.

ఉపపత్తి : $\langle Q^+, \cdot \rangle$ చక్రీయమనుకొంటే $\exists a \in Q^+ \ni Q^+ = \langle a \rangle$

$a = 1$ అయితే $\langle a \rangle = \{1\} \neq Q^+$

కనుక $a \neq 1$

$2 \in Q^+ \Rightarrow \exists n \in Z \ni 2 = a^n$

$\Rightarrow n = 1,\ 2 = a$

$\Rightarrow Q^+ = \langle 2 \rangle$

$\frac{1}{3} \in Q^+ \Rightarrow \exists K \in Z \ni \frac{1}{3} = 2^K$

$\Rightarrow 1 = 3 \times 2^K$ ఇది అసంభవము

కనుక $\langle Q^+, \cdot \rangle$ చక్రీయ సమూహము.

9.12.32 ఉదాహరణ : $G = \{a + b\sqrt{2} / a, b \in Z\}$ అనుకొనుము. సాధారణ సంకలనం $+$తో G ఒక సమూహమవుతుంది. దీనిలో తత్సమ మూలకం 0 అవుతుంది. $a + b\sqrt{2}$ యొక్క విలోమం $-a - b\sqrt{2}$ అవుతుంది. $\langle G, + \rangle$ చక్రీయ సమూహం కాదు.

ఉపపత్తి : $\langle G, + \rangle$ చక్రీయమనుకొంటే $\exists a + b\sqrt{2} \in G \ni$

$G = \langle a + b\sqrt{2} \rangle$

$1 \in G \Rightarrow \exists\, 0 \neq n \exists Z \ni 1 = n\left(a + b\sqrt{2}\right) = na + nb\sqrt{2}$

$\Rightarrow na = 1\ ,\ nb = 0$

$\Rightarrow na = 1\ ,\ b = 0$

$\sqrt{2} \in G \Rightarrow \exists\, 0 \neq m \in Z \ni \sqrt{2} = m\left(a + b\sqrt{2}\right) = ma \in Z$

$\Rightarrow \sqrt{2} \in Z$ ఇది అసంభవము.

కనుక $\langle G, + \rangle$ చక్రీయ సమూహం కాదు.

9.13 S.A.Q. లకు సమాధానాలు :-

9.4.14 SAQ : a, b, c లు పూర్ణాంకాలనుకొనుము. $(a,(b,c)) = ((a,b),c)$

ఉపపత్తి : $d_1 = (a,(b,c))$, $d_2 = ((a,b),c)$

$d_1 | a$, $d_1 | (b,c)$ సిద్ధాంతం 9.4.4లో 2 నుండి

$d_1 | b$, $d_1 | c$

కనుక $d_1 | (a,b)$, $d_1 | c$ కనుక $d_1 | d_2$

ఇదే విధంగా $d_2 | d_1$

సిద్ధాంతం 9.4.4లో 4 నుండి $d_1 = d_2$ అవుతుంది.

$\therefore ((a,b), c) = (a, (b,c))$

9.4.16 SAQ : x, y లు పూర్ణాంకాలు $m = ax + by$ అనుకొనుము.

సిద్ధాంతం 9.4.4లో 3 నుండి $g | a$, $g | b \Rightarrow g | (ax + by) = m$

విపర్యయంగా $g | m$ అనుకొనుము. అపుడు $\exists\, k \in Z \ni$

$m = gk$. $g = ax_0 + by_0$ అయ్యేటట్లు పూర్ణాంకాలు x_0, y_0 ఉంటాయి.

$\therefore\ m = (ax_0 + by_0)k = a(x_0 k) + b(y_0 k)$.

9.4.26 SAQ : యూక్లిడియన్ భాగాహార జంత్రీ (సిద్ధాంతము 9.4.25.)లో మొదటి రెండు సమీకరణాల నుండి $(b,c)=(r_1, r_2)$ అని చూపుము.

ఉపపత్తి : మొదటి రెండు సమీకరణాలు

$$b = cq_1 + r_1, 0 < r_1 < c$$

$$c = r_1q_2 + r_2, 0 < r_2 < r_1$$

సిద్ధాంతము 9.4.22 నుండి

$$(b,c) = (b - cq_1, c) = (r_1, c) = (r_1, c - r_1q_2) = (r_1, r_2)$$

9.4.30 SAQ : $n, n+1$లు రెండు వరుస సహజ సంఖ్యలనుకొనుము.

$n | n(n+1)$, $(n+1) | n(n+1)$ అవుతాయి.

$n | x$, $(n+1) | x$ అనుకొనుము. $\exists\, m \in Z \ni x = nm$

$(n+1) | nm$, $(n, n+1) = 1$ కనుక సిద్ధాంతం 9.4.24 నుండి

$(n+1) | m$ కనుక $n(n+1)/nm = x$.

$\therefore\ [n, n+1] = n(n+1)$

9.4.34 SAQ : $[ma, mb]$, ma యొక్క గుణిజము.

ma, m యొక్క గుణిజము కనుక $\exists\, h \in Z \ni$

$[ma, mb] = mh$

$[a, b] = d$ అనుకొనుము.

$a | d, b | d, am | dm, bm | dm \Rightarrow mh | dm$.

$\therefore\ h | d$.

ఇంకా $am | mn, bm | hh, a | h, b | h$ కనుక $d | h$

$\therefore\ h = d$

$[ma, mb] = mh = md = m[a, b]$

9.6.6 SAQ : $ax \equiv ay \pmod m \Rightarrow m \mid (ax - ay)$

$$\Rightarrow m \mid a(x-y)$$

$$\Rightarrow m \mid (x-y), \quad \because \ (a,m)=1$$

$$\Rightarrow x \equiv y \pmod m$$

9.6.8 SAQ : $i = 1, 2, \cdots, r$ కు $x \equiv y \pmod{m_i}$ అయితే $m_i \mid (x-y)$.

కనుక $x - y$ అనేది $m_1, m_2, \cdots, m_r$ ల సామాన్య గుణిజము $[m_1, m_2, \cdots, m_r] \| (x-y)$

$$\Rightarrow x \equiv y \left(\bmod [m_1, m_2, \cdots, m_r]\right)$$

9.7.13 SAQ : (i) ఇచ్చిన సమసేషకత $4x \equiv 5 \pmod 6$

$a = 4, b = 5, m = 6$

$d = (a,m) = (4,6) = 2, \ d \nmid b = 5$

$\therefore 4x \equiv 5 \pmod 6$ కు సాధన ఉండదు.

(ii) ఇచ్చిన సమసేషకత $3x \equiv 5 \pmod 7$

$a = 3, b = 5, m = 7$

$d = (3,7) = 1$

$\therefore 3x \equiv 5 \pmod 7$ కు ఏకైక అసమశేషక సాధన ఉంటుంది.

$3x \equiv 5 \pmod 7$

$0 \equiv 7 \pmod 7$

$\Rightarrow 3x \equiv 12 \pmod 7, \ (3,7) = 1$

$\Rightarrow x \equiv 4 \pmod 7$

$\therefore$ ఏకైక అసమశేషక సాధన 4 అవుతుంది.

9.10.7 SAQ : $(1,0) \in G \times G$. కాని $1 \bullet 0 = 1/0$ నిర్వచితం కాదు. కనుక $\bullet$ దృష్ట్యా $(1,0)$ కు G లో ప్రతిబింబం లేదు.

9.10.10 SAQ : $x \in R, f, g \in G$ అయితే, $f(x)$, $g(x)$ వాస్తవ సంఖ్యలు. కనుక $f(x)+g(x)$ ఏకైక వాస్తవ సంఖ్య. కనుక R పై h వాస్తవ మూల్య ప్రమేయం అవుతుంది.

$$f(x)+g(x)=g(x)+f(x),\ (f(x)+g(x))+k(x)=f(x)+(g(x)+k(x))$$

$\forall f, g, k \in G, \forall x \in R$ అవుతుంది.

అందుచే G లో + వినిమయము, సహచర్యము అవుతుంది.

అంటే $\forall f, g \in G, f+g=g+f, (f+g)+k=f+(g+K)$ అవుతుంది.

9.10.11 SAQ : (i) X కు, $A-B, B-A$ లు ఉప సమితులు. కనుక $(A-B)\cup(B-A)$ కూడ X కు ఉప సమితి.

$\therefore A+B \in G\ \forall A, B \in G$

$A+B=(A-B)\cup(B-A)=(B-A)\cup(A-B)=B+A$

కనుక + వినిమయము.

డీమోర్గాన్ సూత్రాలను మరియు $S, T \subseteq X$,

$T'=X-T$ లకు $S-T=S\cap T'$ ను ఉపయోగించి

$(A+B)+C=(A\cap B'\cap C')\cup(B\cap A'\cap C')\cup(C\cap A'\cap B')\cup(A\cap B\cap C)$

$=A+(B+C)\ \forall A, B, C \in G$ అని చూడవచ్చును.

కనుక + సహచర్యము

(ii) $\forall A, B, C \in G$ కు,

$A\cap B=B\cap A$, $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ అని మనకు తెలుసు. కనుక

$\therefore A\cdot B=B\cdot A$, $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$

కనుక $\cdot$ వినిమయము మరియు సహచర్యము అవుతుంది.

9.11.15 SAQ : Z లో + సహచర్య వినిమయ న్యాయాలను పాటించే యుగ్మ పరిక్రియ అని మనకు తెలుసు.

$0 \in Z$, $0+a=a\ \forall a \in Z$

$a \in Z \Rightarrow -a \in Z$

$a+(-a)=a-a=0$

అందుచే $\langle Z,+\rangle$ వినిమయ సమూహము.

9.11.23 SAQ : G లోని తత్సమ మూలకాన్ని e అనుకొందాము.

అపుడు $ee = e$.

$x \in G$, $xx = x$ అయితే $xx = x = xe$ అవుతుంది.

ఎడమ కొట్టివేత న్యాయం నుండి $x = e$ అవుతుంది.

కనుక G లోని ఏకైక స్వయంహీన మూలకం e అవుతుంది.

9.12.13 SAQ : $H \subseteq K$ లేక $K \subseteq H$ అయితే $H \cup K = K$ లేక $H \cup K = H$ అయి $H \cup K$ అనేది G కు ఉప సమూహము విపర్యయంగా $H \cup K$ ఉప లసమూహమనుకొందాము.

$H \not\subseteq K$ అనుకొంటే $\exists h \in H \ni h \notin K$.

$k \in K$ అనుకొనుము.. ఇపుడు $k, h \in H \cup K$ కనుక $\therefore kh \in H \cup K$

$kh \in K$ అయితే $k^{-1}(kh) = (k^{-1}k)h = eh = h \in K$ అవుతుంది. కనుక

$\therefore kh \in H$ అవుతుంది. $K = Ke = K(hh^{-1}) = (Kh)h^{-1} \in H$

$\therefore K \subseteq H$.

9.12.15 SAQ : $a = e$ అయితే $a' = e' = e$

$a \neq e$ అనుకొనుము.

$\forall n, m \in Z^+, n \neq m$ కు $a^n \neq a^m$ అయితే

పరిమిత సమితి G కు

$H = \{a^n / n \in Z^+\}$ ఒక అనంత ఉపసమితి అవుతుంది. ఇది విరుద్ధత

కనుక $\exists n, m \in Z^+ \ni n \neq m$, $a^n = a^m$

$n - m$ లేక $m - n \in Z^+$ అవుతుంది. ఇంకా $a^{n-m} = a^{m-n} = e$ అవుతుంది.

$$k = \begin{cases} n - m & \text{if } n > m \\ m - n & \text{if } m > n \end{cases}$$ అయితే

$k \in Z^+$, $a^k = e$ అవుతుంది.

9.12.18 SAQ : $H_G = \{x \in G / gx = xg \forall g \in G\}$

G లో తత్సమ మూలకం e అనుకొందాము.

$$g = eg = ge \ \forall \ g \in G \Rightarrow e \in H_G \Rightarrow H_G \neq \phi$$

$$x \in H_G \Rightarrow gx = xg \Rightarrow gx^{-1} = x^{-1}g \ \forall \ g \in G$$

$$\Rightarrow x^{-1} \in H_G$$

$$x, y \in H_G \Rightarrow g(xy) = (gx)y = (xg)y = x(gy)$$

$$= x(yg) = (xy)g \ \forall \ g \in G$$

$$\Rightarrow xy \in H_G$$

అందుచే G కు H_G ఉపసమూహము.

$$x, y \in H_G \Rightarrow x \in H_G, y \in G \Rightarrow xy = yx$$

అందుచే H_G ఎబీలియన్ సమూహము.

9.12.26 SAQ : $G = \langle a \rangle$ అనుకొనుము.

$$\langle a^{-1} \rangle = \{(a^{-1})^n / n \in Z\}$$

$$= \{a^{-n} / n \in Z\} = \{a^m / m \in Z\} = \langle a \rangle$$

అందుచే a, a^{-1}లు G కు జనక మూలకాలవుతాయి.

దత్తాంశం వలన, $a = a^{-1}$

$$a^2 = a \cdot a = a^{-1}a = e \cdot$$

$\therefore$ $n > 1$ కు $a^{2n} = e, a^{2n-1} = a$ అవుతుంది.

$\therefore$ $G = \langle a \rangle = \{e, a\}$, $a = e$ అయితే $G = \{e\}$

9.14 అభ్యాసము :-

సంఖ్యావాదము :-

1. n సరి పూర్ణాంకమైై $2^{2n}-1$ ను 15 భాగిస్తుంది అని చూపుము.

2. ప్రతి బేసి పూర్ణాంకము $4n+1$ లేదా $4n-1(n \in Z)$ అనే రూపంలో ఉంటుందని చూపుము.

3. యూక్లిడియన్ భాజక జంత్రీనుపయోగించి గ.సా.భా. కనుగొనుము.

   (i) (26, 118), (ii) (2210, 493), (iii) (858, 728, 325), (iv) (7469, 2464).

4. $a=-427, b=616$ యొక్క గ.సా.భా. g ని కనుగొనుము.

   $g=ax+by$ అయ్యేటట్లుగా పూర్ణాంకాలు x, y లను కనుగొనుము.

5. క్రింది సంఖ్యల ప్రామాణిక చిత్రణను వ్రాయండి.

   (i) 2560 (ii) 4950 (iii) 28812

6. p ప్రధాన సంఖ్య, $ab \equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$ అయితే $a \equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$ లేక $b \equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$ అవుతుందని చూపండి.

7. క్రింది సమశేషకతలను సాధించండి.

   (i) $3x \equiv 4(\mathrm{mod}\, 5)$ (ii) $259x \equiv 5(\mathrm{mod}\, 11)$ (iii) $15x \equiv 12(\mathrm{mod}\, 21)$

   (iv) $13x \equiv 9(\mathrm{mod}\, 25)$ (v) $8x \equiv 3(\mathrm{mod}\, 27)$ (vi) $3x \equiv 1(\mathrm{mod}\, 125)$

   (vii) $11x \equiv 2(\mathrm{mod}\, 317)$

8. $10!-32 \equiv 0(\mathrm{mod}\, 11)$ అని చూపుము.

9. $28!+233 \equiv 0(\mathrm{mod}\, 899)$ అని చూపుము.

10. p ప్రధాన సంఖ్య అయితే $p \mid 2(p-3)!+1$ అని చూపుము.

11. 1365కు a, b లు సాపేక్ష ప్రధానాలయితే $a^{12}-b^{12}$ ను 1365 భాగిస్తుందని నిరూపించుము.

సమూహవాదం :-

12. R పై వాస్తవ మూల్య ప్రమేయాల సమితిని G అనుకొనుము. $f, g \in G$ కు $f \bullet g = h$ ను $h(x)=f(x)g(x)$ $\forall\ x \in R$ గా నిర్వచింపుము. G పై $\bullet$ సహచర్య, వినిమయ యుగ్మ పరిక్రియ అని చూపుము.

14. $G=\{ f / f: R \to R$ ఒక ప్రమేయము $\}$. $f, g \in G$ కు

   $f * g = h$, ను $h(x)=(f*g)(x)=f(x)/g(x)$ $\forall f, g \in G, x \in R$ గా నిర్వచిస్తే

   $*$ యుగ్మ పరిక్రియకాదని చూపండి.

(సూచన : $f(x)=x+1, g(x)=x-1 \quad \forall\, x\in R.\quad f,g\in G.\quad (f*g)(1)=\frac{(1+1)}{(1-1)}=\frac{2}{0}$ నిర్వచింపబడదు)

15. దిగువనీయబడిన పరిక్రియలు ఆయా సమితుల పై యుగ్మ పరిక్రియలవుతాయో లేదో సరి చూడండి. యుగ్మ పరిక్రియలైతే అవి వినిమయ, సహచర్య న్యాయాలను పాటిస్తాయో లేదో నిర్ధారించండి.

i) Z^+ పై $a\cdot b=a-b$ ii) Z^+ పై $a\cdot b=a^b$ iii) Q పై $a\cdot b=a-b$

16. దిగువనీయబడిన పరిక్రియలు ఆయా సమితుల పై యుగ్మ పరిక్రియలవుతాయో లేదో సరి చూడండి. యుగ్మ పరిక్రియలైతే అవి వినిమయ, సహచర్య న్యాయాలను పాటిస్తాయో లేదో నిర్ధారించండి.

(i) Z పై $a\cdot b=a-b$ (ii) Q పై $a\cdot b=ab+1$ (iii) Q పై $a\cdot b=\frac{ab}{2}$

(iv) Z^+ పై $a\cdot b=3^{ab}$ (v) Z^+ పై $a\cdot b=a^b$

17. సాధారణ గుణకారంతో Z^+ సమూహం కాదని చూపండి.

(సూచన 1 తత్సమ మూలకము ప్రతి $x\neq 1$ కు విలోమం లేదు)

18. సాధారణ గుణకారంతో Q^+ ఎబీలియన్ సమూహమని చూపండి.

19. శూన్యేతర సమితి G పై యుగ్మ పరిక్రియ $*$ క్రింది నియమాలను పాటిస్తే $\langle G,*\rangle$ సమూహమవుతుందని చూపుము.

(i) $*$ సహచర్య న్యాయాన్ని పాటిస్తుంది.

(ii) $\exists e\in G \ni a*e=a\ \forall\, a\in G$

(iii) $a\in G \Rightarrow \exists\, b\in G \ni a*b=e$

20. పై సమస్యలో $*$ సహచర్య న్యాయాన్ని పాటించడం ఆవశ్యకమని ఋజువు చేయుము.

సూచన : $G=\{e,a,b\}$,

*	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e	e
b	b	e	e

21. $a*b=a-b$ గా నిర్వచిస్తే $\langle Z,*\rangle$ సమూహము కాదని చూపుము.

(సూచన : $(1*2)*3,\ 1*(2*3)$ లను పోల్చండి)

22. $a * b = ab$ గా నిర్వచిస్తే $\langle Q, * \rangle$ సమూహం కాదని చూపుము.

(సూచన : $*$ సహచర్య వినిమయ యుగ్మ పరిక్రియ 1 తత్సమ మూలకం $0 \in Q$, 0కు విలోమం లేదు)

23. $G = R \setminus \{-1\}$ అనుకొనుము. G పై $a * b = a + b + ab \ \forall\, a, b \in G$ గా నిర్వచిస్తే $\langle G, * \rangle$ ఎబీలియన్ సమూహమని చూపుము.

(సూచన : $a + b + ab + 1 = (a+1)(b+1)$ తత్సమ మూలకం 0 అవుతుంది. $a^{-1} = {-a}/{(1+a)}$)

24. $R^* = R \setminus \{0\}$, R^* పై $\bullet$ ను $a \bullet b = a|b|$ గా నిర్వచింపుము. ఈ $(R^*, \bullet)$ ను ఉదాహరణ 9.11.24లోని $\langle R^*, * \rangle$ తో పోల్చిచూడుము.

25. G ఒక సమూహము, $a_1, \cdots, a_n \in G$ అయితే $(a_1 a_2 \cdots a_n)^{-1} = a_n^{-1} a_{n-1}^{-1} \cdots a_1^{-1}$ అని చూపుము.

(సూచన : $(ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$ తో గణితాను గమనాన్ని ఉపయోగించుము)

26. $n \geq 1$. ఒక పూర్ణాంకము. e ని తత్సమ మూలకంగా గల సమూహం G అనుకొనుము. $H = \{x \in G / x^n = e\}$, G కు ఉపసమూహమవుతుందని చూపుము.

27. G ఒక సమూహము, G లోని పరిమిత సమితి H, G లోని పరిక్రియ ద్వారా ప్రేరిత పరిక్రియతో సంవృతమయితే అది G కు ఉప సమూహమవుతుందని చూపుము.

(సూచన : సిద్ధాంతం 9.11.11)

28. సమూహము G లో, $\{H_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ అనేది ఉప సమూహాలు H_α ల కుటుంబము అయితే, $H = \bigcap_{\alpha \in \Delta} H_\alpha$ కూడ G కు ఉప సమూహమని చూపుము.

29. సమూహము G కు H ఉప సమూహమనుకొనుము. $\forall\, a, b \in G$ కు $a \sim b \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$ గా $\sim$ ను నిర్వచిస్తే $\sim$ G పై తుల్య సంబంధమని చూపుము.

30. సమూహం G కు, H, K లు ఉపసమూహాలు.

$HK = \{hk / h \in H, k \in K\}$ అనుకొనుము. అపుడు

$HK \leq G \Leftrightarrow HK = KH$ అని నిరూపించుము.

9.15 సంఖ్యావాదంలోని అభ్యాసాలకు సమాధానాలు :-

9.14.3 : (i) 2

(ii) 7

(iii) 13

(iv) 77

9.14.4 : $g = 7, x = -13, y = -9$

9.14.5 : (i) $2^9 \cdot 5^1$

(ii) $2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11^1$

(iii) $2^2 \cdot 3^1 \cdot 7^4$

9.14.7 : (i) $x \equiv 3 \pmod 5$ i.e. $x = 3 + 5t, t \in Z$.

(ii) $x \equiv 10 \pmod{11}$ i.e. $x = 10 + 11t, t \in Z$.

(iii) $x = 5 + 4t \pmod{21}, t = 0,1,2$; $x \equiv 5 \pmod{21}$

(iv) $x \equiv 18 \pmod{25}$ i.e. $x = 25k + 18, k \in Z$

(v) $x \equiv 24 \pmod{27}$ i.e. $x = 24 + 27k, k \in Z$

(vi) $x \equiv 42 \pmod{125}$ i.e. $x = 42 + 125t, t \in Z$.

(vii) $x \equiv 29 \pmod{317}$ i.e. $x = 29 + 317t, t \in Z$

9.16 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు :-

సంఖ్యావాదము :

1. (i) $243x + 198y = 9$

   (ii) $71x - 50y = 1$ సమీకరణాలకు పూర్ణాంక సాధనలను కనుగొనండి.

2. $m > 0$, అయితే $[ma, mb] = m[a, b]$ అని చూపండి. ఇంకా $[a, b] \cdot (a, b) = |ab|$ అని చూపండి.

3. ప్రధాన సంఖ్యల సమితి అపరిమితమని నిరూపించండి.

4. $ax \equiv ay \pmod m \Leftrightarrow x \equiv y \left(\mod \dfrac{m}{(a, m)}\right)$ అని చూపుము.

5. $x \equiv y \pmod m$ అయితే $(x,m)=(y,m)$ అని నిరూపించుము.

6. $(a,m)=1$ అయితే $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod m$ అని నిరూపించుము.

7. p ప్రధాన సంఖ్య అయితే $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$ అని చూపుము.

సమూహవాదము :

8. యుగ్మ పరిక్రియను నిర్వచించండి. వినిమయము, సహచర్యములలో ఏదియు కాని యుగ్మ పరిక్రియకు ఒక ఉదాహరణనిమ్ము.

9. సమూహమును నిర్వచింపుము. సమూహం G లో తత్సమ మూలకం ఏకైకము, ప్రతి మూలకం యొక్క విలోమం ఏకైకము అని చూపుము.

10. సమూహమును నిర్వచింపుము. G సమూహము, $a, b \in G$ అయితే $(a^{-1})^{-1} = a$, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ అని చూపుము.

11. సమూహమును నిర్వచింపుము. అశూన్య సమితి G పై యుగ్మ పరిక్రియ $\bullet$ ఈ క్రింది నియమాలను సంతృప్తిపరిస్తే $\langle G, \bullet \rangle$ సమూహమని చూపండి.

(i) $\bullet$ సహచర్య న్యాయాన్ని పాటిస్తుంది.

(ii) $\exists\, e \in G \ni e \bullet a = a \quad \forall\, a \in G$

(iii) $a \in G \Rightarrow \exists\, b \in G \ni b \bullet a = e$

12. అశూన్య సమితి G పై $\bullet$ ఒక సహచర్య న్యాయాన్ని పాటించే, యుగ్మ పరిక్రియ అనుకొనుము. ప్రతి $a, b \in G$ కు, $a \bullet x = b$, $y \bullet a = b$ సమీకరణాలకు G లో సాధనలుంటే $\langle G, \bullet \rangle$ సమూహమని చూపుము.

13. Q^+ by $*$ ను $a * b = \frac{ab}{3}$ గా నిర్వచింపుము. $(Q^+, *)$ ఎబీలియన్ సమూహమని చూపుము.

14. పరిమిత సమూహం G లోని మూలకాల సంఖ్య సరి సంఖ్య అనుకొనుము. G లో తత్సమ మూలకం e అనుకొనుము. G లో $a \neq e$, $aa = e$ అయ్యేటట్లుగా ఒక a ఉంటుందని చూపుము.

15. $G = \{e, a, b, c\}$ అయితే $\langle G, \bullet \rangle$ సమూహం అయ్యేటట్లుగా ఉండే G పైని యుగ్మ పరిక్రియ అన్నింటిని కనుగొనుము.

16. సమూహం యొక్క ఉప సమూహాన్ని నిర్వచింపుము. $\langle Z_4, + \rangle$ యొక్క అన్ని ఉప సమూహాలను కనుగొనుము.

17. ఉప సమూహాన్ని నిర్వచింపుము. క్లైయిన్ 4- సమూహం యొక్క ఉప సమూహాలన్నింటిని కనుగొనుము.

18. సమూహం G లో అశూన్య ఉప సమితి H అనుకొనుము. G కు H ఉప సమూహము

$\Leftrightarrow ab^{-1} \in H \ \forall \ a, b \in H$ అని నిరూపించుము.

19. $\langle Q^{+}, \cdot \rangle$ చక్రీయ సమూహం కాదని చూపుము.

9.17 ప్రామాణిక గ్రంథాలు :-

1. An Introduction to the Theory of Numbers - Ivan Niven, H.S. Zuckerman - Wiley Eastern Ltd. 1976
2. A first course in Abstract Algebra - J.B. Fraleigh, Narosa Publishing House, 1988.
3. Topics in Algebra - I.N. Herstein, Wiley Eastern Ltd., New Delhi, 1975.
4. Basic Algebra, Vol. I & II - N. Jacobson, Hindustan Pub. Co. 1980.
5. A Text book of Modern Abstract Algebra - Santi Narayan, S. Chand & Co.

పాఠ్యరచయిత

ఎస్. రజని

పాఠము - 10

ప్రస్తారాలు - చక్రీయ సమూహాలు

10.1 పాఠ్య లక్ష్యం :-

ఈ పాఠంలో ప్రస్తారాల భావన సరి, బేసి ప్రస్తారాలుగా పరిమిత సమితి పైని ప్రస్తారాల యొక్క వర్గీకరణ పరిచయం చేయబడుతాయి. ఇంకా చక్రీయ సమూహాలు వాటి వర్గీకరణను గూర్చి కూడ చర్చించడం జరిగినది.

10.2 పాఠ్య నిర్మాణ క్రమము :-

ఈ పాఠంలోని అంశాలు

10.3 పరిచయం :-

ఈ పాఠంలో "ప్రస్తారము", "చక్రీయ సమూహము" అనే భావనలను పరిచయం చేస్తాము. A ఒక అశూన్య సమితి, S_A అనేది A పైని ప్రస్తారాల సమితి అయితే, "ప్రమేయాల సంయోగం" (Composition of mapings) యుగ్మ పరిక్రియగా S_A సమూహమవుతుందని చూపుతాము. S_3, S_4 అనే రెండు ముఖ్యమయిన ప్రస్తార సమూహాలు, వాటి ఉప సమూహాల "లాటిస్" చిత్రాలు (Lattice Diagrams) పొందుపరచబడినవి. $n \geq 3$ అయితే n సంకేతాల పై సౌష్ఠవ సమూహం S_n ఎబీలియన్ కాదని చూస్తాము. ప్రస్తారాలకు సంబంధించి "కక్ష్య", "ఆవృత్తము" మరియు "వ్యత్యయము" అనే భావనలు ప్రవేశ పెట్టబడినాయి. కనీసం రెండు మూలకాలున్న పరిమిత సమితి A పై ఏ ప్రస్తారాన్నయినా దాని వియుక్త ఆవృత్తాల లబ్ధంగాను, ఇంకా దాని వ్యత్యయాల లబ్ధంగాను వ్రాయవచ్చని నిరూపిస్తాము. పరిమిత సమితి పై ప్రస్తారాన్ని దాని వియుక్త ఆ వృత్తాల లబ్ధంగాను, మరియు దాని వ్యత్యయాల లబ్ధంగాను వ్రాసే పద్ధతిని కూడ వివరిస్తాము. ఉదాహరణ ద్వారా ఈ పద్ధతిని వివరిస్తాము. ఇంకా ఏ

ప్రస్తారాన్నయినా ఒకేసారి సరి సంఖ్యలో గల వ్యత్యయాల లబ్ధంగాను, బేసి సంఖ్యలో గల వ్యత్యయాల లబ్ధంగాను వ్రాయలేమని ఋజువు చేస్తాము.

"చక్రీయ సమూహం" అనే భావనను ప్రవేశ పెడతాము. ఏ అపరిమిత చక్రీయ సమూహమైనా సంకలనంతో పూర్ణాంకాల సమూహం $\langle Z, +\rangle$ యొక్క నిర్మాణాన్ని కలిగి ఉంటుందని, n మూలకాలు కలిగిన చక్రీయ సమూహం నిర్మాణపరంగా $\langle Z_n, +_n\rangle$ అవుతుందని చూస్తాము. n మూలకాలు గలిగిన చక్రీయ సమూహానికి $\phi(n)$ జనక మూలకాలు ఉంటాయని ఋజువు చేస్తాము. ఉదాహరణలు, స్వయం మదింపు ప్రశ్నలు (SAQs) అనేకం ఇవ్వబడినాయి.

10.4 ప్రస్తారాలు :-

10.4.1 నిర్వచనం :- A, B లు అశూన్య సమితులు అనుకొందాము. $A \times B$ కు f ఉప సమితి అయి, f ఈ క్రింది నియమాలను పాటిస్తుందనుకొందాము.

(i) A లోని ప్రతి మూలకం a కు B లో ఒక మూలకం b, $(a,b) \in f$ అయ్యేటట్లు ఉంటుంది.

(ii) $a \in A,\ b, b' \in B, (a,b) \in f$, $(a,b') \in f$ అయితే $b = b'$.

అపుడు f ను A నుండి B కు ఒక ప్రమేయము అని, $f : A \to B$ అని వ్రాస్తాము.

10.4.2 సంకేతము :- $(a,b) \in f$ అయితే $af = b$ అని వ్రాస్తాము. b ని ప్రమేయం f క్రింద a యొక్క ప్రతిబింబం అని అంటాము. A ను f యొక్క ప్రదేశము, B ను f యొక్క సహ ప్రదేశము అంటాము.

$Af = \{af / a \in A\}$ ను f క్రింద A యొక్క ప్రతిబింబము (లేక వ్యాప్తి) అని అంటాము.

10.4.3 నిర్వచనము :- $\phi : A \to B, \psi : B \to C$ ప్రమేయాలనుకొనుము. $a(\phi\psi) = (a\phi)\psi \quad \forall\ a \in A$ గా A నుండి C కు నిర్వచింపబడిన ప్రమేయం $\phi\psi$ ను $\phi\psi$ ప్రమేయాల సంయోజనము లేదా $\phi\psi$ ల లబ్ధము అంటాము.

10.4.4 నిర్వచనము :- $\phi : A \to B$ ఒక ప్రమేయమనుకొనుము.

(i) $a\phi = a'\phi \ \Rightarrow\ a = a'$ అయితే ϕ ను అన్వేక ప్రమేయమంటాము.

(ii) $b \in B \ \Rightarrow \exists\ a \in A \ni a\phi = b$ అయితే ϕ ను సంగ్రస్త ప్రమేయమంటాము.

(iii) ϕ అన్వేకము, సంగ్రస్తము కూడ అయితే ϕ ను ద్విగుణ ప్రమేయమంటాము.

10.4.5 నిర్వచనము :- అశూన్య సమితి A నుండి A కు f ఒక ద్విగుణ ప్రమేయమైతే f ను A కు ఒక ప్రస్తారము అని అంటాము.

10.4.6 సిద్ధాంతము :- అశూన్య సమితి A కు ప్రస్తారాల సమితి S_A అనుకొనుము. ప్రస్తారాల లబ్ధం (సంయోజనము) యుగ్మ పరిక్రియగా S_A ఒక సమూహమవుతుంది.

ఉపపత్తి :- $aI = a \ \forall \ a \in A$ గా నిర్వచింపబడిన ప్రమేయం A కు ఒక ప్రస్తారమనేది విశదము.

కనుక $S_A \neq \phi$

$\sigma, \tau \in S_A$, $a \in A$ అయితే $a(\sigma\tau) = (a\sigma)\tau$ అవుతుంది.

σ, τ లు A నుండి A కు ద్విగుణ ప్రమేయాలు.

$a, a' \in H, \quad a(\sigma\,\tau) = a'(\sigma\tau)$

$\Rightarrow (a\,\sigma)\tau = (a'\,\sigma)\,\tau$

$\Rightarrow a\,\sigma = a'\sigma$ ($\because \tau$ అన్వేకము)

$\Rightarrow a = a'$ ($\because \sigma$ అన్వేకము)

అందుచే σ, τ అన్వేకమవుతుంది.

τ సంగ్రస్తము కనుక $C \in A$ అయితే $b\tau = c$

అవుతూ A లో ఒక b ఉంటుంది.

σ సంగ్రస్తము కనుక $\exists \ a \in A \ni a\sigma = b$

$a(\sigma\,\tau) = (a\,\sigma)\tau = b\tau = C$

కనుక σ, τ సంగ్రస్తము.

$\therefore \sigma, \tau \in S_A$ కనుక ప్రస్తారాల లబ్ధముతో S_A సంవృతము.

సహచర్య న్యాయము:

$\sigma, \tau, \mu \in S_A$, $a \in A$ అనుకొనుము.

$a((\sigma\,\tau)\mu) = (a(\sigma\,\tau))\mu = ((a\,\sigma)\tau)\mu = (a\,\sigma)(\tau\mu) = a(\sigma(\tau\mu))$

$\therefore (\sigma\,\tau)\mu = \sigma\,(\tau\mu) \ \forall \ \sigma, \tau, \mu \in S_A$

తత్సమ మూలకం $a(I\,\sigma) = (a\,I)\sigma = a\sigma = (a\,\sigma)I = a(\sigma I) \forall \, a \in A, \ \sigma \in S_A$

$\therefore I\sigma = \sigma = \sigma I$

$\therefore S_A$ లో I తత్సమ మూలకం

విలోమం $\sigma \in S_A$ అనుకొనుము. $a \in A$ అయితే

$a'\sigma = a$ అయ్యేటట్లుగా A లో ఏకైక a' ఉంటుంది.

$\sigma^{-1} : A \to A$ ను $a\sigma^{-1} = a', (a'\sigma = a)$ గా నిర్వచిస్తే $\sigma^{-1} \in S_A$.

$$\left(a\sigma^{-1}\right)\sigma = a'\,\sigma = a = aI \ \forall \ a \in A \ ; \ a'\left(\sigma\sigma^{-1}\right) = \left(a'\sigma\right)\sigma^{-1} = a\sigma^{-1} = a' = a'I \ \forall\, a' \in A$$

$$\therefore \sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = I \ \forall \ \sigma \in S_A$$

$\therefore S_A$ లో σ కు విలోమం σ^{-1} అవుతుంది.

కనుక ప్రస్తారాల సంయోజనంతో S_A ఒక సమూహమవుతుంది.

10.4.7 నిర్వచనం :- $A = \{1, 2, \cdots, n\}$ అయితే A యొక్క అన్ని ప్రస్తారాల సమూహాన్ని n అక్షరాల (లేక n సంకేతాల) పై సౌష్ఠవ సమూహమంటాము. దీనిని S_n తో సూచిస్తాము.

10.4.7(a) సిద్ధాంతము :- సౌష్ఠవ సమూహము S_n లో $n!$ మూలకాలుంటాయి.

ఉపపత్తి :- $f \in S_n$ అనుకొనుము. $f(1)$ అనేది $1, 2, \ldots\ldots, n$ లలో ఏదైనా కావచ్చును. $f(2)$ అనేది f అన్వేకం కనుక, $\{1, 2, \ldots\ldots, n\} \setminus \{f(1)\}$ లో ఉంటుంది. $f(3) \in \{1, 2, \ldots\ldots, n\} \setminus \{f(1), f(2)\}$ లో ఉంటుంది. ఈ విధంగా కొనసాగిస్తే $f(i) \in \{1, 2, \ldots\ldots, n\} \setminus \{f(1), f(2), \ldots\ldots, f(i-1)\}$, $2 \le i \le n$. కనుక S_n లోని ప్రమేయాల సంఖ్య $n \cdot (n-1) \ldots\ldots 1 = n!$ అవుతుంది.

10.4.8 సంకేతము :- $\sigma \in S_n$ ను $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots\cdots & i & \cdots\cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots\cdots & \sigma(i) & \cdots\cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ గా కూడ వ్రాస్తాము.

10.4.9 ఉదాహరణ :- $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

అయితే $\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ అవుతుంది.

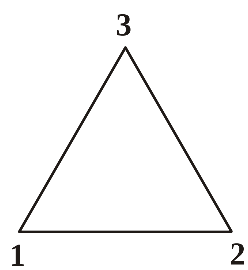
$\sigma\tau$ ను గణించేటపుడు మొదట σ ను పిదప τ ను అనువర్తింపజేస్తాము.

ఇపుడు రెండు ప్రముఖ ఉదాహరణలను చూద్దాం.

10.4.10 ఉదాహరణ :- $A=\{1,2,3\}$. S_3 లో ఈ క్రింది 6 మూలకాలు ఉంటాయి.

$$\rho_0=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \rho_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}, \rho_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\mu_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}, \mu_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}, \mu_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$



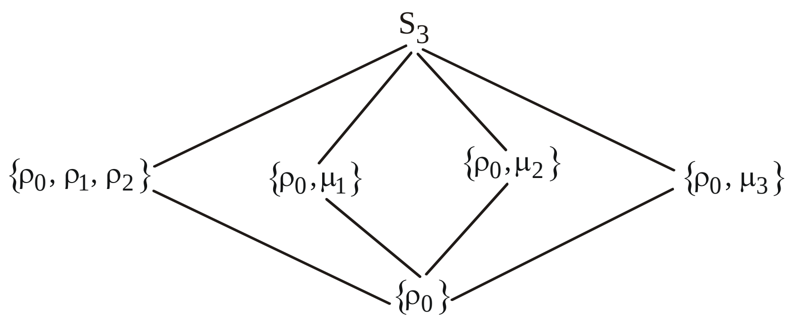
S_3 సమబాహు త్రిభుజ సౌష్ఠవాల సమూహం, D_3 అవుతుంది. ఇక్కడ ρ_0, ρ_1, ρ_2 లు పరిభ్రమణాలు, μ_1, μ_2, μ_3 లు కోణాల సమద్వి ఖండన రేఖలలో దర్పణ ప్రతిబింబాలను సూచిస్తాయి.

S_3 యొక్క గుణకార పట్టిక దిగువనీయబడినది.

	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_0	μ_2	μ_3	μ_1
ρ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	μ_3	μ_1	μ_2
μ_1	μ_1	μ_3	μ_2	ρ_0	ρ_2	ρ_1
μ_2	μ_2	μ_1	μ_3	ρ_1	ρ_0	ρ_2
μ_3	μ_3	μ_2	μ_1	ρ_2	ρ_1	ρ_0

$\mu_2, \mu_3 = \rho_2 \neq \rho_1 = \mu_3\ \mu_2$. ప్రధాన కర్ణం దృష్ట్యా పట్టిక సౌష్ఠవం కాదు. S_3 ఎబీలియన్ సమూహం కాదు.

S_3 యొక్క ఉప సమూహాలు $\{\rho_0\}, \{\rho_0, \mu_1\}, \{\rho_0, \mu_2\}, \{\rho_0, \mu_3\}, \{\rho_0, \rho_1, \rho_2\}, S_3$ లు ఈ ఉప సమూహాల మధ్య ఉప సమితి సంబంధాలను దిగువనీయబడిన జాలక పటం (lattice diagram) తెలియజేస్తుంది.



10.4.11 ఉదాహరణ (డై హెడ్రల్ సమూహము D_4) : ఒక చతురస్రపు శీర్షాలను **1,2,3,4**లుగా గుర్తిస్తే దాని సౌష్ఠవాల సమూహాన్ని డై హెడ్రల్ సమూహము D_4 (అష్టక సమూహము D_4 (Octic Group D_4)) అని అంటాము. పరిభ్రమణాలకు ρ_i లను, భుజాల సమద్విఖండన రేఖల దృష్ట్యా దర్పణ ప్రతి బింబణాలకు μ_i లను, వికర్ణ చలనాలకు δ_i లను ఉపయోగించి D_4 సమూహము యొక్క గుణకార పట్టిక దిగువనీయబడినది. ఇక్కడ

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

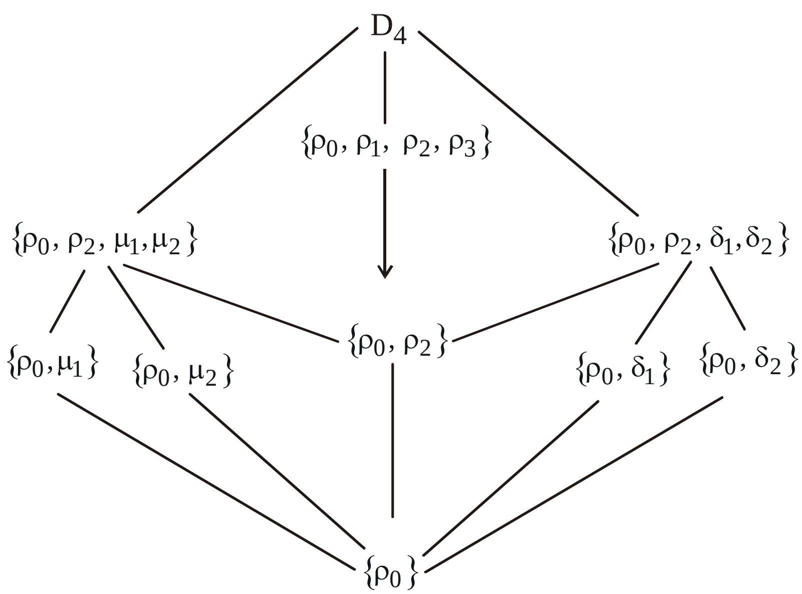
	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_0	δ_2	δ_1	μ_1	μ_2
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_1	δ_2	δ_1
ρ_3	ρ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2	δ_1	δ_2	μ_2	μ_1
μ_1	μ_1	δ_1	μ_2	δ_2	ρ_0	ρ_2	ρ_1	ρ_3
μ_2	μ_2	δ_2	μ_1	δ_1	ρ_2	ρ_0	ρ_3	ρ_1
δ_1	δ_1	μ_2	δ_2	μ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_0	ρ_2
δ_2	δ_2	μ_1	δ_1	μ_2	ρ_1	ρ_3	ρ_2	ρ_0

ప్రధాన కర్ణం దృష్ట్యా పట్టిక సౌష్ఠవం కాదని గమనించవచ్చును. కనుక D_4 ఎబీలియన్ సమూహం కాదు.

D_4 యొక్క ఉప సమూహాలు $\{\rho_0\}, \{\rho_0, \mu_1\}, \{\rho_0, \mu_2\}, \{\rho_0, \rho_2\}, \{\rho_0, \delta_1\}, \{\rho_0, \delta_2\},$

$\{\rho_0, \rho_2, \mu_1, \mu_2\}, \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3\}$, D_4లు.

ఈ ఉప సమూహాల మధ్య ఉప సమితి సంబంధాలను దిగువ నీయబడిన జాలక పటం తెలియజేస్తుంది.



10.4.12 ఉదాహరణ :- S_3, లో

(i) $\rho_1^2 = \rho_2, \rho_1^3 = \rho_0$ కనుక $\langle \rho_1 \rangle = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2\}$

(ii) $\rho_2^2 = \rho_1, \rho_2^3 = \rho_0$ కనుక $\langle \rho_2 \rangle = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2\}$

(iii) $\mu_1^2 = \rho_0$ కనుక $\langle \mu_1 \rangle = \{\rho_0, \mu_1\}$

(iv) $\mu_2^2 = \rho_0$ కనుక $\langle \mu_2 \rangle = \{\rho_0, \mu_2\}$

(v) $\mu_3^2 = \rho_0$ కనుక $\langle \mu_3 \rangle = \{\rho_0, \mu_3\}$

10.4.13 SAQ :- S_5 లో $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ చే జనితమైన చక్రీయ ఉప సమూహం యొక్క గుణకార పట్టికను వ్రాయండి.

ఇపుడు ప్రతి శుద్ధోప సమూహము ఎబీలియన్ అయ్యేటట్లుగా ఒక ఎబీలియన్ కాని సమూహానికి ఒక ఉదాహరణను చూద్దాం.

10.4.14 ఉదాహరణ :- S_3 ఎబీలియన్ కాని సమూహమని మనకు తెలియును. $\{\rho_0\}, \{\rho_0, \rho_1, \rho_2\}, \{\rho_0, \mu_1\}, \{\rho_0, \mu_2\}$, $\{\rho_0, \mu_3\}$ లు మాత్రమే S_3కు శుద్ధోప సమూహాలు. ఈ శుద్ధోప సమూహాలన్నీ ఎబీలియన్ అవుతాయి.

10.4.15 ఉదాహరణ : $n \geq 3$ అయితే S_n ఎబీలియన్ కాదు.

ఉపపత్తి :- $n \geq 3$ కనుక

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots\cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots\cdots & n & 1 \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots\cdots & n-1 & n \\ 2 & 1 & 3 & 4 & \cdots\cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$$ గా తీసుకొంటే

$f, g \in S_n$.

$$fg = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots\cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 4 & 5 & \cdots\cdots & n & 2 \end{pmatrix}$$

$$gf = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots\cdots & n-1 & n \\ 3 & 2 & 4 & 5 & \cdots\cdots & n & 1 \end{pmatrix}$$

$fg \neq gf$.

కనుక $n \geq 3$ కు S_n ఎబీలియన్ కాదు.

10.5 కక్ష్యలు, ఆవృత్తాలు :-

10.5.1 నిర్వచనం :- A అశూన్య సమితి $\sigma \in S_A$, $a \in A$ అనుకొనుము. $\theta_\sigma(a) = \{a\sigma^n / n \in Z\}$ను σ క్రింద a యొక్క కక్ష్య అంటాము.

10.5.2 ఉదాహరణ :- S_8లో $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 6 & 8 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ అనుకొనుము.

$\theta_\sigma(1) = \{1, 2, 4\}$, $\theta_\sigma(2) = \{2,4,1\}$

$\theta_\sigma(3) = \{3\}$, $\theta_\sigma(4) = \{4,1,2\}$, $\theta_\sigma(5) = \{5,6,8,7\}$

$\theta_\sigma(6)=\{6,8,7,5\}$, $\theta_\sigma(7)=\{7,5,6,8\}$, $\theta_\sigma(8)=\{8,7,5,6\}$

$\theta_\sigma(1)=\theta_\sigma(2)=\theta_\sigma(4)$, $\theta_\sigma(5)=\theta_\sigma(6)=\theta_\sigma(7)=\theta_\sigma(8)$ అని గమనించండి.

10.5.3 సహాయ సిద్ధాంతము :- A అశూన్య సమితి, $\sigma \in S_A$ అనుకొనుము. σ క్రింద ఏ రెండు కక్ష్యలయినా వియుక్తాలు లేక సమానము అవుతాయి.

ఉపపత్తి :- $c \in \theta_\sigma(a) \cap \theta_\sigma(b)$ అనుకొనుము. అపుడు

$c = a\sigma^n$, $c = b\sigma^m$ అయ్యేటట్లు Z లో m, n లు ఉంటాయి.

$x \in \theta_\sigma(a) \Rightarrow x = a\sigma^{n_1}$ అయ్యేటట్లు Z లో n_1 ఉంటుంది.

$$= c\sigma^{-n}\sigma^{n_1} = c\sigma^{-n+n_1}$$

$$= b\sigma^m \sigma^{-n+n_1} = b\sigma^{m-n+n_1},\ m-n+n_1 \in Z$$

కనుక $x \in \theta_\sigma(b)$

$$\theta_\sigma(a) \subseteq \theta_\sigma(b)$$

ఇదే విధంగా $\theta_\sigma(b) \subseteq \theta_\sigma(a)$ అని చూడవచ్చు.

$$\therefore \theta_\sigma(a) = \theta_\sigma(b)$$

10.5.4 నిర్వచనం :- A అనేది ఒక అశూన్య సమితి, $\sigma \in S_A$ అనుకొనుము. A కు $B=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ అనే ఉప సమితి, $a_1\sigma = a_2$, $a_2\sigma = a_3, \cdots, a_{n-1}\sigma = a_n$, $a_n\sigma = a_1$, $A \setminus B$ లోని అన్ని x లకు $x\sigma = x$ అయ్యేటట్లుగా ఉంటే σ ను n పొడవు (దైర్ఘ్యం లేక నిడివి) గల ఆవృత్తం అంటాము.

$\sigma = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ అని వ్రాస్తాము.

10.5.5 నిర్వచనం :- A అశూన్య సమితి, $B_1 = \{a_1, \cdots, a_n\}$, $B_2 = \{b_1, \cdots, b_m\}$ లు A కు ఉప సమితిలు, $B_1 \cap B_2 = \phi$ అయితే $\sigma_1 = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\sigma_2 = (b_1, b_2, \cdots, b_m)$ ఆ వృత్తాలు వియుక్త ఆవృత్తాలని అంటాము.

10.5.6 సహాయ సిద్ధాంతము :- వియుక్త ఆవృత్తాలు వినిమయ న్యాయాన్ని పాటిస్తాయి.

ఉపపత్తి :- $B_1 = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, $B_2 = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$ లు A కు ఉప సమితులు $B_1 \cap B_2 = \phi$ అనుకొనుము.

$\sigma_1 = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\sigma_2 = (b_1, b_2, \cdots, b_m)$ అనుకొనుము.

$$a_i\ \sigma_1\sigma_2 = (a_i\,\sigma_1)\sigma_2 = \begin{cases} a_{i+1}\sigma_2 & , \quad i<n \text{ అయితే} \\ a_1\sigma_2 & , \quad i=n \text{ అయితే} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} a_{i+1} & , \quad i<n \text{ అయితే} \\ a_1 & , \quad i=n \text{ అయితే} \end{cases}$$

$$a_i\ \sigma_2\ \sigma_1 = a_i\ \sigma_1 = \begin{cases} a_{i+1} & , \quad i<n \text{ అయితే} \\ a_1 & , \quad i=n \text{ అయితే} \end{cases}$$

కనుక $1 \le i \le n$ కు $a_i\,\sigma_2\ \sigma_1 = a_i\ \sigma_1\ \sigma_2$

ఇదే విధంగా $1 \le j \le m$ కు

$b_j\sigma_1\sigma_2 = b_j\sigma_2\sigma_1$ అని చూడవచ్చు.

$x \in A \setminus (B_1 \cup B_2)$ అయితే

$$x\sigma_1\sigma_2 = (x\sigma_1)\ \sigma_2 = x\sigma_2 = x = (x\ \sigma_2)\ \sigma_1 = x\ (\sigma_2\ \sigma_1)$$

కనుక $a(\sigma_1\sigma_2) = a(\sigma_2\sigma_1)\ \forall\ a \in A$ అవుతుంది. అంటే

$$\sigma_1\ \sigma_2 = \sigma_2\,\sigma_1$$

10.5.7 గమనిక :- $\sigma = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ అయితే అన్ని $1 \le i \le n$ కు $\sigma = (a_i, a_{i+1}, \cdots a_n, a_1, a_2, \cdots, a_{i-1})$ అవుతుంది.

10.5.8 ఉదాహరణ :- యాదృచ్ఛిక ఆవృత్తాలు వినిమయం చెందనవసరం లేదు.

$$\sigma = (1,\ 4,\ 5,\ 6),\ \mu = (2,\ 1,\ 5) \in S_6$$

$$\sigma\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mu\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ఇక్కడ $\sigma\mu \ne \mu\sigma$ అవుతున్నది.

10.5.9 సహాయ సిద్ధాంతము :- A పరిమిత సమితి, $\sigma \in S_A$, $x \in A$ అనుకొనుము. అపుడు

$$\theta_\sigma(x) = \left\{x = x\sigma^0,\ x\sigma,\ x\sigma^2,\ \cdots\cdots,\ x\sigma^{\ell-1}\right\}$$

అయ్యేటట్లుగా ఒక పూర్ణాంకం $\ell \geq 0$ ఉంటుంది.

ఉపపత్తి :- $x\sigma = x$ అయితే $x = x\sigma^{-1}$ అవుతుంది.

కనుక $x\sigma^n = x \ \forall\ n \in Z$ అవుతుంది.

$\therefore\ \theta_\sigma(x) = \{x\}$

$x \neq x\sigma$ అనుకొనుము.

$X = \left\{x, x\sigma,\ x\sigma^2, \cdots x\sigma^k, \cdots\cdots\cdots\right\}$ అనుకొనుము.

$X \subseteq A$, A పరిమిత సమితి. కనుక X పరిమిత సమితి.

కనుక $x\sigma^n = x\sigma^m$ అయ్యేటట్లు ధన పూర్ణాంకాలు $m \neq n$ లు ఉంటాయి. మనం $m > n$ అనుకోవచ్చును.

$\ell = m - n$ అనుకొనుము.

$x\sigma^n = x\sigma^m \Rightarrow x\sigma^{n-m} = x\sigma^\ell = x$

ఇంకా $x\sigma^{-\ell} = \left(x\sigma^\ell\right)\sigma^{-\ell} = x\sigma^\ell\ \sigma^{-\ell} = x$

మనం $x\sigma^\ell = x$ అయ్యేటట్లు ధన పూర్ణాంకము $\ell \geq 0$ ఉంటుంది.

$\forall\ t \in Z,\ x\sigma^{t\ell} = x$ అనేది స్పష్టము.

అపుడు $X = \left\{x,\ x\sigma,\ x\sigma^n, \cdots x\sigma^{\ell-1}\right\}$

$k \in Z \Rightarrow \exists t, r \in Z \ni k = t\ell + r,\ 0 \leq r < \ell$

$x\sigma^k = x\sigma^{t\ell+r} = x\sigma^{t\ell}\ \sigma^r = x\sigma^r \in \left\{x, x\sigma, \cdots, x\sigma^{\ell-1}\right\}$

$\therefore\ \theta_\sigma(x) = \left\{x,\ x\sigma,\ x\sigma^2, \cdots, x\sigma^{\ell-1}\right\}.$

10.5.10 సిద్ధాంతం :- పరిమిత సమితి A కి ఏ ప్రస్తారం σ ను అయినా ఒక పరిమిత సంఖ్యలో వియుక్త ఆవృత్తాల లబ్ధంగా వ్రాయవచ్చును.

ఉపపత్తి :- $\theta_\sigma(x_1), \theta_\sigma(x_2), \cdots, \theta_\sigma(x_\ell)$ లు θ క్రింద σ కు గల విభిన్న కక్ష్యలన్నీ అని అనుకొందాము.

అపుడు $A = \bigcup_{i=1}^{\ell} \theta_\sigma(x_i)$, $\theta_\sigma(x_i) \cap \theta_\sigma(x_j) = \phi$, $i \neq j$ కు

$\theta_\sigma(x_i) = \{x_i, x_i\sigma, \cdots x_i\sigma^{\ell_i}\}$, $1 \leq i \leq \ell$ కు అనుకొనుము.

$1 \leq i \leq \ell$ కు ఆవృత్తాలు $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_\ell$ లను $\sigma_i = (x_i, x_i\sigma, x_i\sigma^2, \cdots x_i\sigma^{\ell_i})$, గా నిర్వచింపుము.

$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_\ell$ అవుతుందని చూపుదాం.

$a \in A$ అనుకొనుము. $a \in \theta_\sigma(x_i)$ అయ్యేట్లు ఒకే ఒక x_i ఉంటుంది.

ఒక $0 \leq k \leq \ell_i$ కు $a = x_i\sigma^k$ అవుతుంది.

$$a\ \sigma_i = \begin{cases} x_i\,\sigma^{k+1}, & k < \ell_i \text{ అయితే} \\ x_i, & k = \ell_i \text{ అయితే} \end{cases}$$

$j \neq i$ కు $a \notin \theta_\sigma(x_i)$ కనుక $a\sigma_j = a$ అవుతుంది.

$$a\sigma_1\sigma_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \sigma_{i-1}\ \sigma_i\ \sigma_{i+1} \ldots\ldots\ldots\ldots \sigma_\ell = a\sigma_i = \begin{cases} x_i\sigma^{k+1}, & k < \ell_i \text{ కు} \\ x_i, & k = \ell_i \text{ కు} \end{cases}$$

$$a\sigma = x_i\,\sigma^k\sigma = \begin{cases} x_i\ \sigma^{k+1}, & k < \ell_i \\ x_i, & k = \ell_i \end{cases}$$

$\therefore a\sigma = a\sigma_1\sigma_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \sigma_\ell\ \forall\ a \in A$

కనుక $\sigma = \sigma_1\ \sigma_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \sigma_n$.

$i \neq j$ కు $\theta_\sigma(x_i) \cap \theta_\sigma(x_j) = \phi$ కనుక $\sigma = \sigma_1\ \sigma_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \sigma_n$ ఆ వృత్తాలు వియుక్తాలు.

1 పొడవుగా గల ఆవృత్తము A పై తత్సమ ప్రస్తారము కనుక, పై సిద్ధాంతాన్ని క్రింది విధంగా కూడ చెప్పవచ్చును.

10.5.10(a) సిద్ధాంతము :- కనీసం రెండు మూలకాలున్న పరిమిత సమితి A పై ప్రతి తత్సమేతర ప్రస్తారం σను, ఒక్కొక్క దాని పొడవు కనీసం 2 అయ్యేట్లు ఒక పరిమిత సంఖ్యలో వియుక్త ఆవృత్తాల లబ్ధంగా వ్రాయవచ్చును.

10.5.11 నిర్వచనము :- 2 పొడవుగా గల ఆవృత్తాన్ని వ్యత్యయం అంటాము.

10.5.12 ఉదాహరణ :- S_5 లో $\sigma=(3,4)$ ఒక వ్యత్యయము.

10.5.13 సిద్ధాంతము :- కనీసం రెండు మూలకాలున్న పరిమిత సమితి A పైని ఏ ప్రస్తారాన్నయినా వ్యత్యయాల లబ్ధంగా వ్రాయవచ్చు.

ఉపపత్తి :- తత్సమ ప్రస్తారం I ని $I=(x_1, x_2)(x_2, x_1)$ గా వ్రాయవచ్చును. సిద్ధాంతం 10.5.10(ఎ) వలన యీ సిద్ధాంతాన్ని పొడవు కనీసం రెండు వున్న ఆవృత్తాలకు ఋజువు చేస్తే సరిపోతుంది.

S_A లో $\sigma=(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)$, $n \geq 2$ అనుకొనుము.

$x \in A$ అనుకొనుము.

$x=a_n$ అయితే $x\sigma=a_1$

$x(a_1, a_2)(a_1, a_3)\cdots(a_1, a_n)=x(a_1, a_n)=a_1=x\sigma$ ---------- (1)

$x=a_i, i<n$ అయితే

$x\sigma=a_i\sigma=a_{i+1}$

$x(a_1, a_2)\cdots\cdots(a_1, a_i)(a_1, a_{i+1})\cdots\cdots(a_1, a_n)$

$=a_i(a_1, a_2)\cdots(a_1, a_i)(a_1, a_{i+1})\cdots(a_1, a_n)$

$=a_1(a_1, a_{i+1})\cdots\cdots(a_1, a_n)$

$=a_{i+1}(a_1, a_{i+2})\cdots\cdots(a_1, a_n)=a_{i+1}$ --------- (2)

$x \notin \{a_1, \cdots, a_n\}$ అయితే $x\sigma=x$ అవుతుంది.

$x(a_1, a_2)(a_1, a_3)\cdots\cdots(a_1, a_n)=x$ ------------ (3)

(1), (2), (3)ల నుండి

$\sigma=(a_1, a_2)(a_1, a_3)\cdots\cdots(a_1, a_n)$.

10.5.14 విధానము (Procedure) **:-** ఒక పరిమిత సమితి A పైని ప్రస్తారాన్ని వ్యత్యయాల లబ్ధంగా వ్రాయడానికి ఒక పద్ధతిని ఇపుడు సూచిస్తాము.

A లో కనీసం రెండు మూలకాలున్నాయనుకొందాం. $\sigma \in S_A$ అనుకొందాము. A లో యాదృచ్ఛికంగా ఒక మూలకం a_1 ను ఎంచుకొందాం.

$\theta_\sigma(a_1) = \left\{a_1, a_1\sigma, a_1\sigma^2, \cdots a_1\sigma^{\ell_1}\right\}$ అనుకొనుము.

$A \setminus \theta_\sigma(a_1)$లో ఒక యాదృచ్ఛిక మూలకం a_2 ను ఎంచుకొందాము.

$\theta_\sigma(a_2) = \left\{a_2, a_2\sigma, a_2\sigma^2, \cdots, a_2\sigma^{\ell_2}\right\}$ అనుకొనుము.

ఈ విధానాన్ని కొనసాగిస్తూ, అంతిమంగా

$A \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k-1} \theta_\sigma(a_i)$ లో a_k ను ఎంచుకొని $\theta_\sigma(a_k) = \left\{a_k, a_k\sigma, \ldots\ldots, a_k\sigma^{\ell k}\right\}$ అనుకొంటాము.

ఇంకా $A = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \theta_\sigma(a_i)$ అవుతుంది.

$\sigma_i = \left(a_i, a_i\sigma, \cdots, a_i\sigma^{\ell_i}\right), \ 1 \le i \le k$ అనుకొంటే

$\sigma = \sigma_1 \ \sigma_2 \cdots \sigma_k$ .... **(1)** అవుతుంది.

ప్రతి i కి, $\sigma_i = (a_i, a_i\sigma)\left(a_i, a_i\sigma^2\right)\cdots\cdots\left(a_i, a_i\sigma^{\ell_i}\right)$ను **(1)**లో ప్రతిక్షేపిస్తే σను వ్యత్యయాల లబ్ధంగా వ్రాయవచ్చును. ఏదైనా i కు $\theta_\sigma(a_i)$ లో ఒకే మూలకముంటే, అంటే σ_i యొక్క పొడవు 1 అయితే σ_i తత్సమ ప్రసారమవుతుంది. కనుక $\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \ldots\ldots, \sigma_n$ లో σ_i ను లుప్తం చేయవచ్చు.

10.5.15 ఉదాహరణ :- $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 6 & 3 & 7 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

$\theta_\sigma(1) = \{1,8\}, \theta_\sigma(2) = \{2\}, \theta_\sigma(3) = \{3,6,4\} \quad \theta_\sigma(5) = \{5,7\}.$

$\sigma_1 = (1,8), \ \sigma_2 = (3,6,4), \sigma_3 = (5, 7)$

$\sigma_2 = (3,6)\,(3, 4)$

$\sigma = \sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3 = (1, 8)\ (3, 6)\,(3, 4)\,(5, 7)$

10.5.16 ఉదాహరణ :- $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$\theta_\sigma(1) = \{1,3,4,7,8,6,5,2\}$

σ ఒక ఆవృత్తము

$$\sigma = (1, 3, 4, 7, 8, 6, 5, 2)$$

$$= (1, 3)(1, 4)(1, 7)(1, 8)(1, 6)(1, 5)(1, 2)$$

10.5.17 నిర్వచనము :- G ఒక సమూహము, $a \in G$, G లోని తత్సమ మూలకం e అనుకొనుము.

r పూర్ణాంకము, $r > 0$, $a^r = e$ అవుతూ

$0 < s < r$, s పూర్ణాంకమయితే $a^s \neq e$ అయితే

r ను a యొక్క తరగతి అంటాము.

e యొక్క తరగతి 1 అని గమనించండి.

10.5.18 సహాయ సిద్ధాంతము :- A పరిమిత సమితి. S_A లో n పొడవు గల ఆవృత్తం σ అయితే σ యొక్క తరగతి n అవుతుంది.

ఉపపత్తి :- $\sigma = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in S_A$ అనుకొనుము.

$x \in A$ అనుకొనుము.

అన్ని i లకు $x \neq a_i$ అయితే $x\sigma = x \Rightarrow x\sigma^n = x$ అవుతుంది ....(1)

$x = a_i$, $i \neq n$ అయితే

$a_i\sigma^n = a_i\sigma^{n-i}\sigma^i = a_n\sigma^i = a_1\sigma^{i-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots = a_i\sigma^{i-i} = a_i\sigma^0 = a_i$ .... (2)

$x = a_n$ అయితే $a_n\sigma^n = a_1\sigma^{n-1} = a_2\sigma^{n-2} = \cdots = a_n\sigma^{n-n} = a_n$ ----------- (3)

(1), (2), (3) ల నుండి σ^n తత్సమ ప్రస్తారము I కి సమానము.

$\sigma^n = I,$

k ధన పూర్ణాంకము, $k < n$ అయితే

$$a_1\sigma^k = a_2\sigma^{k-1} \cdots\cdots = a_{1+k} \in \{a_2,\ a_3, \cdots, a_n\}$$

కనుక $a_1\sigma^k \neq a_1$

కనుక $\sigma^k \neq I$

$\therefore \sigma$ యొక్క తరగతి n అవుతుంది.

10.5.19 సిద్ధాంతము :- రెండు వియుక్త ఆవృత్తాల లబ్ధం యొక్క తరగతి ఆ ఆవృత్తాల తరగతుల యొక్క కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజమవుతుంది.

ఉపపత్తి :- τ, μ లు వియుక్త ఆవృత్తాలు, $\sigma = \tau\mu$ అనుకొనుము. వియుక్త ఆవృత్తాలు వినిమయం చెందుతాయి. కనుక $\sigma^m = \tau^m \mu^m \ \forall\ m \in Z$

τ, μ లు వియుక్తాలు కనుక $a\tau \neq a$ అయితే $a\mu = a$ అవుతుంది.

అదే విధంగా $a\mu \neq a$ అయితే $a\tau = a$ అవుతుంది.

$\sigma^m = I \Leftrightarrow \tau^m = I, \mu^m = I$ అని చూపుము.

$\tau^m = I = \mu^m$ అయితే $\sigma^m = \tau^m \mu^m = II = I$ అవుతుంది.

$\sigma^m = I$ అనుకొందాము.

$$\Rightarrow \tau^m \mu^m = I$$

$$\Rightarrow \tau^m = \mu^{-m}$$

$\tau^m \neq I \Rightarrow \exists a \ni a\tau^m \neq a \cdot \Rightarrow a\tau \neq a$ .... (1)

$\tau^m = \mu^{-m}$ కనుక $a\mu^{-m} \neq a$

$\Rightarrow a \neq a\mu^m \Rightarrow a\mu \neq a$ .... (2)

$a\tau \neq a,\ a\mu \neq a$ అనేది విరుద్ధత.

కనుక $\tau^m = I$ అదే విధంగా $\mu^m = I$

$\therefore \sigma^m = I$ అనుకుంటే τ యొక్క తరగతి, μ యొక్క తరగతి m ను భాగిస్తాయి.

కనుక m, τ యొక్క మరియు μ యొక్క తరగతుల సామాన్య గుణిజము.

కావున σ యొక్క తరగతి τ మరియు μ యొక్క తరగతుల క.సా.గు. అవుతుంది.

10.5.19(a) **ఉప సిద్ధాంతము :-** పరిమిత సమితి A పైని ఏ ప్రస్తారం యొక్క తరగతి అయినా ఆ ప్రస్తారం యొక్క వియుక్త ఆవృత్తాల తరగతుల క.సా.గు. అవుతుంది.

ఉపపత్తి :- $\sigma \in S_A$, $\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \ldots\ldots, \sigma_r$, $\sigma_1, \sigma_2, \ldots\ldots, \sigma_r$ లు వియుక్త ఆవృత్తాలు అనుకొనుము.

సిద్ధాంతం 10.5.19లోని ఉపపత్తిని అనుకరించి ఫలితాన్ని రాబట్టవచ్చును.

10.5.20 ఉదాహరణ :- S_6లో $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ యొక్క తరగతిని కనుగొనుము.

$$\sigma = (1, 2, 3)(5, 6)$$

(1, 2, 3) యొక్క తరగతి 3. (5, 6) యొక్క తరగతి 2. కనుక σ యొక్క తరగతి $=$ క.సా.గు. $\{2,3\} = 6$.

10.5.21 SAQ :- $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$ యొక్క తరగతిని కనుగొనుము.

10.5.22 ఉదాహరణ :- S_8లో $\sigma = (1,3,5,7,6)$ అయితే $\sigma^{-1} = (1, 6, 7, 5, 3)$.

10.5.23 ఉదాహరణ :- S_A లో $\sigma = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ ఆవృత్తమైతే

$\sigma^{-1} = (a_1, a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2)$ కూడ ఆవృత్తమే.

కనుక σ యొక్క తరగతి $= \sigma^{-1}$ యొక్క తరగతి.

10.5.24 SAQ :- ఒక వ్యత్యయానికి విలోమం ఆ వ్యత్యయమేనని ఋజువు చేయుము.

10.6 సరి మరియు బేసి ప్రస్తారాలు :-

10.6.1 **సిద్ధాంతము :-** S_n లోని ఏ ప్రస్తారాన్నయినా ఒకేసారి సరి సంఖ్యలోను బేసి సంఖ్యలోను వ్యత్యయాల లబ్ధంగా వ్రాయలేము.

ఉపపత్తి :- తత్సమ ప్రస్తారం $I = (1\ 2)(2\ 1)$ సరి సంఖ్యలో గల వ్యత్యయాల లబ్ధం అవుతుంది.

$\tau_1, \tau_2, \ldots\ldots, \tau_k$ వ్యత్యయాలకు

$I = \tau_1, \tau_2, \ldots\ldots, \tau_k$ అవుతుందనుకొందాం ------ (1)

(1)లోని వ్యత్యయాలలో ఏదేని వ్యత్యయంలో ఉండే ఒక పూర్ణాంకం m ను తీసుకొందాము. ఎడమ నుండి కుడి వైపుకు లెక్కిస్తే m ఉండే ప్రత్యయాలలో మొదటిది τ_j అనుకొందాము.

$j = k$ అనుకొంటే, $\tau_1, \cdots \tau_{k-1}$లతో m ఉండదు. ఇంకా $m\tau_k \neq m$

అపుడు $m = mI = m(\tau_1 \cdots\cdots \tau_k) = m\tau_k$ కాని $m\tau_k \neq m$

కనుక $j = k$ అనుకొంటే $m\tau_k = m, m\tau_k \neq m$ అని వస్తుంది.

$\therefore j \neq k$

ఇపుడు $\tau_j \ \tau_{j+1}$ దిగువనీయబడిన నాలుగు రూపాలలో ఏదో ఒక రూపంలో ఉంటుంది.

$$\left.\begin{array}{l} (i) \quad (m, x)(m, x) = I \\ (ii) \ (m, x)(m, y) = (x, y)(m, x) \\ (iii) \ (m, x)\ (y, z) = (y, z)(m, x) \\ (iv) \ (m, x)(x, y) = (y, x)(m, y) \end{array}\right\} \text{----------- (2)}$$

(1)లో $\tau_j \tau_{j+1}$కు బదులుగా (2)లోని సరియైన దానిని ప్రతిక్షేపిస్తే (1)లోని ప్రత్యయాలలో $\tau_j \tau_{j+1}$ కు బదులుగా I రావడం గాని లేక m మొదటిసారిగా వచ్చే స్థానాన్ని ఒక మెట్టు కుడి వైపుకు మార్చడం గాని జరుగుతుంది. ఈ ప్రతిక్షేపణలను కొనసాగిస్తూ పోతే అంతిమంగా (1)లో m తొలగించవచ్చును. ($j \neq k$ కావడం వలన ప్రతిక్షేపణలను కొనసాగిస్తూ పోతే అంతిమంగా (2)లో (1)వ పరిస్థితి ఉత్పన్నమయి తద్వారా m తొలగింపబడుతుంది.) అపుడు (1)లోని రెండు వ్యత్యయాల స్థానంలో I వస్తుంది. ఈ పద్ధతిని (1)లోని మిగిలిన వ్యత్యయాలకు కూడ అనువర్తిస్తే (1)లోని కుడి చేతివైపు II..............I రూపంలోకి వస్తుంది. ప్రతి ప్రతిక్షేపణలోను రెండు వ్యత్యయాలను తొలగించడం కాని, లేక వ్యత్యయాల సంఖ్య స్థిరంగా వుండడం గాని జరుగుతున్నది. కావున k సరి సంఖ్య అవుతుంది.

$\sigma \in S_A$, $\sigma = \tau_1 \ \tau_2 \cdots \tau_r = \tau_1' \ \tau_2' \cdots\cdots \tau_s'$, $\tau_1, \tau_2, \tau_r, \tau_1', \tau_2' \ldots\ldots \tau_s'$ లు వ్యత్యయాలనుకొందాము.

అపుడు

$$I = \sigma\sigma^{-1} = T_1 T_2 \cdots\cdots\cdots\cdots T_r \ T_s^{-1} \ T_{s-1}^{-1} \cdots\cdots\cdots\cdots T_1^{-1}$$

$$= T_1 T_2 \cdots\cdots\cdots\cdots T_r \ T_s \ T_{s-1} \cdots\cdots\cdots\cdots T_1$$

కనుక $r + s$ సరి సంఖ్య అవుతుంది.

కనుక r, s లు రెండూ సరి సంఖ్యలు గాని లేక రెండూ బేసి సంఖ్యలు గాని అవుతాయి.

10.6.2 నిర్వచనం :- $\sigma \in S_n$ అనుకొనుము. σ ను సరి సంఖ్యలో గల వ్యత్యయాల లబ్ధంగా వ్రాయగలిగితే σ ను సరి ప్రస్తారము అంటాము. σ ను బేసి సంఖ్యలో గల వ్యత్యయాల లబ్ధంగా వ్రాయగలిగితే σ ను బేసి ప్రస్తారము అంటాము.

10.6.3 సహాయ సిద్ధాంతము :- $n \geq 2$ S_n లోని సరి ప్రస్తారాల సమితిని A_n గాను బేసి ప్రస్తారాల సమితిని B_n గాను అనుకొంటే A_n, B_n లలో ప్రతి దానిలోని ప్రస్తారాల సంఖ్య $\dfrac{n!}{2}$ అవుతుంది.

ఉపపత్తి :- S_n లోనిమూలకాల సంఖ్య $n!$ అని మనకు తెలుసు.

$\tau = (1,\ 2)$ అనుకొనుము.

ప్రమేయం $f : A_n \to B_n$ ను $\sigma f = \tau\sigma$ గా నిర్వచింపుము. σ సరి ప్రస్తారం అందువలన σf బేసి ప్రస్తారమవుతుంది.

$$\sigma_1 f = \sigma_2 f \Rightarrow \tau\sigma_1 = \tau\sigma_2$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2 \qquad (S_n \text{ లో కొట్టివేత న్యాయం వలన})$$

కాబట్టి f అన్వేకము.

$\rho \in B_n \Rightarrow \sigma = \tau^{-1}\rho \in A_n,\ \sigma f = \tau\tau^{-1}\rho = I\rho = \rho$ అవుతుంది.

కనుక f సంగ్రస్తము.

f ద్విగుణ ప్రమేయము. కనుక $|A_n| = |B_n|$

$$|A_n| + |B_n| = n!$$

$$\therefore |A_n| = |B_n| = \frac{n!}{2}$$

10.6.4 సిద్ధాంతము :- $n \geq 2$, S_n లోని సరిప్రస్తారాల సమితి A_n అనుకొనుము. అపుడు S_n కు A_n ఉప సమూహమవుతుంది.

ఉపపత్తి :- $I = (1\ 2)\,(2\ 1) \Rightarrow I \in A_n$.

$\sigma_1, \sigma_2 \in A_n$ అయితే

$\sigma_1 = \tau_1\ \tau_2 \cdots \tau_k,\ \sigma_2 = \tau_1'\ \tau_2' \cdots \tau_\ell'$

$\tau_1, \tau_2, \ldots\ldots, \tau_k, \tau_1', \tau_2', \ldots\ldots, \tau_\ell'$ వ్యత్యయాలనుకొందాము. ఇక్కడ k, ℓ లు సరి సంఖ్యలు.

$\sigma_1\sigma_2 = T_1T_2 \ldots\ldots T_k T_1^1 T_2^1 \ldots\ldots T_e^1$ సరి సంఖ్య.

$\therefore \sigma_1\ \sigma_2 \in A_n$

$\sigma_1^{-1} = (\tau_1 \tau_2 \cdots \tau_k)^{-1} = \tau_k^{-1} \tau_{k-1}^{-1} \cdots \tau_1^{-1} = \tau_k \tau_{k-1} \cdots \tau_1 \in A_n$

$\therefore$ S_n కు A_n ఉప సమూహము.

10.6.5 నిర్వచనము :- S_n లోని సరి ప్రస్తారాల సమూహం A_n ను సంకేతాలలో ఏకాంతర సమూహము అంటాము.

10.6.6 ఉదాహరణ :- $A = \{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8\}$ అనుకొనుము.

(i) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 6 & 3 & 7 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

$\sigma = (1, 8)(3, 6, 4)(5, 7)$

$= (1, 8)(3, 6)(3, 4)(5, 7)$

$\therefore \sigma$ సరి ప్రస్తారము.

(ii) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$

$\sigma = (1, 3, 4, 7, 8, 6, 5, 2)$

$= (1,3)(1,4)(1,7)(1,8)(1,6)(1,5)(1,2)$

$\therefore$ σ బేసి ప్రస్తారము.

10.6.7 SAQ :- $n \ge 2$, S_n లో σ ఒక బేసి ప్రస్తారమయితే S_n లో ప్రతి బేసి ప్రస్తారం σ మరియు A_n లోని ఒక ప్రస్తారం యొక్క లబ్ధమని చూపండి.

10.6.8 ఉదాహరణ :- S_n లో $\sigma = (a_1, a_2, \cdots, a_{2k+1})$ అయితే σ^2 ఆవృత్తమవుతుంది.

ఉపపత్తి :- $\sigma^2 = (a_1, a_2, \cdots, a_{2k+1})(a_1, a_2, \cdots, a_{2k+1})$

$= (a_1, a_3, a_5, \cdots, a_{2k-1}, a_{2k+1}, a_2, a_4, \cdots a_{2k-2}, a_{2k})$

కనుక σ^2 ఆవృత్తము.

10.6.9 SAQ :- S_n లో $\sigma = (a_1, a_2, \cdots, a_{2k})$ యొక్క పొడవు సరి సంఖ్య అయితే σ^2 ఆవృత్తం కాదని చూపుము.

10.6.10 సిద్ధాంతము :- ఆవృత్తం σ యొక్క పొడవు n అనుకొందాము. σ^r ఆవృత్తం కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమం $n \mid r$ లేక $(n, r) = 1$.

ఉపపత్తి :- A) $n \mid r$ అనుకొందాము.

$$\sigma^r = \sigma^{nk}, \; r = nk$$

$$= \left(\sigma^n\right)^k = I^k = I$$

ఈ సందర్భములో σ^r పొడవు 1గా గల ఆవృత్తము $(n, r) = 1$ అనుకొనుము.

అపుడు $n \nmid r$ కనుక $\sigma^r \neq I$

$\therefore \; \exists \, a \ni a\sigma^r \neq a$

$\therefore \sigma = \left(a, a\sigma, a\sigma^2, \cdots\cdots, a\sigma^{n-1}\right), \; \theta_\sigma(a) = \left\{a, a\sigma, \cdots\cdots, a\sigma^{n-1}\right\}$

$a\sigma^n = a$ అయ్యేటట్లు కనిష్ఠము.

$a\left(\sigma^r\right)^n = a\left(\sigma^n\right)^r = a(I)^r = aI = a$

$a\left(\sigma^r\right)^k = a$ అయితే $a\,\sigma^{rK} = a$ కనుక $n \mid (r, k)$ అవుతుంది.

$(r, n) = 1$ నుండి $n \mid k$ అవుతుంది.

$\therefore a\left(\sigma^r\right)^n = a$ అయ్యేటట్లుగా n కనిష్ఠము.

$$\therefore \theta_{\sigma^r}(a) = \left\{a, a\sigma^r, a\left(\sigma^r\right)^2, \cdots\cdots, a\left(\sigma^r\right)^{n-1}\right\}$$

$\theta_{\sigma^r}(a) \subseteq \theta_\sigma(a)$ నుండి $\theta_{\sigma^r}(a) = \theta_\sigma(a)$ అవుతుంది.

$\theta_{\sigma^r}(a)$లో b లేకపోతే $\theta_\sigma(a)$లో b ఉండదు.

$$b\sigma = b \Rightarrow b\sigma^r = b$$

$$\therefore \sigma^r = \left(a, a\sigma^r, a\left(\sigma^r\right)^2, \cdots\cdots a\left(\sigma^r\right)^{n-1}\right)$$

కనుక σ^r ఆవృత్తము.

B) విపర్యయంగా σ^r ఆవృత్తమనుకొందాము.

$\sigma^r = I$ అయితే $n | r$.

$\sigma^r \neq I$ అనుకొందాము. అపుడు $n \nmid r$.

$\exists\, a \ni a\sigma^r \neq a$ యీ a కు $a\sigma \neq a$

σ^r యొక్క పొడవు m అనుకొందాము.

$\sigma = \left(a, a\sigma, \cdots\cdots, a\sigma^{n-1}\right)$

$\sigma^r = \left(a, a\sigma^r, \cdots\cdots, a\left(\sigma^r\right)^{m-1}\right)$

$\therefore\ \theta_{\sigma^r}(a) \subseteq \theta_\sigma(a) \Rightarrow m \leq n$.

$\theta_{\sigma^r}(a) \neq \theta_\sigma(a)$ అనుకొంటే $\exists b \in \theta_\sigma(a) \setminus \theta_{\sigma^r}(a)$

యీ bకు $b\sigma \neq b$, $b\sigma^r = b$ అవుతుంది.

అపుడు $\sigma = \left(b, b\sigma, \cdots\cdots, b\sigma^{n-1}\right)$, $b\sigma^n = b$ అయ్యేటట్లుగా n కనిష్ఠ పూర్ణాంకము.

కాని $b\sigma^r = b \Rightarrow n | r$ ఇది విరుద్ధత.

$\therefore m = n$

$$\theta_{\sigma^r}(a) = \left\{a, a\sigma^r, \cdots\cdots, a\left(\sigma^r\right)^{n-1}\right\}$$
$$\sigma^r = \left\{\left(a, a\sigma^r, \cdots\cdots, a\left(\sigma^r\right)^{n-1}\right)\right\}$$

$\therefore \sigma^r$ యొక్క తరగతి n అవుతుంది.

కనుక $(n, r) = 1$

10.7 చక్రీయ సమూహాలు :-

G సమూహము, $a \in G$, అయితే $H = \left\{a^n / n \in Z\right\} = \langle a \rangle$, Gకు ఉప సమూహమవుతుందని, H ను aతో జనితమైన G యొక్క చక్రీయ ఉప సమూహము అంటామని మనకు తెలుసు. ఇంకా ఏదో ఒక $a \in G$,కు $G = \langle a \rangle$ అయితే G ని చక్రీయ సమూహమంటాము. a ని G కు జనక మూలకం అంటాము.

10.7.1 సిద్ధాంతము :- ప్రతి చక్రీయ సమూహము ఎబీలియన్ అవుతుంది.

ఉపపత్తి :- $G = \langle a \rangle$ చక్రీయ సమూహమనుకొనుము.

$$x, y \in G \Rightarrow \ \exists\ n,\ m \in Z \ni x = a^n, y = a^m$$

$$xy = a^n\ a^m = a^{n+m} = a^{m+n} = a^m\ a^n = yx.$$

$\therefore G = \langle a \rangle$ ఎబీలియన్ సమూహము.

10.7.2 ఉదాహరణ :- $Z_n = \{0,1,2,\cdots,n-1\}$ లో n మాపంగా సంకలనం $+_n$ అనుకొనుము. అపుడు $(Z_n, +_n)$ ఒక చక్రీయ సమూహము.

ఉపపత్తి :- $s, t \in Z_n$ అనుకొనుము.

$s+t$ ను n చే భాగిస్తే వచ్చు శేషము $s +_n t$.

కనుక $\forall\ s, t \in Z_n, \quad s +_n t \in Z_n$

$x, y, z \in Z_n$ అనుకొనుము.

$x +_n y = r_1, \quad (x +_n y) +_n z = r_1 +_n z = s_1$ అనుకొనుము.

$\exists\ p_1 \in Z \ni \qquad x + y = np_1 + r_1$

$\exists\ p_2 \in Z \ni \qquad r_1 + Z = np_2 + s_1$

$x + y + z = np_1 + r_1 + z = np_1 + np_2 + s_1,\ 0 \le s_1 < n$ ------------ (1)

$y +_n z = r_2, \quad x +_n (Y +_n Z) = s_2 = x +_n r_2$ అనుకొనుము.

$\exists q_1, q_2 \in Z \ni Y + Z = nq_1 + r_2,\ x + r_2 = nq_2 + s_2$

$$x + y + z = x + nq_1 + r_2 = nq_1 + x + r_2$$

$$= nq_1 + nq_2 + s_2$$

$$= n(q_1 + q_2) + s_2,\ 0 \le s_2 < n \ \text{..................} \ (2)$$

(1), (2)ల నుండి $s_1 = s_2$ అవుతుంది.

$$\therefore (x +_n y) +_n z = x +_n (y +_n z)$$

తత్సమ మూలకం :- $0 +_n x = x +_n 0 = x \ \forall \ x \in Z_n$.

కనుక Z_n లో తత్సమ మూలకం 0

విలోమం :- $x \in Z_n \Rightarrow n - x \in Z_n$

$x +_n (n - x) = 0$

కనుక $(Z_n, +_n)$ ఒక సమూహము.

ఇంకా $\langle Z_n, +_n \rangle$లో $\langle 1 \rangle = Z_n$

కనుక $\langle Z_n, +_n \rangle$ ఒక చక్రీయ సమూహము.

10.7.3 ఉదాహరణ :- $\langle Z, + \rangle$ చక్రీయ సమూహము. ఇందులో 1, -1లు జనక మూలకాలు.

10.7.4 నిర్వచనం :- G ఒక సమూహము, $a \in G, H = \langle a \rangle$ అనుకొనుము. H పరిమితమైతే $|H| = |\langle a \rangle|$తో H లోని మూలకాల సంఖ్యను సూచిస్తాము. $|H| = |\langle a \rangle|$ పరిమితమైతే a ని పరిమిత తరగతి గల మూలకం అని, $|\langle a \rangle|$ ని a యొక్క తరగతిగా నిర్వచిస్తాము. $\langle a \rangle$ అపరిమిత సమూహమైతే a ని అపరిమిత తరగతి గల మూలకం అంటాము.

10.7.5 S.A.Q. :- $\langle Z_6, +_6 \rangle$లో 2, 3 ల తరగతులను కనుగొనుము.

10.7.6 ఉదాహరణ :- $\langle Z_9, +_9 \rangle$ లో 2, 3, 6 మరియు 5ల తరగతులను కనుగొనుము.

సాధన :- $\langle 3 \rangle = \{0, 3, 6\}$

$\langle 6 \rangle = \{0, 6, 3\}$

$\langle 5 \rangle = \{0, 5, 4\}$

$\langle 2 \rangle = \{0, 2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7\} = z_9$

2 యొక్క తరగతి 9 అవుతుంది. 3, 6, 5ల తరగతి 3 అవుతుంది.

10.7.7 సిద్ధాంతము :- ఒక చక్రీయ సమూహం యొక్క ప్రతి ఉప సమూహము చక్రీయమవుతుంది.

ఉపపత్తి :- $G = \langle a \rangle$ ఒక చక్రీయ సమూహము, G కి H ఉప సమూహము అనుకొందాము. G లోని తత్సమ మూలకం e అనుకొందాము.

$H = \{e\}$ అయితే $H = \langle e \rangle$

$H \neq \{e\}$ అనుకొందాము.

$e \neq x \in H$ అనుకొందాము. అపుడు $x \in G$ కనుక $\exists 0 \neq n \in Z$

$\ni x = a^n$

$x^{-1} = a^{-n} \in H$

కనుక $b = a^n \in H$ అయ్యేటట్లుగా కనిష్ఠ ధన పూర్ణాంకము $0 \neq n$ .... (1) ఉంటుంది.

ఇపుడు $H = \langle b \rangle$ అని చూపుదాం.

$y \in H \Rightarrow y \in G \Rightarrow \exists\, m \in Z \ni y = a^m$

$m = tn + r,\ 0 \leq r < n$ అయ్యేటట్లు Z లో ఏకైక t, r లు ఉంటాయి.

$$y = a^m = a^{tn+r} = (a^n)^t a^r \Rightarrow y(a^n)^{-t} = a^r \in H$$

$$(\because\ y, a^n \in H)$$

$a^r \in H,\ 0 \leq r < n,\ n$ (1) నుండి $r = 0$ అవుతుంది.

$\therefore y = (a^n)^t a^0 = b^t \cdot e = b^t \in \langle b \rangle$

కనుక $H \subseteq \langle b \rangle$ .... (2)

$b \in H$ కనుక $\langle b \rangle \subseteq H$ .... (3)

(2), (3)ల నుండి $H = \langle b \rangle$.

10.7.8 సిద్ధాంతము :- $G = \langle a \rangle = \{a^n / n \in Z\}$ ఒక చక్రీయ సమూహము. ఏదేని $k, \ell \in Z$, $k \neq \ell$ కు $a^k = a^\ell$ అయితే $G = \{e = a^0, a^1, a^2, \cdots a^{m-1}\}$ అయ్యేట్లు ధన పూర్ణాంకం m ఉంటుంది. కనుక G అపరిమిత సమూహామైతే $k \neq \ell$, $k, \ell \in Z$ లకు $a^k \neq a^\ell$ అవుతుంది.

ఉపపత్తి :- $a^k = a^\ell \Rightarrow a^{k-\ell} = a^{\ell-k} = e$ కనుక $a^m = e$ అయ్యేట్లు కనిష్ఠ పూర్ణాంకం m వుంటుంది.

$x \in G \Rightarrow \exists\ n \in Z \ni x = a^n$

$\exists q, r \in Z \ni n = mq + r,\ 0 \leq r < m$

$x = a^n = a^{mq+r} = (a^m)^q a^r = e^q a^r = ea^r = a^r$

కనుక $x \in \{e = a^0, a^1, a^2, \cdots, a^{m-1}\}$

ఇపుడు $e = a^0, a^1, a^2, \cdots a^{m-1}$ లు అన్నీ విభిన్నాలని చూపుదాం.

$0 \le i < j \le m-1, \quad a^i = a^j$ అనుకొంటే,

$m > j - i > 0, \ a^{j-i} = a^j a^{-i} = e$.

ఇది $a^m = e$ అవుతూ m కనిష్ఠం అనే దానికి విరుద్ధత.

కనుక $e = a^0, a^1, a^2, \cdots a^{m-1}$ లు విభిన్నాలయి,

$G = \{e, a, a^2, \cdots, a^{m-1}\}$ అవుతుంది.

10.7.9 గమనిక :- సిద్ధాంతం 10.7.8 కారణంగా మనము యీ క్రింది వాటిని గమనించవచ్చు.

A. $G = \langle a \rangle$ అపరిమిత సమూహమయితే $a^n \ne a^m$ & $m \ne n$. ఇంకా $a^{n+m} = a^n a^m$

a^n ను n తోను $a^n a^m$ ను $n+m$ తోను గుర్తిస్తే $G, \langle z, + \rangle$ లు వాటి మూలకాల పేర్లు, వాటి పైని పరిక్రియల పేర్లు మినహా, ఒకే పోలికలో ఉంటాయని గమనించవచ్చును. కనుక $G, \langle z, + \rangle$ సమూహాలు నిర్మాణపరంగా ఒకే సమూహాలని గమనించవచ్చును.

B. $G = \langle a \rangle = \{e = a^0, a^1, a^2, \cdots a^{m-1}\}$ అయితే $\{0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots, m-1\}$ ల లోని ఏ i, j ల కైనా

$a^i a^j = a^{i+j} = a^r, \ i \underset{md}{+} = r, \ 0 \le r < m$ అవుతుంది.

కనుక $a^i a^j = a^{i +_m j}$

a^i ను i తోను $a^i a^j$ ను $i +_m j$ తోను గుర్తిస్తే, $G = \langle a \rangle$, $\langle Z_m, +_m \rangle$ సమూహాలు వాటి మూలకాల, పరిక్రియల పేర్లు మినహా ఒకే పోలికలో ఉంటాయి. కనుక G, $\langle Z_m, +_m \rangle$ సమూహాలు నిర్మాణపరంగా ఒకే సమూహాలని చూడవచ్చును.

10.7.10 ఉదాహరణ :- $\langle Z, + \rangle$, $\langle 3Z, + \rangle$ లు వరుసగా 1, 3లచే జనితమైన చక్రీయ సమూహాలు. $n \in Z$ ను $3n \in 3Z$ గా గుర్తిస్తే $3(n+m) = 3n + 3m$ నుండి Z లోని $n+m$ ను, $3Z$ లోని $3n + 3m$ చే గుర్తించవచ్చును. కనుక $\langle Z, + \rangle$, $\langle 3Z, + \rangle$ లు నిర్మాణపరంగా ఒకే సమూహాలు.

10.7.11 SAQ :-

(a) వాటిలోని మూలకాల సంఖ్య ఒకటే అయిన ఏ రెండు పరిమిత చక్రీయ సమూహాలయినా నిర్మాణపరంగా ఒక్కటేనని చూపుము.

(b) ఏ రెండు అపరిమిత చక్రీయ సమూహాలయినా నిర్మాణపరంగా ఒక్కటే అని చూపండి.

10.8 పరిమిత చక్రీయ సమూహాల జనక మూలకాలు :-

10.8.1 సిద్ధాంతము :- సమూహం G లో a ఒక n వ తరగతి మూలకము, $a^m = e$ అయితే m ను n భాగిస్తుంది.

ఉపపత్తి :- భాగాహార విశేష విధి నుండి

$m = nq + r,\ 0 \le r < n$ అయ్యేటట్లు Z లో ఏకైక q, r లు ఉంటాయి.

$$e = a^m = a^{nq+r} = \left(a^n\right)^q a^r = e^q a^r = a^r$$

$a^n = e,$ అయ్యేటట్లుగా n కనిష్ఠం. కనుక $r = 0$ అయి

$m = nq$ అవుతుంది.

$\therefore n|m$

10.8.2 సిద్ధాంతము :- $G = \langle a \rangle$ చక్రీయ సమూహము, $|G| = n$ అనుకొనుము. $b \in G$, $b = a^s$, $d =$ గ.సా.భా $\{s, n\}$ అయితే $|\langle b \rangle| = \dfrac{n}{d}$ అవుతుంది.

ఇంకా $\left\langle a^s \right\rangle = \left\langle a^t \right\rangle \Leftrightarrow$ గ.సా.భా. $\{s, n\} =$ గ.సా.భా. $\{t, n\}$

ఉపపత్తి :- $m = |\langle b \rangle|$ అనుకొనుము. అపుడు $b^m = \left(a^s\right)^m = a^{sm} = e$ అయ్యేటట్లు m కనిష్ఠమవుతుంది.

$|G| = n$ నుండి $a^n = e$ అయ్యేటట్లు n కనిష్ఠము.

కనుక సిద్ధాంతం 10.8.1 నుండి $n\,|\,sm$ అవుతుంది.

కనుక $\exists t \in Z \ni sm = nt$

$$a^{sm} = a^{nt} = \left(a^n\right)^t = e^t = e$$

కనుక n/sm అయ్యేటట్లుగా m కనిష్ఠ ధన పూర్ణాంకము .... (1)

$d = g.c.d.\{s, n\} \Rightarrow \exists\ x,\ y \in Z \ni d = xn + ys.$

$d \mid s,\ d \mid n$ కనుక, $1 = x\left(\frac{n}{d}\right) + y\left(\frac{s}{d}\right), \frac{n}{d}, \frac{s}{d}$ లు పూర్ణాంకాలు

కనుక $\Rightarrow g.c.d.\left\{\frac{n}{d}, \frac{s}{d}\right\} = 1$

(1)నుండి $\frac{ms}{n}$ పూర్ణాంకమయ్యేట్లు m కనిష్ఠ ధన పూర్ణాంకము.

$\frac{ms}{n} = \frac{m\left(\frac{s}{d}\right)}{\left(\frac{n}{d}\right)}$ ఒక పూర్ణాంకము.

$\Rightarrow m\left(\frac{s}{d}\right)$ను $\left(\frac{n}{d}\right)$ భాగించేటట్లుగా m కనిష్ఠము.

$g.c.d.\left\{\frac{n}{d}, \frac{s}{d}\right\} = 1$ కనుక

$\frac{n}{d} / m$ అయ్యేట్లు m కనిష్ఠం

$\therefore \frac{n}{d} = m$

కనుక $|\langle b \rangle| = |\langle a^s \rangle| = \frac{n}{d} = \frac{n}{g.c.d.\{s,\ n\}}$

$\langle a^s \rangle = \langle a^t \rangle \Leftrightarrow |\langle a^s \rangle| = |\langle a^t \rangle|$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{g.c.d.\{s,\ n\}} = \frac{n}{g.c.d.\{t,\ n\}}$$

$$\Leftrightarrow g.c.d.\{s, n\} = g.c.d.\{t, n\}$$

10.8.3 ఉప సిద్ధాంతము :- $G=\langle a\rangle$ ఒక చక్రీయ సమూహము $|G|=n$ అనుకొనుము. $\langle a^r\rangle=G$ కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $g.c.d.(r,n)=1$ కావడం.

ఉపపత్తి :- $\langle a^r\rangle=G \Leftrightarrow |\langle a^r\rangle|=n$

$$\Leftrightarrow n=\frac{n}{g.c.d.\{r,n\}}$$ సిద్ధాంతము **10.8.2** నుండి

$$\Leftrightarrow g.c.d.\{r,\ n\}=1$$

10.8.4 గమనిక :- n మూలకాలున్న పరిమిత చక్రీయ సమూహం $G=\langle a\rangle$కు జనక మూలకాల సంఖ్య $\phi(n)$. (ఇక్కడ ఆయిలర్ ϕ ప్రమేయము $\phi(n)=n$ కన్నా తక్కువగా ఉండి, nతో సాపేక్ష ప్రధానాలయిన ధన పూర్ణాంకాల సంఖ్య). $1\le s<n$ అయితే Gకు a^s జనక మూలకం కావడానికి ఆ.ప.ని. (ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమం) $g.c.d.\{s,n\}=1$ కావడం.

10.8.5 గమనిక :- $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots\ldots\ldots\ldots\alpha_k$ లు పూర్ణాంకాలు, $\alpha_i>0\forall 1\le i\le k$, $p_1,p_2,\ldots\ldots\ldots,p_k$లు ప్రధాన సంఖ్యలు, $n=p_1^{\alpha_1},\ p_2^{\alpha_2},\ldots\ldots\ldots,p_k^{\alpha_k}$, G ఒక పరిమిత చక్రీయ సమూహం, $|G|=n$ అయితే G యొక్క జనక మూలకాల సంఖ్య

$$\phi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$ అవుతుంది.

10.8.6 ఉదాహరణ :- Z_{15} యొక్క జనక మూలకాల సంఖ్య, జనక మూలకాలను కనుగొనుము.

సాధన :- Z_{15} యొక్క జనక మూలకాల సంఖ్య $\phi(15)$

$$15=3\times 5$$

$$\phi(15)=15\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=2\times 4=8$$

$s\in Z_{15}$ జనక మూలకం $\Leftrightarrow$ $g.c.d.\{s,\ 15\}=1$.

$\therefore Z_{15}$ యొక్క జనక మూలకాలు $\{1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 8,\ 11,\ 13,\ 14\}$ అవుతాయి.

10.8.7 ఉదాహరణ :- Z_{60} లో 30చే జనితమైన ఉప సమూహంలోని మూలకాల సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన :- $$|\langle 30\rangle| = \frac{60}{\text{g.c.d.}\{30, 60\}} = \frac{60}{30} = 2$$

$$\langle 30\rangle = \{0, 30\}$$

10.8.8 ఉదాహరణ :- p, q లు ప్రధానాంకాలైతే Z_{pq} యొక్క జనక మూలకాల సంఖ్యను కనుగొనండి.

సాధన :- Z_{pq} యొక్క జనక మూలకాల సంఖ్య

$$= \phi(pq) = pq\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)$$

$$= \frac{pq(p-1)(q-1)}{pq} = (p-1)(q-1)$$

10.8.9 SAQ :- p ప్రధాన సంఖ్య $r \geq 1$ పూర్ణాంకము అయితే Z_{p^r} యొక్క జనక మూలకాల సంఖ్యను కనుగొనుము.

10.8.10 సమస్య :- G ఎబీలియన్ సమూహము. H, K లు $|H| = r, |K| = s$ అవుతూ G కి చక్రీయ ఉప సమూహాలు అనుకొనుము. $(r, s) = 1$ అయితే G కు rs మూలకాలు గల ఉప సమితి ఉంటుందని చూపుము.

సాధన :- $H = \langle a\rangle$, $K = \langle b\rangle$, $O(a) = r$, $O(b) = s$ అనుకొనుము.

G ఎబీలియన్ కనుక ab = ba అవుతుంది.

$(ab)^k = e$ అనుకొనుము. $ab = ba$ నుండి $(ab)^k = a^k b^k = e$ అవుతుంది.

$\therefore a^k = b^{-k}$

a, b ల తరగతులు పరిమితం గనుక a^k, b^k ల తరగతులు కూడా పరిమితమే.

$a^k = b^{-k} \Rightarrow O(a^k) = O(b^{-k}) = O(b^k)$

$O(a) = r, \Rightarrow O(a^k) | r$

$O(b) = s \Rightarrow O(b^k) | s$

$\therefore O(a^k) | (r, s)$

$(r,s)=1$ నుండి $O(a^k)=O(b^k)=1$

కనుక $a^k=e,\ \ b^k=e$ అవుతాయి.

$O(a)=r,\ O(b)=s \Rightarrow r\,|\,k,\ \ s/k$

$\Rightarrow r,s$ లకు k ఒక సామాన్య గుణిజము.

కనుక $O(ab)=\text{l.c.m.}\{r,s\}=\dfrac{rs}{(r,s)}=\dfrac{rs}{1}=rs$

కనుక G కు $\langle ab\rangle$ అనేది rs మూలకాలు గల చక్రీయ ఉప సమూహామవుతుంది.

10.9 స్వయం మదింపు ప్రశ్న (S.A.Q.)లకు సమాధానాలు :-

10.5.13 SAQ :- $\rho^0=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5\end{pmatrix}$

$$\rho=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&5&1&3\end{pmatrix}$$

$$\rho^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&1&3&2&5\end{pmatrix}$$

$$\rho^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&5&4&3\end{pmatrix}$$

$$\rho^4=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&3&1&5\end{pmatrix}$$

$$\rho^5=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&1&5&2&3\end{pmatrix}$$

$$\rho^6=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5\end{pmatrix}$$

కనుక $\langle\rho\rangle=\{\rho^0,\rho,\rho^2,\rho^3,\rho^4,\rho^5\}$

పట్టిక :

	ρ^0	ρ^1	ρ^2	ρ^3	ρ^4	ρ^5
ρ^0	ρ^0	ρ^1	ρ^2	ρ^3	ρ^4	ρ^5
ρ^1	ρ^1	ρ^2	ρ^3	ρ^4	ρ^5	ρ^0
ρ^2	ρ^2	ρ^3	ρ^4	ρ^5	ρ^0	ρ^1
ρ^3	ρ^3	ρ^4	ρ^5	ρ^0	ρ^1	ρ^2
ρ^4	ρ^4	ρ^5	ρ^0	ρ^1	ρ^2	ρ^3
ρ^5	ρ^5	ρ^0	ρ^1	ρ^2	ρ^3	ρ^4

పట్టిక ప్రధాన కర్ణం పై సౌష్ఠవము. కనుక $\langle\rho\rangle$ ఎబీలియన్ సమూహము. $|S_3| = 6$, S_3 ఎబీలియన్ కాదు.

10.5.21 SAQ :- $\sigma = (1, 2)(5, 6, 7, 8)$.

$(1, 2)$ యొక్క తరగతి $= 2$

$(5,6,7,8)$ యొక్క తరగతి $= 4$

σ యొక్క తరగతి $= \ell.\text{c.m.}\{2,4\} = 4$

10.5.24 SAQ :- S_A లో $\sigma = (a,b)$ అనుకొనుము. $x \in A$ అనుకొనుము.

$x = a$, అయితే $x\sigma^2 = (a\sigma)\sigma = b\sigma = a = x$

$x = b$ అయితే $x\sigma^2 = (b\sigma)\sigma = a\sigma = b = x$

$x \notin \{a,b\}$ అయితే $x\sigma^2 = (x\sigma)\sigma = x\sigma = x$

$\therefore \ \sigma\sigma = I$

కనుక $\sigma^{-1} = \sigma$

10.6.7 SAQ :- S_n లో $\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{2k+1}$ బేసి ప్రస్తారమనుకొనుము.

ఇక్కడ $\tau_1, \tau_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, \tau_{2k+1}$ లు వ్యత్యయాలు.

$\sigma^{-1} = \tau_{2k+1}^{-1} \tau_{2k}^{-1} \cdots \tau_1^{-1} = \tau_{2k+1} \tau_{2k} \cdots \tau_1$ కూడ బేసి ప్రస్తారము.

S_n లో τ బేసి ప్రస్తారమనుకొంటే

$\rho = \sigma^{-1}\tau$ సరి ప్రస్తారమవుతుంది. $\tau = \sigma\rho,\ \rho \in A_n$.

10.6.9 SAQ :- $\sigma = (a_1, a_2, \cdots, a_{2k})$

$$\sigma^2 = \sigma\sigma = (a_1, a_2, \cdots\cdots a_{2k})(a_1, a_2, \cdots, a_{2k})$$

$$= (a_1, a_3, \cdots\cdots a_{2k-1})(a_2, a_4, \cdots\cdots, a_{2k-2}, a_{2k})$$

కనుక σ^2 ఆవృత్తం కాదు.

10.7.5 SAQ :- $\langle Z_{6}, +_6 \rangle$ లో $\langle 2 \rangle = \{0, 2, 4\}, \langle 3 \rangle = \{0, 3\}$

2 యొక్క తరగతి 3, 3 యొక్క తరగతి 2.

10.7.11 SAQ :- (a) $G_1 = \{e_1 = a^0, a, a^2, \cdots\cdots, a^{m-1}\}$

$G_2 = \{e_2 = b^0, b, b^2, \cdots\cdots, b^{m-1}\}$ అనుకొనుము.

a^r ను b^r తో గుర్తిస్తే

$a^r \cdot a^s = a^{r+_m s} = b^{r+_m s} = b^r\, b^s$

కనుక G_1, G_2 లు నిర్మాణపరంగా ఒకే సమూహాలు.

(b) $G_1 = \langle a \rangle, G_2 = \langle b \rangle$ అనంత చక్రీయ సమూహాలనుకొనుము. a^n ను b^n తో గుర్తిస్తే

$$a^n a^m = a^{n+m} = b^{n+m} = b^n\ b^m$$

కనుక G_1, G_2 లు నిర్మాణపరంగా ఒకే సమూహాలు.

10.8.9 SAQ :- Z_{p^r} **యొక్క జనక మూలకాల సంఖ్య** $\phi(p^r)$:-

$$\phi(p^r) = p^r\left(1 - \frac{1}{p}\right) = p^{r-1}(p-1)$$

10.10 అభ్యాసాలు :-

10.10.1 :- సమితి A లో x అనే మూలకాన్ని స్థిరపరచి, $T_x = \{\sigma \in S_A / x\sigma = x\}$ అనుకొనుము. S_A కు T_x ఉప సమూహమని చూపుము.

10.10.2 :- ఒక పరిమిత సమితి A నుండి A కు ఒక ప్రమేయం సంగ్రస్తమైతే అది అన్వేకమవుతుందని చూపుము.

10.10.3 :- A అనే సమితికి ఉప సమితి B లో ఒక మూలకం x ను స్థిరపరచుము. $(x \text{ is a fixed element of } B)$.

$\{\sigma \in S_A / x\sigma = x\}$, $\{\sigma \in S_A / B\sigma = B\}$ లు S_A కు ఉప సమూహాలని చూపుము.

10.10.4 :- $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ ఈ క్రింది లబ్ధాల ద్వారా వచ్చే ప్రస్తారాలను గణించండి.

(i) $(1,3,5)(4,7)(6,8)$ (ii) $(1,2,4)(3,5,6)(7,8)$

(iii) $(3,5,6)(1,7)(2,4,8)$ (iv) $(2,3,4)(1,5)(6,7,8)$

10.10.5 :- $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 8 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ సరి ప్రస్తారమో లేక బేసి ప్రస్తారమో నిర్ణయింపుము.

10.10.6 :- A_3 యొక్క గుణకారపు పట్టికను వ్రాయుము.

10.10.7 :- $n \geq 2$ కు S_n లోని ఒక ఉప సమూహం H లో ఒక బేసి ప్రస్తారము ఉంటే, H లోని ప్రస్తారాలలో ఖచ్చితముగా సగం ప్రస్తారాలు సరి ప్రస్తారాలని చూపండి. (సూచన - H లో σ బేసి ప్రస్తారమైతే, $\tau \to \sigma\tau$ ప్రమేయము H లోని బేసి ప్రస్తారాల సమితి A నుండి H లోని సరి ప్రస్తారాల సమితి B కు ద్విగుణ ప్రమేయము)

10.10.8 :- చక్రీయ సమూహము G కు a జనక మూలకమైతే a^{-1} కూడ G కు జనక మూలకమని చూపుము.

10.10.9 :- సమూహం G లో 2 తరగతిగా గల చక్రీయ ఉప సమూహాన్ని జనింపజేసే ఏకైక మూలకం a అయితే

$xa = ax \ \forall \ x \in G$ అని చూపండి. (సూచన : $(xax^{-1})^2$ ను పరిగణించండి)

10.10.10 :- p ప్రధానాంకమైతే Z_p కు $\{0\}$, Z_p లు మాత్రమే ఉప సమూహాలని చూపండి.

(సూచన : $\phi(p) = p\left(1 - \frac{1}{p}\right) = p - 1$ కనుక Z_p లోని ప్రతి శూన్యేతర మూలకము Z_p కు జనక మూలకమవుతుంది).

10.10.11 :- ఈ క్రింది సంఖ్యలు తరగతులుగా గల చక్రీయ సమూహాల జనక మూలకాల సంఖ్యను కనుగొనుము.

i) 30, ii) 36, iii) 100, iv) 120, v) 19.

ప్రతి సందర్భంలోను జనక మూలకాలను కూడ కనుగొనండి.

10.10.12 :- దిగువనీయబడిన చక్రీయ సమూహాలకు గల వివిధ ఉప సమూహాల తరగతులను కనుగొనుము.

i) Z_{16} ii) Z_{30} iii) Z_{45} iv) Z_{60} v) Z_{17}

10.10.13 :- చక్రీయం కాని పరిమిత సమూహానికి ఉదాహరణనీయండి. (klein 4 - సమూహం గానీ S_3ని గానీ ప్రయత్నించండి).

10.11 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు :-

10.11.1 :- అశూన్య సమితి A పై ప్రస్తారాన్ని నిర్వచింపుము. ప్రస్తారాల సంయోజనంతో A పై ప్రస్తారాల సమితి S_A ఒక సమూహమని ఋజువు చేయండి.

10.11.2 :- $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

అనుకొనుము. $\sigma\tau,\ \tau\sigma,\ \sigma^{-1}\tau,\ \tau\sigma\tau^{-1}$లను గణించండి.

10.11.3 :- S_3 యొక్క గుణకార పట్టికను వ్రాయుము.

10.11.4 :- $n \geq 3$ అయితే S_n ఎబీలియన్ కాదని చూపుము.

10.11.5 :- S_Aలో σ క్రింద ఒక మూలకం యొక్క కక్ష్యను నిర్వచింపుము. σ క్రింద ఏ రెండు కక్ష్యలైనా సమానము లేదా వియుక్తములు అని చూపుము.

10.11.6 :- ఆవృత్తాన్ని నిర్వచింపుము. వియుక్త ఆవృత్తములను నిర్వచింపుము. ఏ రెండు వియుక్త ఆవృత్తాలైనా వినిమయం చెందుతాయని చూపుము.

10.11.7 :- యాధృచ్ఛిక ఆవృత్తాలు వినిమయం చెందనవసరం లేదని చెప్పడానికి ఉదాహరణనీయండి.

10.11.8 :- పరిమిత సమితి A పై ఏ ప్రస్తారమైనా వియుక్త ఆవృత్తాల లబ్ధమవుతుందని చూపండి.

10.11.9 :- వ్యత్యయాన్ని నిర్వచించండి. కనీసం రెండు మూలకాలు వున్న పరిమిత సమితి A పై ఏ ప్రస్తారమునైనా వ్యత్యయాల లబ్ధంగా వ్రాయవచ్చని చూపండి.

10.11.10 :- $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 6 & 3 & 7 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

σ ను వియుక్త ఆవృత్తాల లబ్ధంగా వ్రాసి, వ్యత్యయాల లబ్ధంగా కూడా వ్రాయండి.

10.11.11 :- S_Aలో σ, n పొడవు గల ఆవృత్తమైతే σ యొక్క తరగతి n అని చూపండి.

10.11.12 :- కనీసం రెండు మూలకాలు గల సమితి A పై ఏ ప్రస్తారమైనా ఏక కాలంలో సరి ప్రస్తారము, మరియు బేసి ప్రస్తారము కావటం సాధ్యపడదని చూపండి.

10.11.13 :- $n \geq 2$, కు S_nలోని సరి ప్రస్తారాల సమితి A_n, S_nకు ఉప సమూహమని చూపండి.

10.11.14 :- $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 6 & 3 & 7 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, σ సరి ప్రస్తారమో లేక బేసి ప్రస్తారమో నిర్ణయించండి.

10.11.15 :- $\langle Z_n, +_n \rangle$ ఒక చక్రీయ సమూహమని చూపండి.

10.11.16 :- $\langle Z_9, +_9 \rangle$లో **2,3,6** మరియు 5ల యొక్క తరగతులను కనుగొనండి.

10.11.17 :- చక్రీయ సమూహము యొక్క ప్రతి ఉప సమూహము చక్రీయమని చూపండి.

10.11.18 :- ఏ చక్రీయ సమూహమైనా నిర్మాణపరంగా $\langle Z, + \rangle$ గాని లేక ఏదో ఒక nకు $\langle Z_n, +_n \rangle$గాని అవుతుందని చూపండి.

10.11.19 :- సమూహము Gలో a అనేది nవ తరగతి మూలకమనుకొనుము. Gలో తత్సమ మూలకం e అనుకొనుము. $a^m = e$, అయితే mను భాగిస్తుందని చూపుము.

10.11.20 :- $G = \langle a \rangle$ ఒక nవ తరగతి చక్రీయ సమూహమనుకొనుము. $d = g.c.d.\{s, n\}$ అనుకొనుము. a^sచే జనితమైన G యొక్క ఉప సమూహానికి n తరగతి $\frac{n}{d}$ అని చూపము.

10.11.21 :- ఆయిలర్ ప్రమేయం ϕ అయితే nవ తరగతి చక్రీయ సమూహానికి జనక మూలకాల సంఖ్య $\phi(m)$ అని చూపుము.

10.11.22 :- $\langle Z_{15}, +_{15} \rangle$ యొక్క జనక మూలకాలన్నింటిని కనుగొనుము.

10.11.23 :- $\langle Z_{60}, +_{60} \rangle$లో 30చే జనితమైన ఉపసమూహము యొక్క తరగతిని కనుగొనుము.

ప్రామాణిక గ్రంథాలు :-

1. A First Course in Abstract Algebra - J.B. Fraleigh, Narosa Publishing House, 1988
2. Topics in Algebra - I.N. Herstein, Wiley Eastern Ltd., New Delhi, 1975
3. Basic Algebra, Vol. I & II - N. Jacobson, Hindustan Publishing Co. 1980
4. A Text book of Modern Abstract Algebra - Santi Narayan, S.Chand & Co.

పాఠ్య రచయిత

యన్. రజని

పాఠము - 11

సమూహాల తుల్యరూపత - సహసమితుల సమూహాలు

11.1 పాఠ్య లక్ష్యం :

ఈ పాఠంలో రెండు సమూహాలు వేర్వేరుగా ఉన్నట్లు అనిపించినా, వాటిలోని మూలకాల పేర్లు మినహా నిర్మాణపరంగా అవి ఒకటే (తుల్య రూపాలు) కావచ్చును అనే భావనను విద్యార్థికి పరిచయం చేస్తాము. ఇంకా, సమూహ వాదంలో ప్రముఖమైన లెగ్రాంజ్ సిద్ధాంతాన్ని దాని యొక్క కొన్ని అనువర్తనలను చర్చించడం జరుగుతుంది.

11.2 పాఠ్య నిర్మాణం :

ఈ పాఠంలో క్రింది అంశాలు ఉన్నాయి.

11.3 పరిచయం

11.4 తుల్యరూపత

11.5 తుల్యరూప సమూహాలు

11.6 తుల్యరూపం కాని సమూహాలు

11.7 కెయిలే సిద్ధాంతము

11.8 సహ సమితుల సమూహాలు

11.9 సహ సమితుల అనువర్తనాలు (Applications)

11.10 స్వయం మదింపు ప్రశ్న (S.A.Q.) **లకు సమాధానాలు**

11.11 అభ్యాసములు

11.12 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు

11.13 ప్రామాణిక గ్రంథాలు

11.3 పరిచయం :-

ఈ పాఠంలో సమూహాల మధ్య "తుల్యరూపత" అనే భావనను పరిచయం చేస్తాము. రెండు సమూహాలు తుల్య రూపాలయితే అవి తుల్యరూపాలు అని ఋజువు చేయటానికి అనుసరించవలసిన పద్ధతిని చర్చిస్తాము (11.5.1). రెండు సమూహాలు తుల్యరూపాలు కాకపోతే, ఒక సమూహం తృప్తిపరిచే కొన్ని నిర్మాణపరమైన ధర్మాలు, రెండవ సమూహంలో తృప్తిపరచబడకుండా ఉండే వాటిని, పరిగణనలోకి తీసుకొని ఆ రెండు సమూహాలు తుల్యరూపాలు కావని నిరూపించే కొన్ని పద్ధతులను తెలుసుకొంటాం (11.6). ప్రతి సమూహము ఒక ప్రస్తారాల సమూహానికి తుల్యరూపమవుతుందని కూడ ఋజువు చేస్తాము. (11.7 కెయిలే సిద్ధాంతము) ఒక సమూహంలోని విభజన (Partition) ఖండాల (Blocks or Cells) మధ్య ఆ సమూహంలోని గుణకారంచే ప్రేరితమైన గుణకారాన్ని ప్రవేశపెట్టి (11.8.2) ఒక సమూహంలోని ఒక ఉప సమూహం యొక్క సహ సమితుల సమితి ప్రేరిత

గుణకార పరిక్రియతో సమూహమైతే అపుడు ప్రతి ఎడమ (కుడి) సహ సమితి ఒక కుడి (ఎడమ) సహ సమితి అవుతుందని చూస్తాము (11.8.7). పరిమిత సమూహాలకు లెగ్రాంజ్ సిద్ధాంతాన్ని (11.9.1.), యీ సిద్ధాంతం యొక్క కొన్ని అనువర్తనలను పొందుపరచడం జరిగింది.

ఈ పాఠంలో పరిచయం చేసిన భావనలను సులభంగా అర్థం చేసుకోవడానికి వీలుగా అనేక ఉదాహరణలు, స్వయం మదింపు ప్రశ్నలను (S.A.Q.s) చేర్చడం జరిగినది.

11.4 తుల్యరూపత :

11.4.1 నిర్వచనం :- G, G' లు సమూహాలు $\phi : G \to G'$ ప్రమేయమనుకొనుము.

(i) ϕ ద్విగుణ ప్రమేయము

(ii) $(xy)\phi = (x\phi)(y\phi) \ \ \forall \ x, y \in G$

అయితే ϕను G నుండి G' పైకి "తుల్యరూపత" అంటాము. G నుండి G' పైకి ఒక తుల్యరూపత ఉంటే G'తో G తుల్యరూపంగా ఉంది అని, సంకేతంతో $G \simeq G'$ అని వ్రాస్తాము.

11.4.2 SAQ :- ఒక సమూహాల శూన్యేతర సమూదాయము G అనుకొనుము. "తుల్యరూపంగా ఉండటం" అనే సంబంధం G పై తుల్య సంబంధమని చూపుము.

ఇపుడు తుల్యరూపత తత్సమ మూలకాన్ని తత్సమ మూలకం పైకి, ఒక మూలకం యొక్క విలోమాన్ని ఆ మూలకపు ప్రతి బింబం యొక్క విలోమం పైకి ప్రతి సర్జనం (maps) చేస్తుందని ఋజువు చేద్దాము.

11.4.3 సిద్ధాంతము :- G, G' లు సమూహాలు, $\phi : G \to G'$ తుల్యరూపత అనుకొనుము. e, e' లు వరుసగా G, G' లలోని తత్సమ మూలకాలు అనుకొనుము. అపుడు

(i) $e\phi = e'$ (ii) $a^{-1}\phi = (a\phi)^{-1} \ \ \forall \ \ a \in G$.

ఉపపత్తి : (i) $e\phi \in G'$, G'లో తత్సమ మూలకం e'. కనుక G'లో $e'(e\phi) = e\phi = (ee)\phi = (e\phi)(e\phi)$ అవుతుంది.

G'లో కుడి కొట్టివేత న్యాయం నుండి

$e\phi = e'$ అవుతుంది.

(ii) $a \in G$ అనుకొనుము. అపుడు $a^{-1} \in G, a\phi \in G'$, $(a\phi)^{-1} \in G'$

$$e' = e\phi = \left(aa^{-1}\right)\phi = (a\phi)\left(a^{-1}\phi\right)$$

$$e' = e\phi = \left(a^{-1}a\right)\phi = \left(a^{-1}\phi\right)(a\phi)$$

కనుక $a\phi$ కు విలోమం $\left(a^{-1}\right)\phi$ అవుతుంది.

$$\therefore (a\phi)^{-1} = a^{-1}\phi$$

11.4.4 **SAQ :** $\phi : G \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} G'$ ఒక సమూహాల తుల్యరూపత, $x \in G$ అయితే $x^n\phi = (x\phi)^n \ \forall\ n \in Z$.

11.4.5 **SAQ :** $\phi : G \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} G'$ సమూహాల తుల్యరూపత, G చక్రీయ సమూహమనుకొనుము. $G = \langle a \rangle$ అనుకొనుము.

ప్రతి $x \in G$, $x\phi$ అనేది పూర్తిగా $a\phi$ యొక్క విలువచే నిర్ధారితమవుతుంది.

11.5 తుల్యరూప సమూహాలు :-

11.5.1 :- G, G' సమూహాలు తుల్యరూపాలైతే, అవి తుల్య రూపాలు అని ఋజువు చేయడానికి అనుసరించవలసిన పద్ధతి.

పాదం 1 : G' తో G కి తుల్యరూపాన్నిచ్చే ప్రమేయము ϕ ను నిర్వచింపుము.

పాదం 2 : ϕ అన్వేకము $(\text{one} - \text{one})$ అని చూపుము.

పాదం 3 : ϕ సంగ్రస్తము (onto) అని చూపుము.

పాదం 4 : $(xy)\phi = (x\phi)(y\phi) \ \forall\ x, y \in G$ అని చూపుము.

11.5.2 **ఉదాహరణ :-** 4 మూలకాలతో ఉన్న ఏ సమూహము అయినా Z_4 లేదా క్లైయిన్ 4 - సమూహం V కి తుల్యరూపం అవుతుంది.

ఉపపత్తి :- G ఒక సమూహము, $|G| = 4$ అనుకొనుము. G యొక్క తత్సమ మూలకం e' అనుకొనుము. సహాయ సిద్ధాంతము **9.11.22** నుండి $x \neq e'$, $x^2 = e'$ అయ్యేటట్లు G లో ఒక x ఉంటుంది.

$$G = \{e', x, y, z\}$$ అనుకొనుము.

(i) y కి విలోమం y, Z కి విలోమం z అవడం కాని లేక

(ii) y కి విలోమం z అవడం కాని జరగాలి.

సందర్భం (i) :-

G యొక్క పట్టిక

	e'	x	y	z
e'	e'	x	y	z
x	x	e'	z	y
y	y	z	e'	x
z	z	y	x	e'

క్లైయిన్ **4** - సమూహం V యొక్క పట్టిక

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

పాదం 1 : $\phi : G \to V$ ప్రమేయాన్ని $e'\phi = e,\ x\phi = a,\ y\phi = b,\ z\phi = c$ గా నిర్వచింపుము.

పాదం 2 : ϕ అన్వేకమనేది స్పష్టం.

పాదం 3 : ϕ సంగ్రస్తమనేది స్పష్టం.

పాదం 4 : $G \times G$ లోని అన్ని మూలకాలు (p,q)లకు $(pq)\phi = (p\phi)(q\phi)$అని సరిచూడవచ్చును.

కనుక యీ సందర్భంలో ϕ తుల్యరూపత అయి క్లైయిన **4** - సమూహం V తో G తుల్యరూపం అవుతుంది.

సందర్భం (ii) :-

G యొక్క పట్టిక

	e'	y	x	z
e'	e'	y	x	z
y	y	x	z	e'
x	x	z	e'	y
z	z	e'	y	x

Z_4 యొక్క పట్టిక

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

పాదం 1 : $\phi : G \to Z_4$ ను $e'\phi = 0,\ y\phi = 1,\ x\phi = 2,\ z\phi = 3$ గా నిర్వచింపుము.

పాదం 2 : ϕ అన్వేకమనేది స్పష్టము.

పాదం 3 : ϕ సంగ్రస్తమనేది స్పష్టము.

పాదం 4 : $G \times G$ లోని అన్ని మూలకాలు (p,q)లకు $(pq)\phi = (p\phi)(q\phi)$ అని సరి చూడవచ్చును.

కనుక యీ సందర్భంలో ϕ తుల్యరూపత అయి Z_4 సమూహంతో G తుల్యరూపమవుతుంది.

11.5.3 సిద్ధాంతము :- ప్రతి n వ తరగతి పరిమిత చక్రీయ సమూహము $\langle Z_n, +_n \rangle$ కు తుల్యరూపమవుతుంది.

ఉపపత్తి :- e తత్సమ మూలకంతో G ఒక n వ తరగతి చక్రీయ సమూహమనుకొనుము. G కు a జనక మూలకము.

$G=\left\{e=a^0, a^1, a^2, \cdots\cdots, a^{n-1}\right\}$ అనుకొనుము.

పాదం 1 : $\phi = G \to Z_n$ ను $0 \le r \le n-1$కు $a^r\phi = r$ గా నిర్వచింపుము.

పాదం 2 : $a^r\phi = a^s\phi \Rightarrow r = s \Rightarrow a^r = a^s$. కనుక ϕ అన్వేకము.

పాదం 3 : $r \in Z_n \Rightarrow a^r \in G$, $a^r\phi = r$ కనుక ϕ సంగ్రస్తము.

పాదం 4 : $a^r, a^s \in G$ అనుకొనుము. భాగాహార విశేష విధిననుసరించి $r+s = np+q$, $0 \le q \le n-1$ అయ్యేటట్లు Z లో p, q లు ఉంటాయి.

కనుక $r +_n s = q$

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} = a^{np+q} = a^{np}a^q = \left(a^n\right)^p \cdot a^q = e^p \cdot a^q = a^q = a^{r+_n s}$$

$$\left(a^r a^s\right)\phi = a^{(r+_n s)}\ \phi = r +_n s = \left(a^r\phi\right) +_n \left(a^s\phi\right)$$

కనుక G నుండి Z_n కు ϕ తుల్యరూపత అవుతుంది.

11.5.4 ఉదాహరణ :- వాస్తవ సంఖ్యల సమితిని R అనుకొనుము. $R^+ = \{r \in R / r > 0\}$ సంకలనంతో R, గుణకారంతో R^+ సమూహాలని మనకు తెలుసును. ఈ రెండు సమూహాలు తుల్య రూపాలని ఇపుడు నిరూపించుదాము.

ఉపపత్తి :-

పాదం 1 : $\phi : R \to R^+$ ను $x\phi = e^x$. $\forall\ x \in R$ గా నిర్వచింపుము.

$$\left(\left[e^x = \exp(x)\right]\right)$$

పాదం 2 : $x\phi = y\phi \Rightarrow e^x = e^y \Rightarrow x = y$ కనుక ϕ అన్వేకము.

పాదం 3 : $r \in R^+$.అయితే $x = \ell_n r \in R\left(\left[\ell_n r = \log_e r\right]\right)$

$x\phi = e^{\ell_n r} = r$

కనుక ϕ సంగ్రస్తము.

పాదం 4 : $(r+s)\phi = e^{r+s} = e^r\ e^s = (r\phi)(s\phi)\ \ \forall\ r, s \in R$

కనుక ϕ తుల్యరూపత అయి $(R,+)$, $\left(R^{+},\cdot\right)$లు తుల్యరాపాలవుతాయి.

అనంత చక్రీయ సమూహాల గురించి ఒక ముఖ్యమైన సిద్ధాంతాన్ని ఇపుడు ఋజువు చేద్దాము.

11.5.5 సిద్ధాంతము :- ఏ అనంత చక్రీయ సమూహమైనా $\langle Z, +\rangle$ కు తుల్యరూపము.

ఉపపత్తి : G అనేది a జనక మూలకంగా గల ఒక అనంత చక్రీయ సమూహమనుకొనుము.

$$G=\left\{a^{n}/n\in Z\right\}.$$

G అపరిమితం గనుక $n\neq m$ అయితే $a^{n}\neq a^{m}$ అని మనకు తెలుసు.

పాదం 1 : $\phi: G\to Z$ ను $a^{n}\phi=n$ గా నిర్వచింపుము.

పాదం 2 : $a^{n}\phi=a^{m}\phi \Rightarrow n=m \Rightarrow a^{n}=a^{m}$

కనుక ϕ అన్వేకము.

పాదం 3 : $n\in Z$ అయితే $a^{n}\in G$, $a^{n}\phi=n$ కనుక ϕ సంగ్రస్తము.

పాదం 4 : $\left(a^{n}a^{m}\right)\phi=a^{n+m}\phi=n+m=a^{n}\phi+a^{m}\phi$

కనుక G నుండి Z కు ϕ ఒక తుల్యరూపత.

11.5.6 SAQ :- ఒకే తరగతి గల ఏ రెండు చక్రీయ సమూహాలైనా తుల్యరూపాలని చూపుము.

11.6 తుల్యరూపాలు కాని సమూహాలు :

రెండు సమూహాలు తుల్య రూపం కాకపోతే, అవి తుల్యరూపాలు కావని ఋజువు చేయడానికి కొన్ని పద్ధతులను ఈ విభాగంలో చర్చిస్తాము.

11.6.1 గమనిక :- పరిమిత సమూహాలు G, G'ల లోని మూలకాల సంఖ్యలు విభిన్న సంఖ్యలయితే G నుండి G'కు ద్విగుణ ప్రమేయాలు ఉండవు.

11.6.2 ఉదాహరణ :- Z_6 లో 6 మూలకాలు, S_6 లో 6! మూలకాలు ఉంటాయి.

$6\neq 6!$ కనుక Z_6 నుండి S_6 పైకి ద్విగుణ ప్రమేయాలు ఉండవు. కనుక Z_6, S_6 లు తుల్యరూపాలు కావు.

సమూహాలలోని మూలకాల సంఖ్య అపరిమితమైనపుడు ఒక దాని నుండి మరొక దానికి ద్విగుణ ప్రమేయాలు ఉండవచ్చును లేక లేకపోవచ్చును. Z నుండి Q పైకి ద్విగుణ ప్రమేయముంటుందని మనకు తెలుసు. Z నుండి R పైకి ద్విగుణ ప్రమేయాలు ఉండవు.

11.6.3 ఉదాహరణ :- Z నుండి R పైకి ద్విగుణ ప్రమేయాలు ఉండవు. కనుక $\langle z,+\rangle, \langle R,+\rangle$లు తుల్యరూపాలు కావు.

G నుండి G'కు ద్విగుణ ప్రమేయం వుంటే, అవి తుల్య రూపాలు కావు అని ఋజువు చేయడానికి, G, G'లలో ఒక దానిలో ఉండే ఏదైనా నిర్మాణపరమైన లక్షణం రెండవ దానిలో లేదని చూపుతాము. "నిర్మాణపరమైన లక్షణం" అనే పదాన్ని లాంఛన ప్రాయంగా (formal) నిర్వచిద్దాము.

11.6.4 నిర్వచనం :- ఒక సమూహంలోని ఒక లక్షణం దానితో తుల్య రూపంగా ఉండే అన్ని సమూహాలలోను ఉంటే ఆ లక్షణాన్ని ఒక "నిర్మాణపరమైన లక్షణం" అంటాము.

11.6.5 ఉదాహరణలు :- కొన్ని సంభవనీయమైన నిర్మాణపరమైన లక్షణాలను దిగువన ఇస్తున్నాము. అవి నిర్మాణపరమైన లక్షణాలని చదువరులు సరి చూసుకొనవలసినది.

1. సమూహము చక్రీయము.
2. సమూహము ఎబీలియన్.
3. సమూహము యొక్క తరగతి 10.
4. సమూహము పరిమిత సమూహము.
5. సమూహంలో 6 తరగతి గల మూలకాలు ఖచ్చితంగా 2 వున్నాయి.
6. సమూహంలోని ప్రతి మూలకం aకు $x^2 = a$ సమీకరణానికి ఆ సమాసంలో సాధన ఉంటుంది.

ఇంకా అనేకమైన "నిర్మాణపరమైన లక్షణాలు" ఉండవచ్చును.

11.6.6 ఉదాహరణలు :- సమూహాలలో కొన్ని నిర్మాణపరం కాని లక్షణాల జాబితా దిగువనీయబడినది.

1. సమూహంలో 7 ఉన్నది.
2. సమూహంలోని మూలకాలు ఇంగ్లీషు అక్షరాలు.
3. సమూహంలోని పరిక్రియను "గుణకారము" అంటాము.
4. సమూహంలోని మూలకాలు ప్రస్తారాలు.
5. సమూహంలోని పరిక్రియను మూలకాలను ఒకదాని ప్రక్కన ఒక దానిని వ్రాయడం ద్వారా తెలియజేస్తాము.
6. సమూహము $\langle R,+\rangle$కు ఉప సమూహము.

సమూహాలకు ఇంకా కొన్ని నిర్మాణపరం కాని లక్షణాలు ఉండవచ్చు.

11.6.7 ఉదాహరణ :- "చక్రీయమవడం" అనేది సమూహాల యొక్క నిర్మాణపరమైన లక్షణం.

ఉపపత్తి :- చక్రీయ సమూహం $G = \langle x\rangle$ సమూహం G'తో తుల్య రూపమనుకొందాము. కనుక ఒక తుల్యరూపత

$\phi : G \to G'$ ఉంటుంది.

$g' \in G' \Rightarrow \exists\, g \in G \ni g\phi = g'$. G కు x జనక మూలకం.

$\therefore \exists\, n \in Z \ni g = x^n$.

$g' = g\phi = x^n\phi = (x\phi)^n$

$\therefore G' = \langle x\phi \rangle$ చక్రీయ సమూహము.

11.6.8 ఉదాహరణ : "ఎబీలియన్ కావడం" అనేది సమూహాల యొక్క నిర్మాణపరమైన లక్షణం.

ఉపపత్తి : G, G' లు సమూహాలు, G ఎబీలియన్ సమూహము

$\phi : G \to G'$ తుల్యరూపత అనుకొనుము.

$x, y \in G' \Rightarrow \exists\; a, b \in G \ni a\phi = x\,,\; b\phi = y$.

$xy = (a\phi)(b\phi) = (ab)\phi = (ba)\phi = (b\phi)(a\phi) = yx$

$\therefore$ G' ఎబీలియన్ అవుతుంది.

11.6.9 ఉదాహరణ : $(Z,+)$, $(Q,+)$ లు తుల్యరూపాలు కావు.

కారణం : $(Z,+)$ చక్రీయ సమూహము

$(Q,+)$ చక్రీయ సమూహము కాదు

కాని Z నుండి Q కు ద్విగుణ ప్రమేయముంటుంది.

11.6.10 ఉదాహరణ : $\langle Z_6\,, +_6 \rangle, S_3$ లు తుల్య రూపాలు కావు.

కారణం : i) Z_6 ఎబీలియన్, S_3 ఎబీలియన్ కాదు.

లేక

ii) Z_6 చక్రీయము, S_3 చక్రీయము కాదు.

Z_6 లోను S_3 లోను మూలకాల సంఖ్య ఒకటేనని గమనించండి.

11.6.11 ఉదాహరణ : సాధారణ గుణకారంతో సమూహాలు $Q^* = Q \setminus \{0\}, R^* = R \setminus \{0\}$ లు తుల్య రూపాలు కావు.

కారణం : i) Q^* నుండి R^* కు అన్వేక ప్రమేయం లేదు.

ii) ప్రతి $a \in R^*$,కు $x^3 = a$ సమీకరణానికి R^*లో సాధన ఉంటుంది. ఈ నిర్మాణపరమైన లక్షణం Q^*లో లేదు. ఉదాహరణకు $x^3 = 2$ కు Q^*లో సాధన లేదు.

11.6.12 ఉదాహరణ : సాధారణ గుణకారంతో శూన్యేతర వాస్తవ సంఖ్యల సమూహం R^* శూన్యేతర సంకీర్ణ సంఖ్యల సమూహం C^*లు తుల్య రూపాలు కావు.

కారణం : (i) R^* లో 1, -1లు క్రమంగా $\{1\}, \{1, -1\}$ ఉప సమూహాలను జనింపజేస్తాయి. వీటి తరగతులు క్రమంగా 1,2. R^*లోని మిగిలిన మూలకాలన్ని అనంత చక్రీయ ఉప సమూహాలను జనింపజేస్తాయి. కాని C^*లో i చే జనితమైన ఉప సమూహము $\{1, -1, i, -i\}$ యొక్క తరగతి 4. R^*లో 4 తరగతిగా ఏ ఉప సమూహము ఉండదు.

(ii) C^* లో ప్రతి $a \in C^*$,కు $x^2 = a$ సమీకరణానికి సాధన ఉంటుంది. కాని $x^2 = -1$ కు R^*లో సాధన లేదు.

11.6.13 ఉదాహరణ :- గుణకారంతో శూన్యేతర వాస్తవ సంఖ్యల సమూహం $\langle R^*, \cdot \rangle$, సంకలనంతో వాస్తవ సంఖ్యల సమూహం తుల్యరూపం కాదు.

కారణం : $\langle R, + \rangle$లో ప్రతి $a \in R$ంకు $x + x = a$ సమీకరణానికి సాధన ఉంటుంది.

సాధ్యమైతే, $\phi : R \to R^*$ తుల్యరూపత ఉంటుందనుకొనుము.

$x\phi = -1$ అయ్యేటట్లు Rలో x ఉంటుంది.

$y = \frac{x}{2} \in R, \quad y + y = x.$

$-1 = x\phi = (y + y)\phi = (y\phi)(y\phi) = (y\phi)^2$ ఇది విరుద్ధత

కనుక R నుండి R^* పైకి తుల్యరూపతలు ఉండవు.

11.7 కెయిలే సిద్ధాంతము :-

సమూహ వాదంలోని ప్రముఖ సిద్ధాంతమైన కెయిలే (Cayley) సిద్ధాంతాన్ని ఈ విభాగంలో ప్రవచించి నిరూపిస్తాము.

11.7.1 సిద్ధాంతము (కెయిలే) : ప్రతి సమూహము ఒక ప్రస్తారాల సమూహానికి తుల్యరూపము.

ఉపపత్తి : G ఒక సమూహమనుకొనుము. సిద్ధాంతము 10.4.6 ద్వారా వచ్చే G యొక్క ప్రస్తారాల సమూహాన్ని S_G అనుకొనుము.

ప్రతి $a \in G$ కు $\rho_a : G \to G$ ను $x\rho_a = xa \;\; \forall \;\; x \in G$ గా నిర్వచింపుము.

(i) G లోని కొట్టివేత న్యాయం నుండి ρ_a అన్వేకమవుతుంది.

(ii) $\forall\ b \in G,\ xa = b$ సమీకరణానికి G లో సాధన ఉంటుంది. కనుక ρ_a సంగ్రస్తము.

$\therefore \forall\ a \in G,\ \rho_a \in S_G$

$G' = \{\rho_a / a \in G\}$ అనుకొనుము.

ఇపుడు S_G కు G' ఉప సమూహమని, G' తో G తుల్యరూపమని చూపుదాం.

S_G కు G' ఉప సమూహం :-

$x\rho_a\rho_b = (xa)\rho_b = (xa)b = x(ab) = x\rho_{ab}\ \ \forall\ a, b \in G.$

$\therefore\ \rho_a\rho_b = \rho_{ab} \in G'\ \ \forall\ a, b \in G$ కనుక ప్రస్తారాల సంయోజనంతో G' సంవృతము.

G లోని తత్సమ మూలకం e అయితే

$x\rho_e = xe = x\ \ \forall\ x \in G.$ కనుక S_G లో ρ_e తత్సమ మూలకం $\rho_e \in G'.$

$\rho_a\ \rho_{a^{-1}} = \rho_{a\,a^{-1}} = \rho_e = \rho_{a^{-1}a} = \rho_{a^{-1}}\,\rho_a$

కనుక $\rho_{a^{-1}} = \rho_a^{-1} \in G'$

$\therefore$ S_G కు G' ఉప సమూహము.

G' తో G తుల్య రూపం :

పాదం 1 : $\phi : G \to G'$ ను $a\phi = \rho_a\ \ \forall\ \ a \in G$ గా నిర్వచింపుము.

పాదం 2 : $a\phi = b\phi \Rightarrow \rho_a = \rho_b \Rightarrow e\rho_a = e\rho_b \Rightarrow ea = eb \Rightarrow a = b$

కనుక ϕ అన్వేకము

పాదం 3 : ϕ యొక్క నిర్వచనం నుండి ϕ సంగ్రస్తమనేది స్పష్టం.

పాదం 4 : $(ab)\phi = \rho_{ab} = \rho_a\ \rho_b = (a\phi)(b\phi).$

$\therefore$ ϕ తుల్యరూపత అయి G' తో G తుల్యరూపం అవుతుంది.

11.7.2 నిర్వచనం : కెయిలే సిద్ధాంతం యొక్క ఉపపత్తిలోని సమూహం G' ను G యొక్క "కుడి ప్రాతినిధ్యము" (Righ Regular Representation) అంటాము.

11.7.3 నిర్వచనం : కెయిలే సిద్ధాంతం యొక్క ఉపపత్తిని సాధించడానికి $a \in G$ కు $x\lambda_a = ax \ \forall \ x \in G$ గా నిర్వచించిన ప్రస్తారాలను తీసుకొన వచ్చును. అపుడు $\lambda_a \lambda_b = \lambda_{ba}$ అవుతుంది. $G'' = \{\lambda_a / a \in G\}$ అనేది S_G కు ఉప సమూహమవుతుంది. $\psi : G \to G''$ ప్రమేయాన్ని $a\psi = \lambda_{a^{-1}} \ \forall \ a \in G$ గా నిర్వచిస్తే ψ తుల్యరూపత అవుతుంది. ఈ సమూహం G'' ను G యొక్క ఎడమ క్రమ ప్రాతినిధ్యము అంటాము.

11.7.4 ఉదాహరణ : దిగువ పట్టిక ద్వారా యీయబడిన 3 మూలకాల సమూహం యొక్క కుడి క్రమ ప్రాతినిధ్యాన్ని గణిద్దాము.

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

ఎడమ క్రమ ప్రాతినిధ్యంలోని మూలకాలు

$$\lambda_e = \begin{pmatrix} e & a & b \\ e & a & b \end{pmatrix}, \qquad \lambda_a = \begin{pmatrix} e & a & b \\ a & b & e \end{pmatrix}, \ \lambda_b = \begin{pmatrix} e & a & b \\ b & e & a \end{pmatrix}$$

ఎడమ క్రమ ప్రాతినిధ్యం యొక్క గుణకార పట్టిక.

	λ_e	λ_a	λ_b
λ_e	λ_e	λ_a	λ_b
λ_a	λ_a	λ_b	λ_e
λ_b	λ_b	λ_e	λ_a

11.7.5 గమనిక : పరిమిత సమూహం G యొక్క గుణకార పట్టిక నుండి $a \in G$ కు ρ_a అనేది a యొక్క దొంతిలోని a కు క్రింద గల మూలకాల క్రమం ద్వారా నిర్దేశింపబడిన ప్రస్తారము అవుతుంది. λ_a అనేది a యొక్క పంక్తిలో a కు కుడి ప్రక్కన గల మూలకాల క్రమం ద్వారా నిర్దేశింపబడిన ప్రస్తారము అవుతుంది. ఎబీలియన్ సమూహాలకు ఎడమ క్రమ ప్రాతినిధ్యము, కుడి క్రమ ప్రాతినిధ్యము ఒకటే అవుతాయి.

11.8 సహ సమితుల సమూహాలు :

11.8.1 నిర్వచనము : S అశూన్య సమితి అనుకొనుము. S యొక్క ఒక వియుక్త అశూన్య ఉప సమితుల సముదాయము P, ఆ సముదాయములోని అన్ని సమితుల సమ్మేళనము S కు సమానమయ్యేటట్లుగా ఉంటే P ను S కు ఒక విభజనము (Partition) అంటాము. P లోని ప్రతి సమితి విభాగం P లోని ఒక ఖండము (Block or Cell) అంటాము. ఒక అశూన్య సమితి S పై ఏ తుల్య సంబంధమైనా, తుల్య వర్గాలుగా S కు ఒక విభజనను ఏర్పరుస్తుంది. ఇంకా S ను ఏ విభజన అయినా దానిలోని ఖండాలు తుల్యవర్గాలుగా ఒక తుల్య సంబంధాన్ని నిర్ణయిస్తుంది. ఒక ఖండంలోని ప్రతి మూలకాన్ని ఆ ఖండానికి ప్రతినిధి అంటాము. a అనే మూలకం ప్రాతినిధ్యం వహించే ఖండాన్ని B_a తో సూచిస్తాము.

11.8.2 నిర్వచనము : సమూహం G కు P ఒక విభజనము అనుకొనుము. B_r, B_{sa}, r, s లు ప్రాతినిధ్యం వహించే P లోని రెండు ఖండములు అనుకొనుము. ఖండములు B_r, B_s ల లబ్ధము B_r, B_s ను B_r లోని ఒక ప్రతినిధితో B_s లోని ఒక ప్రతినిధి యొక్క లబ్ధము ప్రాతినిధ్యం వహించే ఖండముగా నిర్వచిస్తాము. B_r లోని ఏ ప్రతినిధితోనైనా B_s లోని ఏ ప్రతినిధి యొక్క లబ్ధమైనా ఒకే ఖండము B_t కు ప్రాతినిధ్యం వహిస్తే ఖండముల గుణకారం B_rB_s స్పష్టముగా నిర్వచితమైతే, యీ గుణకారాన్ని, G లోని పరిక్రియ ద్వారా, ప్రేరిత పరిక్రియ అంటాము.

11.8.3 సిద్ధాంతము : సమూహం G కు P ఒక విభజనము, ప్రేరిత పరిక్రియతో P ఒక సమూహము అయితే G లోని తత్సమ మూలకం e ప్రాతినిధ్యం వహించే ఖండము G కి ఉప సమూహమవుతుంది.

ఉపపత్తి : e ప్రాతినిధ్యం వహించే ఖండం B_e

$a \in G$ కు a ప్రాతినిధ్యం వహించే ఖండం B_a

$a \in B_a, e \in B_e, \ ae = a \in B_a$

కనుక $B_a B_e = B_a$

ఇదే విధముగా $B_e B_a = B_a$ కనుక P లో B_e తత్సమ మూలకము.

$\therefore \ B_e B_e = B_e$

కనుక G లోని పరిక్రియ దృష్ట్యా B_e సంవృతము.

$e \in B_e$.

$a \in B_e$ అనుకొనుము. a^{-1} ప్రాతినిధ్యం వహించే ఖండము $B_{a^{-1}}$.

$$a \in B_e, \ a^{-1} \in B_{a^{-1}} \Rightarrow e = a a^{-1} \in B_e B_{a^{-1}} = B_{ea^{-1}} = B_{a^{-1}}$$

$$\Rightarrow B_{a^{-1}} = B_e$$

$$\Rightarrow a^{-1} \in B_e$$

$\therefore$ G కు B_e ఉప సమూహము.

11.8.4 నిర్వచనము : సమూహము G కు H ఒక ఉప సమూహము $a \in G$ అనుకొనుము.

a చే H యొక్క ఎడమ సహసమితి aH ను

$aH = \{ah / h \in H\}$ గా నిర్వచిస్తాము.

a చే H యొక్క కుడి సహసమితి Ha ను

$Ha = \{ha/h \in H\}$ గా నిర్వచిస్తాము.

G ఎబీలియన్ అయితే $Ha = aH$ అవుతుంది.

11.8.5 ఉదాహరణ : p ఒక ధన పూర్ణాంకము. సాధారణ సంకలనం $+$తో సమూహం Z కు pZ ఒక ఉప సమూహము. Z లో pZ యొక్క సహ సమితులను కనుక్కొందాము.

ఏ పూర్ణాంకము n కైనా $pn + pZ = pZ$.

$x \in Z \Rightarrow \exists\, n, r \in Z \ni x = r + pn,\ 0 \le r < p$

$$\therefore x + pZ = r + pn + pZ = r + (pn + pZ)$$

$$= r + pZ$$

$\therefore$ సహ సమితుల సమితి $\{0 + pZ = pZ, 1 + pZ, 2 + pZ, \cdots\cdots (p-1) + pZ\}$.

11.8.6 SAQ : ఒక ఎబీలియన్ సమూహానికి H ఒక ఉప సమూహమైతే H యొక్క ప్రతి ఎడమ (కుడి) సహ సమితి ఒక కుడి (ఎడమ) సహ సమితి అవుతుందని చూపుము.

11.8.7 సిద్ధాంతము : G ఒక సమూహము, G కు P ఒక విభజనము అనుకొనుము. ప్రేరిత పరిక్రియతో P ఒక సమూహమయితే ఎడమ సహ సమితుల (కుడి సహసమితుల) సమితి P అయ్యేటట్లు G కు ఒక ఉప సమితి ఉంటుంది.

ఉపపత్తి : G లోని తత్సమ మూలకం e అనుకొనుము. సిద్ధాంతము 11.8.3 నుండి G కు B_e ఒక ఉప సమూహము.

$a \in G$ అనుకొనుము.

$a \in B_a,\ e \in B_e,\ B_a\ B_e = B_a \Rightarrow\ ax \in B_a \ \ \forall\ \ x \in B_e$.

$\therefore\ aB_e \subseteq B_a$ ----------- (1)

$x \in B_a$ అనుకొనుము. $a^{-1} \in B_{a^{-1}},\ B_{a^{-1}} B_a = B_{a^{-1}a} = B_e$

$$\Rightarrow a^{-1}x \in B_e \Rightarrow a^{-1}x = b \in B_e$$

$$\Rightarrow x = ab \in aB_e$$

$\therefore\ B_a \subseteq a\,B_e$ ----------- (2)

(1), (2)ల నుండి $B_a = a\,B_e$.

ఇదే విధంగా $B_a = B_e a$ అని ఋజువు చేయవచ్చును.

కనుక $aB_e = B_e a$.

11.8.8 సిద్ధాంతము : సమూహము G కు H ఒక ఉప సమూహమనుకొందాము. G పై H మాపంగా, సంబంధాలు $\equiv_\ell, \equiv_r$ లను

$$a \equiv_\ell b \pmod{H} \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$$

$a \equiv_r b \pmod{H} \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$ గా నిర్వచిస్తే $\equiv_\ell, \equiv_r$ లు

G పై తుల్య సంబంధాలవుతాయి. G లోని తత్సమ మూలకం e అయితే $\equiv_\ell$ mod H దృష్ట్యాను, $\equiv_r$ mod H దృష్ట్యా e ఉండే తుల్య వర్గం H అవుతుంది.

$\equiv_\ell$ ను H మాపంగా ఎడమ సర్వ సమానత అంటాము.

$\equiv_r$ ను H మాపంగా కుడి సర్వ సమానత అంటాము.

ఉపపత్తి : $\equiv_\ell$ పరావర్తనము (Reflexive) :

$a^{-1}a = e \in H \ \forall \ a \in G$.

$\therefore \ a \equiv_\ell a \pmod{H}$ for all $a \in G$.

$\equiv_\ell$ సౌష్ఠవము (Symmetric) :

$$a \equiv_\ell b \pmod{H} \Rightarrow a^{-1} b \in H \Rightarrow \left(a^{-1}b^{-1}\right) = b^{-1}\left(a^{-1}\right)^{-1} = b^{-1}a \in H$$

$$\Rightarrow b \equiv_\ell a \pmod{H}$$

$$\therefore a \equiv_\ell b \pmod{H} \Rightarrow b \equiv_\ell a \pmod{H}$$

$\equiv_\ell$ సంక్రమము (Transitive) :

$$a \equiv_\ell b \pmod{H}, b \equiv_\ell c \pmod{H}$$

$$\Rightarrow a^{-1} b \in H, b^{-1} c \in H$$

$$\Rightarrow a^{-1}b \cdot b^{-1} c = a^{-1} c \in H \Rightarrow a \equiv_\ell c \pmod{H}$$

కనుక $\equiv_\ell \pmod{H}$ అనేది G పై తుల్య సంబంధము.

G లోని తత్సమ మూలకం e అయితే $\equiv_\ell$ mod H దృష్ట్యా e ఉండే తుల్య వర్గము (ఖండము) B_e అనుకొందాము.

$x \in B_e \Leftrightarrow x \equiv_{\ell} e\,(\text{mod } H) \Leftrightarrow x^{-1}e = x^{-1} \in H \Leftrightarrow x \in H$

కనుక $B_e = H$

ఇదే విధంగా $\equiv_r$ mod H, G పై తుల్య సంబంధమని, e యొక్క తుల్య వర్గం H అని ఋజువు చేయవచ్చును.

11.8.9 సిద్ధాంతము : సమూహం G కు H ఒక ఉప సమూహమనుకొనుము. అపుడు

(i) $\equiv_{\ell}(\text{mod}\,H)$ దృష్ట్యా G యొక్క తుల్య వర్గాలు G లో H యొక్క ఎడమ సహ సమితులవుతాయి.

(ii) $\equiv_r(\text{mod}\,H)$ దృష్ట్యా G యొక్క తుల్య వర్గాలు G లో H యొక్క కుడి సహ సమితులవుతాయి.

(iii) G లో H యొక్క ఏ సహసమితి నుండి ఏ సహ సమితికైనా ఒక ద్విగుణ ప్రమేయం ఉంటుంది.

ఉపపత్తి : $a \in G$ కి, $\equiv_{\ell}(\text{mod}\,H)$ దృష్ట్యా a యొక్క తుల్యవర్గం $\bar{a}$ అనుకొనుము.

$$\bar{a} = \{x \in G / a \equiv_{\ell} x(\text{mod}\,H)\}$$

$$= \{x \in G / a^{-1}x \in H\}$$

$$= \{x \in G / a^{-1}x = h \in H\} = \{x \in G / x = ah \text{ for some } h \in H\}$$

$$= aH$$

ఇదే విధంగా $\equiv_r(\text{mod}\,H)$ దృష్ట్యా తుల్యవర్గాలు G లో H యొక్క కుడి సహసమితులవుతాయని ఋజువు చేయవచ్చును.

$a \in G$ కు,

$\lambda_a : H \to aH$ ప్రమేయాన్ని

$h\lambda_a = ah$ గా నిర్వచిస్తే λ_a ద్విగుణ ప్రమేయమవుతుంది. .... (1)

$\rho_a : H \to Ha$ ను $h\rho_a = ha$ గా నిర్వచిస్తే ρ_a ద్విగుణ ప్రమేయమవుతుంది.

ఒక ద్విగుణ ప్రమేయం యొక్క విలోమము, రెండు ద్విగుణ ప్రమేయాల సంయోజనము కూడ ద్విగుణ ప్రమేయాలవుతాయి. కనుక (1), (2)ల నుండి G లోని H యొక్క ఏ సహ సమితినుండైనా ఏ సహ సమితి పైకైనా ద్విగుణ ప్రమేయం ఉంటుంది.

11.8.10 ఉదాహరణ : ఉదాహరణ 10.4.10లోని సమూహం S_3ని తీసుకొనుము. S_3 యొక్క గుణకార పట్టిక

	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_0	μ_2	μ_3	μ_1
ρ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	μ_3	μ_1	μ_2
μ_1	μ_1	μ_3	μ_2	ρ_0	ρ_2	ρ_1
μ_2	μ_2	μ_1	μ_3	ρ_1	ρ_0	ρ_2
μ_3	μ_3	μ_2	μ_1	ρ_2	ρ_1	ρ_0

$H = \{\rho_0, \mu_1\}$, S_3 కు ఉప సమూహము. H యొక్క ఎడమ సహ సమితులు $H = \{\rho_0, \mu_1\}$, $\rho_1 H = \{\rho_1, \mu_2\}$, $\rho_2 H = \{\rho_2, \mu_3\}$ లు అవుతాయి.

$$\rho_0 \in H,\ \rho_1 \in H,\ \rho_0 \rho_1 = \rho_1 \in \rho_1 H$$

$$\mu_1 \in H,\ \rho_1 \in \rho_1 H,\quad \mu_1 \rho_1 = \mu_3 \in \rho_2 H,\ \rho_1 H \neq \rho_2 H$$

కనుక ఇక్కడ ఎడమ సహ సమితుల పై ప్రేరిత గుణకార పరిక్రియ స్పష్టంగా నిర్వచితం కాదు.

ఇపుడు సహ సమితుల పై ప్రేరిత గుణకార పరిక్రియ స్పష్టంగా నిర్వచితమయ్యే ఒక ఉదాహరణను చూద్దాము.

11.8.11 ఉదాహరణ : $\langle Z_6, +_6 \rangle$కు $H = \{0,3\}$ ఒక ఉప సమూహము. $\langle Z_6, +_6 \rangle$ వినిమయ సమూహము. H యొక్క సహసమితులు $H = \{0, 3\}, 1 + H = \{1,4\}, 2 + H = \{2,5\}$ అవుతాయి. ప్రేరిత పరిక్రియతో యీ క్రిందివి నిజమని సరి చూడవచ్చును.

$$H + (1 + H) = 1 + H$$

$$(1 + H) + H = 1 + H$$

$$(1 + H) + (2 + H) = H,$$

$$(2 + H) + (1 + H) = H,$$

$$H + (2 + H) = 2 + H$$

$$(2 + H) + H = 2 + H$$

$$H + H = H$$

$$(1 + H) + (1 + H) = 2 + H$$

$$(2+H)+(2+H)=1+H$$

కనుక H యొక్క సహ సమితుల పై ప్రేరిత పరిక్రియ స్పష్టంగా నిర్వచితమై ఒక మూడు మూలకాలు గల సమూహాన్నిస్తుంది.

11.9 సహ సమితుల అనువర్తనలు:

సహ సమితుల ఒక అనువర్తనగా యీ క్రింది సిద్ధాంతాన్ని చూడవచ్చును.

11.9.1 సిద్ధాంతము (లెగ్రాంజ్) : G ఒక పరిమిత సమూహం అయితే G యొక్క ఏ ఉప సమూహం యొక్క తరగతి అయినా G యొక్క తరగతిని భాగిస్తుంది.

ఉపపత్తి : సమూహం G యొక్క తరగతి $O(G)=n$ అనుకొనుము.

G కు H ఒక ఉప సమూహమనుకొనుము.

$O(H)=m,\ H=\{h_1, h_2, ..., h_m\}$ అనుకొనుము.

సిద్ధాంతము **11.8.9** నుండి H యొక్క విభిన్న ఎడమ సహ సమితులు వియుక్తాలు.

$a \in H$ అనుకొనుము. $ah_i = ah_j \Rightarrow h_i = h_j$, (ఎడమ కొట్టివేత న్యాయం)

కనుక aH లో m విభిన్న మూలకాలుంటాయి.

$$aH = \{ah_1, ah_2, \cdots, ah_m\}$$

G పరిమిత సమితి గనుక H యొక్క విభిన్న ఎడమ సహ సమితుల సంఖ్య పరిమితము.

G లో H యొక్క అన్ని విభిన్న ఎడమ సహ సమితులు

$a_1H, a_2H, \cdots, a_KH$ అనుకుంటే

$$G = \bigcup_{i=1}^{K} a_i H, \quad n = O(G) = \sum_{i=1}^{K} O(a_i H) = \sum_{i=1}^{K} m = mK$$

$\therefore\ n = mK$

కనుక n ను m భాగిస్తుంది.

11.9.2 ఉప సిద్ధాంతము : ఒక సమూహం యొక్క తరగతి ప్రధానాంకమయితే ఆ సమూహము చక్రీయ సమూహమవుతుంది.

ఉపపత్తి : సమూహం G యొక్క తరగతిని ప్రధాన సంఖ్య p అనుకొనుము. అపుడు G లోని తత్సమ మూలకం e తో సమానం కాని ఇంకొక మూలకం a, G లో ఉంటుంది. $O(a) = m$ అనుకొనుము. $a \neq e$ కనుక $m \geq 2$

అవుతుంది. $H=\langle a\rangle$ అనుకొంటే $O(H)=m$. లెగ్రాంజ్ సిద్ధాంతం ప్రకారం $m|p$. p ప్రధానాంకం. అందువలన $m=p$.

$$\therefore O(H)=p.\ H\subseteq G,\ O(H)=O(G)=p\Rightarrow H=G$$

$\therefore G=\langle a\rangle$ చక్రీయ సమూహము.

11.9.3 SAQ : p ప్రధానాంకం అయితే, p తరగతిగా ఒకే ఒక సమూహం (తుల్య రూపత వరకు) ఉంటుందని చూపుము.

11.9.4 **సిద్ధాంతము :** ఒక పరిమిత సమూహం యొక్క తరగతిని ఆ సమూహంలోని ప్రతి మూలకం యొక్క తరగతి భాగిస్తుంది.

ఉపపత్తి : G పరిమిత సమూహము, $O(G)=n$ అనుకొనుము.

G లోని తత్సమ మూలకం e అనుకొనుము.

a చే జనితమయిన ఉప సమూహాన్ని H అనుకొనుము.

$$H=\left\{a^n/n\in Z\right\}.$$

$1\le r\le m,\ 1\le s\le m,\ r>s,\ a^r=a^s$ అయితే $a^{r-s}=a^0=e,\ r-s<m$ అవుతుంది. ఇది a యొక్క తరగతి m అనే దానికి విరుద్ధత. కనుక $a,a^2,\cdots\cdots,a^{m-1},a^m=e$ లు విభిన్నాలు. t పూర్ణాంకమయితే $t=mq+r,0\le r<m$ అయ్యేటట్లు పూర్ణాంకాలు m, r లు ఉంటాయి.

$$a^t=a^{mq+r}=\left(a^m\right)^q a^r=e^q a^r=ea^r=a^r$$

కనుక $H=\left\{e, a, a^2,\cdots\cdots,a^{m-1}\right\}$ $O(H)=m$ లెగ్రాంజ్ సిద్ధాంతము ప్రకారం $m|n$

11.9.5 **నిర్వచనం :** సమూహం G కు H ఒక ఉప సమూహం అనుకొనుము. G లో H యొక్క సూచిక $(G:H)$ ను G లో H యొక్క ఎడమ సహ సమితుల సంఖ్యగా నిర్వచిస్తాము.

11.9.6 **గమనిక :** $(G:H)$ పరిమిత సంఖ్య కావచ్చును లేక అపరిమితం కావచ్చును. G పరిమితమైతే $(G:H)$ కూడ పరిమితమై ప్రతి సహ సమితిలోను $O(H)$ మూలకాలు ఉంటాయి. కనుక

$$(G:H)=\frac{O(G)}{O(H)}$$ అవుతుంది.

11.9.7 **గమనిక :** $(G:H)$ అనేది G లో H యొక్క కుడి సహ సమితుల సంఖ్య అని కూడ చూడవచ్చును. (aH ను Ha^{-1}కు ప్రతి సర్జనం చేసే ప్రమేయం ద్విగుణ ప్రమేయము).

11.9.8 S.A.Q. : $\langle Z_{18}, +_{18}\rangle$లో $\langle 4\rangle$ యొక్క సూచికను కనుగొనుము.

11.9.9 **ఫలితము :** సమూహము Gలో ఉప సమూహం H యొక్క సూచిక λ అయితే అపుడు H యొక్క ఎడమ, కుడి సమితులు ఒకటే.

ఉపపత్తి : $(G:H)=2$ నుండి

$$G = H\bigcup aH = H\bigcup Ha \quad \forall \quad a\in G \setminus H$$

$H\bigcap aH = \phi,\ H\bigcap Ha = \phi$ కనుక

$$aH = Ha\ \forall\ a\in G\setminus H$$

$a\in H$ అయితే $aH = H = Ha$

11.9.10 **ఫలితం :**

(a) n బేసి సంఖ్య అయితే $2n$ తరగతిగా గల ఎబీలియన్ సమూహంలో తరగతి **2**తో ఏకైక మూలకం ఉంటుంది.

(b) n సరి సంఖ్య అయితే (a) నిజము కాదు.

ఉపపత్తి :

(a) G ఎబీలియన్ సమూహము $O(G) = 2n$, n బేసి సంఖ్య అనుకొనుము.

సహాయ సిద్ధాంతము **9.11.22** నుండి Gలో **2** తరగతిగా గల ఒక మూలకం ఉంటుంది.

Gలో రెండు విభిన్న మూలకాలు a, bల తరగతి రెండు అనుకొందాము. G ఎబీలియన్ కనుక a, bలతో జనితమైన G యొక్క ఉప సమూహము.

$H = \langle a,b\rangle = \{e,a,b,ab\}$, $O(H) = 4$ అవుతుంది.

$n = 2K + 1$ అనుకొందాము.

$2n = 4K + 2$ అవుతుంది.

లెగ్రాంజ్ సిద్ధాంతం నుండి $2n = 4K + 2$ను **4** భాగిస్తుంది. ఇది విరుద్ధత కనుక Gలో తరగతి రెండుగా గల మూలకము ఏకైకము.

(b) క్లైయిన్ **4-** సమూహము యొక్క తరగతి 2×2 దీనిలో **2** తరగతిగా **3** మూలకాలు ఉన్నాయి.

11.9.11 **ఫలితము :** కనీసం **2** మూలకాలు ఉండి శుద్ధ అనల్ప ఉప సమూహాలు లేనటువంటి సమూహం ఏదైనా పరిమిత సమూహం అవుతుంది. దాని తరగతి ప్రధానాంకము అవుతుంది.

ఉపపత్తి : G ఒక సమూహము, G లో కనీసం 2 మూలకాలున్నాయి. G కు శుద్ధ అనల్ప ఉప సమూహాలు లేవని అనుకుందాము. G లోని తత్సమ మూలకం e అనుకుందాము. e కాకుండా వేరొక మూలకం G లో ఉంటుంది.

అపుడు $H = \langle a \rangle \neq \{e\}$, G కు ఒక అనల్ప ఉప సమూహం అవుతుంది.

G కు H శుద్ధ ఉప సమూహం కాదు.

కనుక $G = H$.

తద్వారా G చక్రీయ సమూహము అవుతుంది.

G అనంతమనుకుంటే $G \cong \langle Z, + \rangle$

$\langle Z, + \rangle$ కు అనల్ప శుద్ధ ఉప సమూహాలుంటాయి. అందుచే G కు కూడ అనల్ప శుద్ధ ఉపసమూహాలుంటాయి.

ఇది దత్తాంశానికి విరుద్ధము.

$\therefore G$ పరిమిత సమూహమవుతుంది.

$O(G) = n$ అనుకొనుము.

n ప్రధానాంకము కాదనుకుంటే $n = k\ell$ అనుకొనుము.

అపుడు $b = a^k \neq e, O(b) = \ell, 1 < \ell < n$

కనుక G కు $\langle b \rangle$ ఒక శుద్ధ అనల్ప ఉప సమూహమవుతుంది.

ఇది దత్తాంశానికి విరుద్ధత.

కనుక $O(G) = n$ ప్రధానాంకము.

ఉప సమూహాల సూచికలకు సంబంధించి ఒక మౌళిక సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి రుజువు చేద్దాము.

11.9.12 సిద్ధాంతము : G ఒక సమూహము. G కు H, K లు $K \leq H \leq G$, అయ్యేటట్లుగా ఉప సమూహాలు. $(H:K)$, $(G:H)$ రెండూ పరిమితమనుకుందాం.

అపుడు $(G:K)$ పరిమితమై $(G:K) = (G:H)(H:K)$.

ఉపపత్తి : , $(H:K) = s$ అనుకొనుము.

G లో H యొక్క విభిన్న ఎడమ సహ సమితుల సమితి

$\{a_i H / a_i \in G, i = 1, 2, \cdots, r\}$

H లో K యొక్క విభిన్న ఎడమ సహ సమితుల సమితి $\{b_jK/b_j \in H,\ j=1,2,\cdots s\}$

G లో K యొక్క విభిన్న ఎడమ సహ సమితుల సమితి

$X=\left\{a_ib_jK\Big/\begin{smallmatrix} i=1,2,\cdots,r \\ j=1,2,\cdots,s\end{smallmatrix}\right\}$ అని చూపుదాము.

$$a_ib_jK = a_\ell b_mK$$

$$\Rightarrow (a_\ell\, b_m)^{-1}(a_ib_j) \in K$$

$$\Rightarrow b_m{}^{-1}\, a_\ell{}^{-1}\, a_i\, b_j \in H \quad (\because\ K \subseteq H)$$

$$\Rightarrow a_\ell{}^{-1}\, a_i \in b_mHb_j{}^{-1} \subseteq H.$$

$$\Rightarrow a_iH = a_\ell H \Rightarrow i=\ell$$

ఇపుడు $a_ib_jK = a_ib_mK \Rightarrow b_jK = b_mK \Rightarrow j=m$

$\therefore$ X లోని అన్ని మూలకాలు విభిన్నాలు, $|X| = rs$. G లో K యొక్క ఎడమ సహ సమితి xK అనుకొనుము. ఇపుడు xH అనేది G లో H యొక్క ఎడమ సహ సమితి అవుతుంది.

కనుక ఒక i కు, $xH = a_iH$ అవుతుంది.

అపుడు $a_i{}^{-1}x \in H$ మరియు $a_i{}^{-1}xK$ అనేది H లో K యొక్క ఒక ఎడమ సహ సమితి.

$\therefore a_i{}^{-1}xK = b_jK$ అయ్యేటట్లు ఒక j వుంటుంది.

దీని నుండి $xK = a_ib_jK \in X$ అవుతుంది.

కనుక G లో K యొక్క విభిన్న ఎడమ సహ సమితుల సమితి X అవుతుంది.

$$\therefore\quad (G:K) = |X| = rs = (G:H)(H:K)$$

11.10 S.A.Q.లకు సమాధానాలు:

11.4.2 SAQ **సమాధానము :** G పై ~ను, $G_1 \sim G_2 \Leftrightarrow$ G_1, G_2 లు తుల్య రూపాలుగా నిర్వచింపుము.

(a) ~ పరావర్తనమని చూపుట

$G \in$ G అనుకొనుము.

$gI_G = g, \ \forall\, g \in G$ గా, G నుండి G కి, నిర్వచింపబడిన ప్రమేయము అన్వేక ప్రమేయము.

ఇంకా $(g_1 \, g_2) I_G = g_1 g_2 = (g_1 I_G)(g_2 I_G) \forall\, g_1, g_2 \in G$

కనుక I_G G నుండి G కి తుల్యరూపత.

(b) $\sim$ సౌష్ఠవమని చూపుట

$G_1, G_2 \in G$, $G_1 \sim G_2$ అనుకొనుము.

$\phi : G_1 \to G_2$ తుల్యరూపత అనుకొనుము. ϕ యొక్క విలోమం

$\psi : G_2 \to G_1$ అయితే ψ ద్విగుణ ప్రమేయము.

$x, y \in G_2$, $x\psi = g_1$, $y\psi = g_2$ అనుకొనుము.

అపుడు $x = g_1\phi$, $y = g_2\phi$ అవుతాయి.

$$xy = (g_1\phi)(g_2\phi) = (g_1 g_2)\phi$$

కనుక $(xy)\psi = g_1 g_2 = (x\psi)(y_4)$

$\therefore \psi$ ఒక తుల్యరూపత $G_2 \sim G_1$.

(c) $\sim$ సంక్రమమని చూపుట

$G_1, G_2, G_3 \in G$, $G_1 \sim G_2$, $G_2 \sim G_3$

$\phi : G_1 \to G_2, \psi : G_2 \to G_3$ తుల్యరూపతలు అనుకొనుము.

ϕ, ψ ల సంయోజనము.

$\phi\psi : G_1 \to G_3$ అన్వేకము.

$$\begin{aligned} x, y \in G_1, \text{కు } (xy)(\phi\psi) &= ((xy)\phi)\psi \\ &= (x\phi y\phi)\psi \\ &= ((x\phi)\psi)((y\phi)\psi) \\ &= (x(\phi\psi)(y(\phi\psi))) \end{aligned}$$

కనుక $\phi\psi$ తుల్యరూపత $G_1 \sim G_3$.

(a), (b), (c) ల నుండి G పై $\sim$ ఒక తుల్యరూపత.

11.4.4 SAQ **సమాధానము :** ఫలితాన్ని మొదట ధన పూర్ణాంకాలు n కు అను గమనం ద్వారా ఋజువు చేద్దాము.

పూర్ణాంకం 1కి ఫలితం నిజమనేది స్పష్టం.

$$x^{n+1}\phi = \left(x^n x\right)\phi = x^n\phi x\phi = (x\phi)^n (x\phi) = (x\phi)^n$$

కనుక n యొక్క అన్ని ధన పూర్ణాంక విలువలకు ఫలితం నిజము.

n ఋణ పూర్ణాంకమైతే $-n$ ధన పూర్ణాంకము.

సిద్ధాంతము **11.4.4.** నుండి $x^{-1}\phi = (x\phi)^{-1}$ అవుతుంది.

కనుక $x^n\phi = \left(x^{-1}\right)^{-n}\phi = \left(x^{-1}\phi\right)^{-n} = \left((x\phi)^{-1}\right)^{-n} = (x\phi)^n$ అవుతుంది.

కనుక అన్ని పూర్ణాంకాలు n కు ఫలితం నిజమవుతుంది.

11.4.5 SAQ **సమాధానం :** G కు a జనక మూలకం గనుక $x = a^n$ అయ్యేటట్లుగా పూర్ణాంకం n ఉంటుంది.

$$x\phi = a^n\phi = (a\phi)^n.$$

11.5.6 SAQ **సమాధానం :** G_1, G_2 లు ఒకే తరగతి గల చక్రీయ సమూహాలనుకొందాము. అపుడు

(a) G_1, G_2 లు పరిమితమై $O(G) = O(G_2) = n$ కావచ్చు

లేక

(b) G_1, G_2 లు అపరిమిత సమూహాలు కావచ్చును.

సందర్భం (a)లో, సిద్ధాంతము **11.5.3** నుండి G_1, G_2 లు $\langle Z_n, +_n \rangle$ కు తుల్యరూపాలు. S.A.Q. **11.4.2.** నుండి G_1, G_2 లు తుల్యరూపాలు. సందర్భం (b)లలో సిద్ధాంతం **11.5.5** నుండి G_1, G_2 లు $\langle Z, + \rangle$ కు తుల్యరూపాలు. S.A.Q. **11.4.2.** నుండి G_1, G_2 లు తుల్యరూపాలు.

11.8.6 SAQ **సమాధానం :** $aH = \{ah / h \in H\} = \{ha / h \in H\} = Ha$.

11.9.3 SAQ **సమాధానం :** ప్రధానాంకం p తరగతిగా గల సమూహం G అనుకొందాం. ఉప సిద్ధాంతం **11.9.2** నుండి G చక్రీయ సమూహము. సిద్ధాంతం **11.5.3** నుండి $\langle Z_p , +_p \rangle$ కు G తుల్యరూపం.

11.9.8 SAQ **సమాధానం :** $\langle Z_{18}, +_{18}\rangle$లో

$$\langle 4\rangle = \{0,4,8,12,16,2,6,10,14\}$$

$$|\langle 4\rangle| = 9$$

$$|Z_{18}| = 18 = \langle 4\rangle|Z_{18} = \langle 4\rangle|$$

$$= 9|(Z_{18} : \langle 4\rangle)|$$

$$\therefore (Z_{18} : \langle 4\rangle) = 2$$

11.11 అభ్యాసములు:

11.11.1 : క్లెయిన్ **4** - సమూహము V కు $\langle Z_4 , +_4\rangle$ సమూహము తుల్యరూపం కాదనడానికి రెండు కారణాలను తెలుపుము.

11.11.2 : $\phi : G \to G'$ సమూహాల తుల్యరూపత $H \le G$ అయితే G' కు $H\phi = \{h\phi / h \in H\}$ ఒక ఉప సమూహమవుతుంది అని చూపుము.

11.11.3 : ఒక సమూహం నుండి అదే సమూహం పైకి గల తుల్యరూపతను స్వయం తుల్యరూపత అంటాము (Automorphism). $\langle Z_n , +_n\rangle$ సమూహానికి ఎన్ని స్వయం తుల్యరూపతలుంటాయి?

(సూచన : SAQ 11.4.5ను ఉపయోగింపుము)

$\langle z, +\rangle$కు ఎన్ని స్వయం తుల్యరూపతలుంటాయి?

11.11.4 : $\langle G, \cdot\rangle$ ఒక సమూహమనుకొనుము. G లో ఇంకొక యుగ్మ పరిక్రియ $*$ను $a * b = ba \ \forall \ a, b \in G$ గా నిర్వచిస్తే $\langle G, *\rangle$ సమూహమయి, అది $\langle G, \cdot\rangle$తో తుల్యరూపమవుతుందని చూపుము.

11.11.5 : సమూహం G లో ఒక మూలకం g అనుకొనుము. $\forall \ x \in G, \ x i_g = g^{-1} x g$ గా G నుండి G కు నిర్వచింపబడిన ప్రమేయము i_g, G కు స్వయం తుల్యరూపత అని చూపుము. i_g in G కు అంతర స్వయం తుల్యరూపత అంటాము.

11.11.6 : R^* అనేది సాధారణ గుణకారంతో శూన్యేతర వాస్తవ సంఖ్యల సమూహమనుకొనుము. $S = \{x - t / x \in R^*\}$ అనుకొనుము. R^* లోని ప్రతి x ను $x - t$ గా పేరు మార్పిడి చేస్తే అవి S యొక్క మూలకాలవుతాయి. $R^*, \langle S, *\rangle$లు తుల్య రూప సమూహాలయ్యేటట్లుగా S లో యుగ్మ పరిక్రియ $*$ను నిర్వచింపుము.

(సూచన $x\phi = x - t$ గా R^* నుండి S కు నిర్వచింపబడిన ప్రమేయం ϕను తీసుకోండి.

$(xy)\phi = (x\phi)*(y\phi)\forall x, y \in R^*$ అయ్యేటట్లుగా $*$ను నిర్వచించండి. $\langle S, *\rangle$లలో $1-t$ తత్సమ మూలకము $x \in S$కు విలోమం $\dfrac{1-tx-t^2}{t+x}$ అని చూపండి)

11.11.7 : తుల్యరూపం వరకు 19 తరగతిగా గల సమూహాలు ఎన్ని ఉన్నాయి?

11.11.8 : సమూహం Gకు ఒక ఉప సమూహం H అనుకొనుము. Gలో H యొక్క ఎడమ సహ సమితుల సమితి నుండి H యొక్క కుడి సహ సమితుల సమితికి ఒక ద్విగుణ ప్రమేయము ఉంటుందని చూపండి.

(సూచన - $aH \to Ha^{-1}$ ప్రమేయాన్ని ప్రయత్నించండి.)

11.11.9 : $n > 1$ కు S_nలో A_n యొక్క సూచికను కనుగొనుము.

11.11.10 : G ఒక nవ తరగతి గల పరిమిత సమూహము, Gలో తత్సమ మూలకం e అనుకొనుము. $a^n = e \;\forall\; a \in G$ అని చూపుము.

11.11.11 : G ఒక n తరగతిగా గల పరిమిత చక్రీయ సమూహమనుకొనుము. $d \mid n$ అయితే Gకు d తరగతి గల ఏకైక ఉప సమూహముంటుందని చూపుము.

11.12 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు:

11.12.1 : $\phi: G \to G'$ సమూహాల తుల్యరూపత అయితే $e\phi = e'$, $a^{-1}\phi = (a\phi)^{-1} \;\forall\; a \in G$ అని ఋజువు చేయండి.

(G యొక్క తత్సమ మూలకం e, G' యొక్క తత్సమ మూలకం e').

11.12.2 : సంకలనంతో సమూహం R, గుణకారంతో సమూహం R^+లు తుల్య రూపాలని చూపుము.

11.12.3 : ఒకే తరగతి గల ఏ రెండు చక్రీయ సమూహాలయినా తుల్యరూపాలని చూపుము.

11.12.4 : గుణకారంతో శూన్యేతర వాస్తవ సంఖ్యల సమూహం R^*, సంకలనంతో వాస్తవ సంఖ్యల సమూహం Rలు తుల్య రూపాలు కావని చూపండి.

11.12.5 : కెయిలే సిద్ధాంతాన్ని ప్రతిపాదించి, ఋజువు చేయండి.

11.12.6 : $(a)\langle Z, +\rangle, (b), \langle Z_g, +_8\rangle$ల యొక్క అన్ని స్వయం తుల్యరూపతలను కనుగొనండి.

11.12.7 : ఎడమ సహ సమితుల సమితి పై ప్రేరిత పరిక్రియ స్పష్టముగా నిర్వచింపబడనట్లుగా ఒక సమూహం G యొక్క ఉప సమూహం Hకి ఉదాహరణనిమ్ము.

11.12.8 : సమూహం G కు H ఉప సమూహమనుకొనుము. G పై $\equiv_\ell \bmod H$ సంబంధాన్ని నిర్వచింపుము. ఈ సంబంధము G పై ఒక తుల్య సంబంధమని అది G ను H యొక్క ఎడమ ఉప సమితులుగా విభజన చేస్తుందని చూపుము. G లోని తత్సమ మూలకం యొక్క తుల్య వర్గాన్ని కనుగొనండి.

11.12.9 : పరిమిత సమూహాలకు లెగ్రాంజ్ సిద్ధాంతాన్ని ప్రతిపాదించి ఋజువు చేయండి.

11.12.10 : సమూహం G లో **2** సూచిక గల ఉప సమూహం H అయితే G లో H యొక్క ప్రతి ఎడమ సహ సమితి ఒక కుడి సహ సమితి అవుతుందని చూపుము. $n > 1$ కు S_n లో A_n యొక్క సూచికను కనుగొనుము.

11.13 ప్రామాణిక గ్రంథాలు:

1. A first course in Abstract Algebra by J.B. Fraleigh, Narosa Pub. Home, 1988
2. Topoics in Algebra, by I.N. Herstein; Wiley Eastern Ltd., New Delhi, 1975
3. Basic Algebra, Vol. 1 & 2, by N. Jacobson, Hindustan Pub. Company 1980.
4. A Text Book of Modern Abstract Algebra; by Santi Narayan; S.Chand & Co.

పాఠ్య రచయిత

Smt. N. Rajani

పాఠం - 12

అభిలంబ ఉప సమూహాలు - వ్యుత్పన్న సమూహాలు

12.1 పాఠ్య లక్ష్యం:

వ్యుత్పన్న సమూహాలు, సమూహాల యొక్క సమ రూపతలు అనే భావనలను విద్యార్థులకు ఈ పాఠంలో పరిచయం చేస్తాము. సమ రూపతా మౌలిక సిద్ధాంతాన్ని అధ్యయనం చేసి, విద్యార్థులు ఒక సమూహం యొక్క వ్యుత్పన్న సమూహాలు దాని యొక్క సమరూపతా ప్రతి బింబాలే అని గ్రహిస్తారు.

12.2 పాఠ్య నిర్మాణం:

ఈ పాఠంలో యీ క్రింది అంశాలున్నాయి.

12.3 పరిచయం:

ఈ పాఠంలో ఒక సమూహం G యొక్క ఉప సమూహం H యొక్క ఎడమ సహ సమితులకు ప్రేరిత పరిక్రియ స్పష్టంగా నిర్వచింపబడాలంటే H యొక్క ప్రతి ఎడమ సహ సమితి ఒక కుడి సహసమితి కావడం ఆవశ్యకము మరియు పర్యాప్తము అని నిరూపిస్తాము. ప్రేరిత పరిక్రియ స్పష్టంగా నిర్వచించబడితే, యీ పరిక్రియతో H యొక్క సహ సమితుల సమితి ఒక సమూహమవుతుందని నిరూపిస్తాము. స్వయం తుల్యరూపత, అంతర స్వయం తుల్యరూపత, అభిలంబ ఉప సమూహాలను నిర్వచిస్తాము. సమూహం Gకు ఒక అభిలంబ ఉప సమూహాలను నిర్వచిస్తాము. సమూహం Gకు ఒక అభిలంబ ఉప సమూహం Nతో వ్యుత్పన్న సమూహం G/Nను నిర్వచిస్తాము. సరళ సమూహాన్ని నిర్వచించి, $n \geq 5$కు ఏకాంతర సమూహం A_n సరళ సమూహమని ఋజువు చేస్తాము. సిద్ధాంతాలు 12.6.15 మరియు 12.7.1 (సమరూపతా మౌలిక సిద్ధాంతము) ద్వారా సమూహం G యొక్క వ్యుత్పన్న సమూహాల సముదాయము. దాని యొక్క సమరూపతా ప్రతిబింబాల సముదాయమవుతుందని ఋజువు చేస్తాము. అభ్యాసములు, స్వయం మదింపు ప్రశ్నలు విరివిగా నీయబడినాయి.

12.4 సహ సమితుల సమూహము:

12.4.1 సహాయ సిద్ధాంతము :- సమూహం Gకు ఒక ఉప సమూహం H, Gలో H యొక్క ఎడమ (కుడి) సహ సమితులకు ప్రేరిత పరిక్రియ స్పష్టంగా నిర్వచింపబడినది అనుకొనుము. అపుడు ఈ ప్రేరిత పరిక్రియతో G లో H యొక్క ఎడమ (కుడి) సహ సమితుల సమితి ఒక సమూహామవుతుంది.

ఉపపత్తి :- $a, b \in G$ కు aH కు, a, bH కు b ప్రాతినిధ్యం వహిస్తాయి. ప్రేరిత పరిక్రియ స్పష్టంగా నిర్వచింపబడింది.

కనుక

$$(aH)(bH) = abH$$ అవుతుంది.

కనుక ప్రేరిత పరిక్రియ Gలో H యొక్క ఎడమ సహ సమితుల సమితి పై యుగ్మ పరిక్రియ అవుతుంది.

సహచర్య న్యాయము :-

$$(aH)(bHcH) = aH(bcH) = a(bc)H$$

$$= (ab)cH$$

$$= (aHbH)cH \ \forall \ a, b, c \in G$$

తత్సమ మూలకం :- Gలోని తత్సమ మూలకాన్ని e అనుకొనుము.

$$eH\,aH = eaH = aH = aeH = aH\,eH$$

కనుక $eH = H$ తత్సమ మూలకము.

విలోమం :- $aHa^{-1}H = aa^{-1}H = eH = H = a^{-1}aH = a^{-1}HaH \forall a \in G$

$\therefore$ aHకు విలోమం $a^{-1}H$ అవుతుంది.

కనుక ఎడమ సహ సమితులలో ప్రేరిత పరిక్రియ స్పష్టంగా నిర్వచించబడితే ఎడమ సహ సమితుల సమితి ప్రేరిత పరిక్రియతో ఒక సమూహామవుతుంది.

ఇదే విధంగా కుడి సహ సమితులలో ప్రేరిత పరిక్రియ స్పష్టంగా నిర్వచింపబడితే కుడి సహసమితుల సమితి ప్రేరిత పరిక్రియతో ఒక సమూహామవుతుందని ఋజువు చేయవచ్చును.

ఇపుడు ఎడమ (కుడి) సహ సమితులలో ప్రేరిత పరిక్రియ స్పష్టంగా నిర్వచింపబడటానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమం కుడి, ఎడమ సహ సమితులకు భేదం లేకపోవడం అని చూస్తాము.

12.4.2 సిద్ధాంతం :- సమూహం Gకు H ఉప సమూహమనుకొనుము. H యొక్క సహ సమితులలో ప్రేరిత ప్రక్రియ స్పష్టంగా నిర్వచించబడతాయి. ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమం H యొక్క ప్రతి ఎడమ (కుడి) సహ సమితి ఒక కుడి (ఎడమ) సహ సమితి కావడం.

ఉపపత్తి :- G లో తత్సమ మూలకం e అనుకొనుము.

H యొక్క ఎడమ సహ సమితులలో ప్రేరిత పరిక్రియ స్పష్టంగా నిర్వచింపబడిందనుకొందాము.

e ప్రాతినిధ్యం వహించే విభజన ఖండము $eH = H = He$

$a \in G$ కు a ప్రాతినిధ్యం వహించే విభజన ఖండము aH. సహాయ సిద్ధాంతము **12.4.1** నుండి G లో H యొక్క ఎడమ సహ సమితుల సమితి ప్రేరిత పరిక్రియతో ఒక సమూహమవుతుంది.

సిద్ధాంతము **11.8.7.**లో B_a స్థానంలో aH ను B_e స్థానంలో $eH = H$ ను తీసుకుంటే

$$aH = a \cdot (eH),\ a \cdot (eH) = (eH) \cdot a = H \cdot a = Ha$$

$\therefore aH = Ha$ అవుతుంది.

విపర్యంగా G లో H యొక్క ప్రతి ఎడమ సహ సమితి ఒక కుడి సహసమితి అవుతుందనుకొనుము.

ముందు ప్రతి $a \in G$ కు $aH = Ha$ అని చూపుదాం.

దత్తాంశం నుండి ఒక $g \in G$ కు

$aH = Hg$ అవుతుంది.

$$a \in aH = Hg \Rightarrow a \in Hg \Rightarrow Ha = Hg$$

$$\therefore aH = Ha\ \forall\ a \in G$$

ఇపుడు G లో H యొక్క సహ సమితులలో ప్రేరిత పరిక్రియ స్పష్టంగా నిర్వచింపబడిందని చూపుదాము.

$a_1, a_2 \in aH,\ b_1, b_2 \in bH$ అనుకొనుము.

$a_1b_1 \in a_2b_2H$ అని చూపితే సరిపోతుంది.

$$a_1, a_2 \in aH \Rightarrow a_1H = aH = a_2H \Rightarrow a_1H = a_2H$$

$\Rightarrow H$ లో ఒక h_1కు $a_1 = a_2h_1$ అవుతుంది.

అదే విధంగా H లో ఒక h_2కు $b_1 = b_2h_2$ అవుతుంది.

$a_1b_1 = a_2h_1b_2h_2, \quad Hb_2 = b_2H$ కనుక $h_1b_2 \in Hb_2$

$$\Rightarrow h_1b_2 \in b_2H$$

$\Rightarrow H$ లో ఒక h_3 కు $h_1b_2 = b_2h_3$ అవుతుంది.

$$a_1b_1 = a_2b_2h_3h_2 \in a_2b_2H$$

$\therefore a_1 b_1 H = a_2 b_2 H$

దీని నుండి H యొక్క ఎడమ సహ సమితులలో ప్రేరిత పరిక్రియ స్పష్టంగా నిర్వచింపబడినదని తెలుస్తున్నది. అంతర స్వయం తుల్య రూపతలు, అభిలంబ ఉప సమూహాలు మరియు వ్యుత్పన్న సమూహాలు.

12.5.1 **నిర్వచనము :-** సమూహము G నుండి G కు గల తుల్యరూపతను G కు ఒక స్వయం తుల్యరూపత అంటాము.

12.5.2 **సిద్ధాంతము :-** G ఒక సమూహము, $g \in G$ అనుకొనుము.

$i_g : G \to G$ ప్రమేయాన్ని $xi_g = g^{-1}xg \ \forall \ x \in G$ గా నిర్వచిస్తే i_g, G కు ఒక స్వయం తుల్యరూపత అవుతుంది.

ఉపపత్తి : ప్రమేయము $i_g : G \to G$ కు నిర్వచింపబడినది.

$$xi_g = yi_g \Rightarrow g^{-1}xg = g^{-1}yg \Rightarrow g^{-1}x = g^{-1}y \Rightarrow x = y$$

కనుక i_g అన్వేకము

$y \in G$ అయితే $x = gyg^{-1} \in G$ అయి

$$xi_g = g^{-1}\left(gyg^{-1}\right)g = \left(g^{-1}g\right)y\left(g^{-1}g\right) = eye = y$$

కనుక i_g సంగ్రస్తము.

$$(xy)i_g = g^{-1}(xy)g = g^{-1}xgg^{-1}yg$$

$$= \left(g^{-1}xg\right)\left(g^{-1}yg\right) = xi_g \ yi_g$$

కనుక i_g ఒక సమరూపత.

$\therefore$ i_g, G యొక్క ఒక స్వయం తుల్యరూపత.

12.5.3 **నిర్వచనము :** G ఒక సమూహము, $g \in G$ అనుకొనుము. G నుండి G కు, $xi_g = g^{-1} x g \ \forall \ x \in G$ గా నిర్వచించబడిన ప్రమేయము G కు ఒక స్వయం తుల్యరూపత. దీనిని G చే సంయుగ్మత క్రింద అంతర స్వయం తుల్యరూపత అంటాము.

12.5.4 **నిర్వచనము :** సమూహము G కి H ఒక ఉప సమూహమనుకొనుము. $a^{-1}Ha = H \ \forall \ a \in G$ అయితే H ను G కు ఒక అభిలంబ (లేక నిశ్చర) సమూహము అంటాము.

12.5.5 **ఫలితము :** సమూహము G కు H ఒక ఉప సమూహమనుకొనుము. క్రింది ప్రతిపాదనలు తుల్యములు.

(a) G కు H అభిలంబ ఉప సమూహము.

(b) H యొక్క ప్రతి ఎడమ సహ సమితి H యొక్క ఒక కుడి సహ సమితి అవుతుంది.

(c) H యొక్క ఎడమ (కుడి) సహ సమితులలో ప్రేరిత పరిక్రియ స్పష్టంగా నిర్వచింపబడుతుంది.

ఉపపత్తి : $(a) \Rightarrow (b)$ అభిలంబ ఉప సమూహమనుకొనుము.

$a \in G$ అనుకొనుము.

అపుడు $a^{-1}Ha = H$

ఎడమ వైపున a చే గుణించగా $Ha = aH$ అవుతుంది.

కనుక ప్రతి ఎడమ సహ సమితి ఒక కుడి సహ సమితి అవుతుంది.

$(b) \Rightarrow (a)$

H యొక్క ప్రతి ఎడమ సహ సమితి H యొక్క ఒక కుడి సహ సమితి అవుతుందనుకొనుము.

$a \in G$ అనుకొనుము.

ఒక $b \in G$ కు $a^{-1}H = Hb$ అవుతుంది.

ఇపుడు $a^{-1} \in a^{-1}H \Rightarrow a^{-1} \in Hb \Rightarrow Hb = Ha^{-1}$

కనుక $a^{-1}H = Ha^{-1}$.

కుడి వైపున a తో గుణించగా $a^{-1}Ha = H$ అవుతుంది.

కనుక G కి, H అభిలంబ ఉప సమూహమవుతుంది.

సిద్ధాంతము **12.4.2.** నుండి $(b), (c)$ లు తుల్యములు.

12.5.6 **ఫలితము :** సమూహము G కి, H ఒక ఉప సమూహమనుకొనుము. G కు H అభిలంబ ఉప సమూహం కావడానికి ఆ.ప.ని.

$a^{-1}Ha \subseteq H \ \forall \ a \in G$ కావడం.

ఉపపత్తి : G కు, H అభిలంబ ఉప సమూహమైతే $a^{-1}Ha \subseteq H \ \forall \ a \in G$.

అపుడు $\left(a^{-1}\right)^{-1} Ha^{-1} \subseteq H$.

$h \in H$ అనుకొనుము.

ఒక $h_1 \in H$ కు, $\left(a^{-1}\right)^{-1} ha^{-1} = h_1$ అవుతుంది.

$\Rightarrow h = a^{-1}h_1 a \in a^{-1}Ha$

$\therefore H \subseteq a^{-1}Ha$

$\therefore\ a^{-1}Ha = H$

కనుక G లో H అభిలంబ ఉప సమూహము.

12.5.7 SAQ: ఒక వినిమయ సమూహము యొక్క ఏ ఉప సమూహమైనా అభిలంబ ఉప సమూహమవుతుందని చూపుము.

12.5.8 **ఉదాహరణ :** ఉదా॥ 10.4.10లో ఈ యబడిన S_3కు ఉప సమూహము $H = \{\rho_0, \mu_1\}$ అభిలంబ ఉప సమూహము కాదు.

సమాధానం : $\rho_1^{-1}\mu_1\rho_1 = \rho_2\mu_1\rho_1 = \mu_3\rho_1 = \mu_2$

$\rho_1^{-1}\rho_0\ \rho_1 = \rho_2\ \rho_0\ \rho_1 = \rho_2\,\rho_1 = \rho_0$

$\rho_1^{-1}H\rho_1 = \{\rho_0, \mu_2\} \neq H.$

$\therefore S_3$ కు, H అభిలంబ ఉప సమూహము కాదు.

12.5.9 **నిర్వచనము :** సమూహం G కు H, K లు ఉప సమూహాలనుకొనుము. G యొక్క ఒక అంతర స్వయం తుల్యరూపత i_g కు, $H\,i_g = K$ అంటే $g^{-1}\,Hg = K$ అయితే H, K లను సంయుగ్మాలు అంటాము.

12.5.10 **ఉదాహరణ :** ఉదాహరణ 12.5.8 నుండి $\{\rho_0, \mu_1\}, \{\rho_0, \mu_2\}$ లు S_3లో సంయుగ్మ ఉప సమూహాలు.

12.5.11 SAQ : ఒక సమూహము G లో ఒక అభిలంబ ఉప సమూహాల ఛేధనము G కు అభిలంబ ఉప సమూహమవుతుందని చూపుము.

12.5.12 సమూహము G లో ℓ తరగతిగా గల ఉప సమూహము కనీసం ఒకటి ఉంటుందని అనుకొనుము. అపుడు G లోని ℓ తరగతిగా గల ఉప సమూహాలన్నింటి ఛేధనము G కు అభిలంబ ఉప సమూహమవుతుంది.

సమాధానం : మొదటి ℓ తరగతిగా గల ఉప సమూహం H అయితే $\forall\ x \in G,\ x^{-1}Hx$ కూడా ℓ తరగతిగా గల ఉప సమూహమవుతుందని నిరూపిస్తాము.

$e \in H \Rightarrow x^{-1}ex = x^{-1}x = e \in x^{-1}Hx$

$h_1, h_2 \in H$ కు $h_1 h_2^{-1} \in H$ అవుతుంది.

కనుక $\left(x^{-1} h_1 x\right)\left(x^{-1} h_2 x\right)^{-1} = x^{-1}h_1 x x^{-1} h_2{}^{-1} x = x^{-1} h_1 h_2{}^{-1} x \in x^{-1}Hx$

కనుక G కు $x^{-1}Hx$ కు ఉప సమూహమవుతుంది.

$h\phi = x^{-1}hx \ \forall \ h \in H$ గా నిర్వచించిన ప్రమేయం ϕ H నుండి $x^{-1}Hx$ కు ద్విగుణ ప్రమేయమవుతుంది.

$\therefore H, \ x^{-1}Hx$ లకు తరగతి ℓ అవుతుంది.

$= \{K | G$ కు K, ℓ తరగతి గల ఉప సమూహము $\}$.

దత్తాంశము నుండి A అశూన్య సమితి.

$H = \bigcap_{K \in A} K$ అనుకొనుము.

G కు H ఉప సమూహము.

$x \in G, h \in H$ అనుకొనుము.

$L \in A$ అనుకొనుము.

$\left(x^{-1}\right)^{-1} L x^{-1} \in A$.

కనుక $h \in \left(x^{-1}\right)^{-1} L x^{-1}$

$$\Rightarrow x^{-1}hx \in x^{-1}\left(x^{-1}\right)^{-1} L x^{-1} x = eLe = L$$

కనుక $x^{-1}hx \in L \ \forall \ h \in H$

G కు, H ఒక అభిలంబ ఉప సమూహము.

12.5.13 SAQ : పరిమిత సమూహం G కు ఇచ్చిన తరగతిలో ఒకే ఒక ఉప సమూహం H అయితే G కు H అభిలంబ ఉప సమూహమవుతుందని చూపుము.

12.5.14 SAQ : ప్రమేయాల సంయోజనంతో ఒక సమూహం G యొక్క స్వయం తుల్యరూపతల సమితి ఒక సమూహమై G యొక్క అంతర స్వయం తుల్యరూపతల సమితి ఆ సమూహానికి అభిలంబ ఉప సమూహమవుతుంది.

12.5.15 సమస్య : సమూహం G లో e తత్సమ మూలకం అనుకొనుము.

G కు, $X = \{ g \in G \mid$ అంతర స్వయం తుల్యరూపత $i_g : G \to G$ తత్సమ ప్రమేయం $\}$ అభిలంబ ఉప సమూహమవుతుందని చూపుము.

సాధన : $g \in i_g \Leftrightarrow i_g = i_e \Leftrightarrow x\, i_g = x\, i_e \ \forall\, x \in G$

$\Leftrightarrow g^{-1}xg = e^{-1}xe = exe = x \ \forall x \in G$

$\Leftrightarrow \quad xg = gx \ \forall\, x \in G$

అపుడు $X = \{g \in G / xg = gx \ \forall\, x \in G\}$

$xe = ex \ \forall\, x \in G$ కనుక $e \in X$ అవుతుంది.

$g_1, g_2 \in X$ అనుకొనుము.

అపుడు $g_1 x = x g_1$ మరియు $g_2 x = x g_2 \ \forall\ x \in G$

$g_2 x = x g_2 \Rightarrow g_2 x g_2^{-1} = x g_2 g_2^{-1} = x$

$\Rightarrow g_2^{-1} g_2\ x\ g_2^{-1} = g_2^{-1} x \quad \Rightarrow x g_2^{-1} = g_2^{-1} x \ \forall\, x \in G$

అపుడు $x\left(g_1 g_2^{-1}\right) = \left(x g_1\right) g_2^{-1} = \left(g_1 x\right) g_2^{-1}$

$= g_1\left(x g_2^{-1}\right) = g_1\left(g_2^{-1} x\right) = \left(g_1 g_2^{-1}\right) x \ \forall\ x \in G$

$\therefore g_1 g_2^{-1} \in H$

కనుక X, G కు ఉప సమూహము.

$h \in X, g \in G$ అనుకొనుము.

అపుడు $gh = hg$

$\therefore g^{-1}\, hg = h \in X$

$\therefore$ G కు, H అభిలంబ ఉప సమూహము.

12.5.16 నిర్వచనము : సమూహము G కు, N ఒక అభిలంబ ఉప సమూహమైతే ప్రేరిత పరిక్రియతో G లో N యొక్క సహ సమితుల సమూహాన్ని N మాపంగా(చే) G యొక్క వ్యుత్పన్న సమూహము అంటాము. దీనిని G/N తో సూచిస్తాము. G లో N యొక్క సహ సమితులను N మాపంగా అవశేష వర్గాలు అంటాము.

12.5.17 గమనిక : G/N లో యుగ్మ పరిక్రియ $aNbN = abN \ \forall \ aN, bN \in G/N$

12.5.18 SAQ : సమూహం G కు H ఒక ఉప సమూహము, $a \in G$, అనుకొనుము. $aH = H(Ha = H) \Leftrightarrow a \in H$ అని చూపుము.

12.5.19 ఉదాహరణ : $n \in Z^+$ కు $\langle Z, + \rangle$ సమూహానికి nZ ఉప సమూహం అని తెలుసు. Z ఎబీలియన్ కావటం వలన Z కు nZ అభిలంబ సమూహమవుతుంది.

m పూర్ణాంకమైతే, $m = np + r, 0 \le r < n$ అయ్యేటట్లు పూర్ణాంకాలు p, q, r ఉంటాయి.

$$m + nZ = np + r + nZ = (np + nZ) + r + nZ$$

$$= nZ + (r + nZ) \text{ since } np \in nZ.$$

$$= (0 + rZ) + (r + nZ)$$

$$= (0 + rZ) + nZ = r + nZ$$

కనుక $Z/nZ = \{0 + nZ = nZ, 1 + nZ, \cdots\cdots, (n-1) + nZ\}$

$0 \le m < n$ కు $(m + nZ)\phi_n = m$ గా నిర్వచింపబడిన ప్రమేయం Z/nZ నుండి Z_n కు తుల్యరూపత అవుతుంది.

12.5.20 SAQ : ఒక ఎబీలియన్ సమూహం G కు H ఉప సమూహమైతే G/H ఎబీలియన్ అని బుజువు చేయుము.

12.5.21 సమస్య : సమూహం G లో ప్రతి మూలకం యొక్క తరగతి పరిమితమైతే G ను విమోటన సమూహము అంటాము. G విమోటన సమూహము, G కు H అభిలంబ ఉప సమూహమైతే G/H విమోటన సమూహమని చూపండి.

సాధన : $aH \in G/H$, $a \in G$ అనుకొనుము.

$a^m = e$ అయ్యేటట్లు ధన పూర్ణాంకము m ఉంటుంది..

$(aH)^m = a^m H = eH = H \ (\because e \in H)$

కనుక aH యొక్క తరగతి పరిమితము.

$\therefore G/H$ ఒక విమోటన సమూహము.

12.5.22 సమస్య : S_nకు A_n ఒక అభిలంబ ఉప సమూహమని చూపి S_n/A_n ను గణించుము.

సాధన : $\{1,2,\cdots,n\}$ సమితిపై A_n సరి ప్రస్తారాల సమితి అని, అది S_nకు ఉప సమూహమని మనకు తెలుసు.

$\rho \in S_n$ $\sigma \in A_n$ అనుకొనుము.

$\sigma \in A_n \Rightarrow \rho^{-1} \in A_n$, $\rho^{-1}\sigma\rho \in A_n$

$\rho \notin A_n$ అనుకొనుము.

అపుడు ρ, ρ^{-1}లు బేసి ప్రస్తారాలు , σ సరి ప్రస్తారము.

$\therefore \rho^{-1}\sigma\rho$ సరి ప్రస్తారమవుతుంది.

$\therefore$ $\rho^{-1}\sigma\rho \in A_n$

$\therefore$ $\rho^{-1}A_n\rho \subseteq A_n$.

కనుక S_nకు A_n అభిలంబ ఉప సమూహమవుతుంది.

$\rho \in A_n$ అయితే $\rho A_n = A_n$.

ρ_1, ρ_2లు బేసి ప్రస్తారాలైతే $\rho_1^{-1}\rho_2$ సరి ప్రస్తారము.

కనుక $\rho_1^{-1}\rho_2 A_n = A_n$

$\therefore$ $\rho_1 A_n = \rho_2 A_n$.

కనుక S_n/A_n లో రెండు మూలకాలు మాత్రమే ఉంటాయి.

ρ ఏదైనా బేసి ప్రస్తారమైతే, $S_n/A_n = \{A_n, \rho A_n\}$ S_n/A_n లో గుణకారము యొక్క పట్టిక

	A_n	ρA_n
A_n	A_n	ρA_n
ρA_n	ρA_n	A_n

పట్టిక నుండి $\langle Z_2 , +_2 \rangle$కు S_n/A_n తుల్యరూపంగా ఉంటుంది.

12.5.23 **సూచన :** e తత్సమ మూలకంగా G సమూహమనుకొనుము. అపుడు $\{e\}$, G కు అభిలంబ ఉప సమూహమవుతుంది. $g\{e\} \to g$ చే నిర్దేశితమైన ప్రమేయంతో $G, G/\{e\}$ లు తుల్యరూపాలని తెలుస్తుంది. G కు G అభిలంబ ఉప సమూహము. G/G ఒకే మూలకం గల అల్ప సమూహము.

12.5.24 **సిద్ధాంతము :** చక్రీయ సమూహము యొక్క వ్యుత్పన్న సమూహాలు చక్రీయ సమూహాలవుతాయి.

ఉపపత్తి : a జనక మూలకంగా G ఒక చక్రీయ సమూహమనుకొనుము. G కు H ఉప సమూహమనుకొనుము.

$$xH \in G/N,\ x \in G$$ అనుకొనుము.

$a^n = x$ అయ్యేటట్లుగా ఒక పూర్ణాంకము n ఉంటుంది.

అపుడు $(aH)^n = a^n H = xH$

$\therefore$ G/H కు aH ఒక జనక మూలకం అవుతుంది.

$\therefore$ G/H చక్రీయ సమూహము.

12.5.25 **నిర్వచనము :** శుద్ధ అనల్ప అభిలంబ ఉప సమూహాలు లేని సమూహాన్ని సరళ సమూహము అంటాము.

$n \geq 5$ కు A_n సరళ సమూహము అని చూపడానికి కావలసిన కొన్ని ఫలితాలను ఋజువు చేద్దాము.

12.5.26 **ఫలితం :** $n \geq 3$ కు ప్రతి **3 -** వృత్తము A_n లో ఉంటుంది.

ఉపపత్తి : $(a,b,c) = (a,b)(a,c)$ ఒక సరి ప్రస్తారము $\forall$ $a,b,c \in \{1,2,\cdots,n\}$.

12.5.27 **ఫలితము :** $n \geq 3$, కు, A_n లోని ప్రతి మూలకము **3 -** ఆవృత్తాల లబ్దమవుతుంది.

ఉపపత్తి : $n \geq 3$ కు, $\sigma \in A_n$ అనుకొనుము.

అపుడు ఒక పూర్ణాంకము K కు $\sigma = T_1 T_2 \cdots T_{2K-1} T_{2K}$ అయ్యేటట్లుగా వ్యత్యయాలు $T_1, T_2, \ldots\ldots\ldots, T_{2K}$ ఉంటాయి.

ప్రతి $T_{2j-1} T_{2j}$, $(a,b)(c,d)$ లేక $(a,b)(a,c)$ రూపంలో ఉంటుంది.

$$(a,b)(c,d) = (a,c,d)(a,c,b), \quad (a,b)(a,c) = (a,b,c)$$

కనుక $T_{2j-1}\, T_{2j}$ **3 -** ఆ వృత్తాల లబ్దమవుతుంది.

$\therefore$ σ **3-** ఆ వృత్తాల లబ్దమవుతుంది.

12.5.28 **ఫలితము :** $n \geq 3$, $\{1, 2, \cdots, n\}$లో r, s లు నిర్దేశింపబడిన మూలకాలనుకొనుము. అపుడు $\{1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots, n\}$లోని ఏ i, jల కైనా $(r,s,i)(r,s,j)^2\,(r,s,k)\,(r,s,i)^2 = (i,j,k)$.

ఉపపత్తి : $(r,s,i)\,(r,s,j)^2 = (s,i,j)$

$$(r,s,k)(r,s,i)^2 = (s,k,i) \text{ అని గమనించవచ్చు.}$$

ఇపుడు $(r,s,i)(r,s,j)^2(r,s,k)\,(r,s,i)^2 = (s,i,j)(s,k,i) = (i,j,k)$

12.5.29 **ఫలితము :** $n \geq 3$, A_nకు N అభిలంబ ఉప సమూహము, Nలో ఒక 3 - ఆవృత్తము వుంటే $N = A_n$ అవుతుంది.

ఉపపత్తి : $(r,s,i) \in N$ అనుకొనుము.

అన్ని $j \in \{1, 2, \cdots\cdots, n\}$కు $(r,s,j) \in N$ అని చూపుదాము.

ఇపుడు $(i,j)\,(r,s) \in N$, $(r,s,i)^2 \in N$.

A_nకు N అభిలంబ ఉప సమూహం కనుక

$$\left((i,j)\,(r,s)^{-1}\right)(r,s,i)^2\,(i,j)(r,s) \in N$$

$$\left((i,\,j)\,(r,s)^{-1}\right)(r,s,i)^2\,(i,\,j)\,(r,s)$$

$$= (r,s)\,(i,j)\,(r,s,i)^2\,(i,j)(r,s) = (r,s,j) \in N \text{ ---------- (1)}$$

S_nలో (k, ℓ, m) ఒక 3 - ఆవృత్తమనుకొనుము.

(1) నుండి $(r,s,k), (r,s,\ell), (r,s,m) \in N$

ఫలితం 12.5.28 నుండి N ఉప సమూహము కనుక $(k, \ell, m) \in N$ అవుతుంది.

కనుక అన్ని 3 - ఆ వృత్తాలు Nలో ఉంటాయి.

యింకా అన్ని 3 - ఆవృత్తాల లబ్ధాలు Nలో ఉంటాయి.

ఫలితం 12.5.27 నుండి $A_n \subseteq N$.

$$\therefore A_n = N$$

12.5.30 సిద్ధాంతము : $n \geq 5$కు A_n సరళ సమూహమవుతుంది.

ఉపపత్తి : A_n కు N అభిలంబ ఉప సమూహం, $\sigma \in N$, σ తత్సమ ప్రస్తారము కాదనుకొనుము.

σను వియుక్త ఆ వృత్తాల లబ్ధంగా వ్రాయవచ్చని, వియుక్త ఆవృత్తాలు వినిమయం చెందుతాయని మనకు తెలుసు.

σను వియుక్త ఆవృత్తాల లబ్ధంగా విఘటనం చేసినపుడు ఈ క్రింది సందర్భాలలో ఏదో ఒకటి జరుగుతుంది.

1. σ 3 - ఆవృత్తమవుతుంది.
2. σ లో ఒక ఆవృత్తము $(a_1, a_2, \cdots, a_r)$, $r > 3$ భాజకంగా ఉంటుంది. అంటే $\sigma = (a_1, a_2, \cdots\cdots, a_r)\mu$, μ వియుక్త ఆవృత్తాల లబ్ధము.
3. σ యొక్క విఘటనంలో కనీసం రెండు 3 - ఆవృత్తాలు ఉంటాయి. అంటే

   $\sigma = (a_1, a_2, a_3)(a_4, a_5, a_6)\mu$, μ వియుక్త ఆవృత్తాల లబ్ధము.
4. σ యొక్క విఘటనంలో ఒకే ఒక 3- ఆవృత్తముంటుంది. అంటే $\sigma = (a_1, a_2, a_3)\mu$, μ వియుక్త వ్యత్యయాలు లబ్ధము.
5. σ యొక్క విఘటనంలోని అన్ని ఆవృత్తాల పొడవు 2కు మించదు. అంటే $\sigma = (a_1, a_2)(a_3, a_4)\mu$, μ సరి సంఖ్యలో ఉన్న వ్యత్యయాల లబ్ధము.

Nలో ఒక 3 - ఆవృత్తమైతే $N = A_n$ అని తెలుసు.

సందర్భము (1) : σ 3-ఆవృత్తమైతే $N = A_n$ అవుతుంది.

సందర్భము (2) : $\sigma = (a_1, a_2, \cdots\cdots, a_r)\mu$, $r > 3$ అనుకొనుము.

A_nకు N అభిలంబ ఉప సమూహం, $\sigma, \sigma^{-1} \in N$

కనుక $(a_1, a_2, a_3)^{-1} \sigma (a_1, a_2, a_3) \sigma^{-1}$

$$= (a_1, a_3, a_2)(a_1, a_2, \cdots a_r)\mu(a_1, a_2, a_3)((a_1, a_2, \cdots, a_r)\mu)^{-1}$$

$$= (a_1, a_3, a_2)(a_1, a_2, \cdots, a_r)(a_1, a_2, a_3)(a_1, a_r, a_{r-1}, \cdots, a_2)\mu\,\mu^{-1}$$

$$= (a_1, a_3, a_4) \in N$$

$$\therefore\ N = A_n.$$

సందర్భము (3) : $\sigma=(a_1, a_2, a_3)(a_4, a_5, a_6)\mu$ అనుకొనుము.

అపుడు $(a_1, a_2, a_4)^{-1}\sigma(a_1, a_2, a_4)\sigma^{-1}$

$$=(a_1, a_4, a_2)(a_1, a_2, a_3)(a_4, a_5, a_6)\mu(a_1, a_2, a_4)\mu^{-1}(a_4, a_5, a_6)^{-1}(a_1, a_2, a_3)^{-1}$$

$$=(a_1, a_4, a_2)(a_1, a_2, a_3)(a_4, a_5, a_6)(a_1, a_2, a_4)(a_4, a_6, a_5)(a_1, a_3, a_2)\mu\mu^{-1}$$

$$=(a_1, a_4, a_2, a_6, a_3)\in N.$$

సందర్భము (2) నుండి Nలో ఒక 3 ఆవృత్తం ఉంటుంది.

$\therefore\ N=A_n$.

సందర్భము (4) : $\sigma=(a_1, a_2, a_3)\mu$, μ వియుక్త వ్యత్యయాల లబ్ధం.

వ్యత్యయం దానికదే విలోమం కావటం వలన μ^2 తత్సమ ప్రస్తారమవుతుంది.

$\therefore \sigma^2=(a_1, a_2, a_3)^2\mu^2=(a_1, a_3, a_2)\in N$.

$\therefore\ N=A_n$

సందర్భము (5) : $\sigma=(a_1, a_2)(a_3, a_4)\mu$, μ సరి సంఖ్యలో గల వ్యత్యయాల లబ్ధం.

$n\geq 5$ కనుక $\{1, 2, ..., n\}\setminus\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$లో ఒక i ను ఎంచుకొనుము.

$\beta=(a_1, a_3, i)$ అనుకొనుము.

ఇపుడు $(a_1, a_2, a_3)^{-1}\sigma(a_1, a_2, a_3)\sigma^{-1}$

$$=(a_1, a_3)(a_2, a_4)=\alpha\in N,\ (\beta^{-1}\alpha\beta)\alpha=(a_1, a_3, i)\in N.$$

$\therefore\ N=A_n$.

అన్ని సందర్భాలలోనూ $N=A_n$ అని ఋజువు చేశాము.

$\therefore\ A_n$ సరళ సమూహము.

12.6 సమ రూపతలు:

12.6.1 **నిర్వచనము :** G, G' లు సమూహాలు $\phi: G \to G'$ ఒక ప్రమేయము అనుకొనుము. $\forall$ $x, y \in G$ కు $(xy)\phi = (x\phi)(y\phi)$ అయితే ϕను G నుండి G'కు సమరూపత అంటాము.

12.6.2 **నిర్వచనము :** $\phi: G \to G'$ ఒక సమూహాల సమరూపత అనుకొనుము. ϕ అన్వేకమయితే ϕను అన్వేక సమరూపత, ϕ సంగ్రస్తమయితే ϕను సంగ్రస్త సమరూపత అంటాము.

12.6.3 **నిర్వచనము :** $\phi: G \to G'$ సమూహాల సమరూపత అనుకొనుము. G' లోని తత్సమ మూలకం e' అనుకొనుము.

$\{x \in G / x\phi = e'\}$ను ϕ యొక్క అంతస్థము లేక అంతస్థి అని, దానిని Kernel ϕ లేక Ker ϕతో సూచిస్తాము.

12.6.4 **ఉదాహరణ :** పూర్ణాంకాల సంకలన సమూహం Z, వాస్తవ సంఖ్యల సంకలన సమూహం R అనుకొనుము.

$\phi: Z \to R$ ను $n\phi = n \ \forall \ n \in Z$ గా నిర్వచింపుము.

$$(n+m)\phi = n + m = n\phi + m\phi \quad \forall \ n, m \in Z$$

$\therefore \phi$ సమరూపత అవుతుంది.

$$\text{Ker } \phi = \{n \in Z / n\phi = 0\} = \{n \in Z / n\phi = n = 0\} = \{0\}.$$

$$n\phi = m\phi \Rightarrow n = m$$

$\therefore$ ϕ అన్వేక సమరూపత.

12.6.5 **ఉదాహరణ :** వాస్తవ సంఖ్యల సంకల సమూహం R, పూర్ణాంకాల సంకలన సమూహం Z అనుకొనుము.

$x \in R$ కు $[x]$ x యొక్క పూర్ణాంక భాగాన్ని సూచిస్తుందనుకొందాము.

$[x]$ అనేది x కన్నా తక్కువగా గాని లేక సమానంగా గాని ఉన్న పూర్ణాంకాలన్నిటిలోను గరిష్ఠ పూర్ణాంకము.

$\phi: R \to Z$ను $x\phi = [x]$గా నిర్వచిస్తే, ϕ సమరూపత కాదు.

$$0.5\phi = 0, \ 0.75\phi = 0$$

$$(0.5 + 0.75)\phi = (1.25)\phi = 1$$

$$(0.5)\phi + (0.75)\phi = 0 + 0 = 0$$

$$\therefore (0.5 + 0.75)\phi \neq 0.5\phi + 0.75\phi$$

12.6.6 ఉదాహరణ : శూన్యేతర వాస్తవ సంఖ్యల గుణకార సమూహం R^* అనుకొనుము.

$\phi : R^* \to R^*$ ను $x\phi = |x| \ \forall \ x \in R^*$ గా నిర్వచింపుము.

$$(xy)\phi = |xy| = |x||y| = (x\phi)(y\phi) \ \forall \ x, y \in R^*.$$

కనుక ϕ సమరూపత.

$$\text{Ker}\phi = \left\{x \in R^* / x\phi = 1\right\} = \left\{x \in R^* / |x| = 1\right\}$$

$$= \{1, \ -1\}$$

$1\phi = (-1)\phi, \ 1 \neq -1$ కనుక ϕ అన్వేకము కాదు.

R^*లో ఏ xకైనా $x\phi \neq -1$ గనుక ϕ సంగ్రస్తము కాదు.

12.6.7 SAQ : ఏ సమూహం నుండి ఏ సమూహానికయినా కనీసం ఒక సమరూపత ఉంటుందని చూపుము.

12.6.8 సిద్ధాంతము : $\phi : G \to G'$ సమూహాల సమరూపత అనుకొనుము. G యొక్క తత్సమ మూలకం e, G' యొక్క తత్సమ మూలకం e' అనుకొనుము. అపుడు

(i) $e\phi = e'$ (ii) $x^{-1}\phi = (x\phi)^{-1} \ \forall \ x \in G$

(iii) G కు $\text{Ker}\,\phi$ అభిలంబ ఉప సమూహము.

ఉపపత్తి : (i) $e\phi = (e\,e)\phi = (e\phi)(e\phi)$

కాని $e'(e\phi) = e\phi$

$$\therefore e'(e\phi) = (e\phi)(e\phi)$$

$\Rightarrow e\phi = e'$, (G' లో కుడి కొట్టివేత న్యాయం నుండి)

(ii) $$e' = e\phi = \left(xx^{-1}\right)\phi = (x\phi)\left(x^{-1}\phi\right) \forall \ x \in G$$

$$e' = e\phi = \left(x^{-1}x\right)\phi = \left(x^{-1}\phi\right)(x\phi) \ \forall \ x \in G$$

$$\therefore x^{-1}\phi = (x\phi)^{-1}$$

(iii) (i) నుండి $e \in \mathrm{Ker}\,\phi$

$$x, y \in \mathrm{Ker}\phi \Rightarrow x\phi = e', \; y\phi = e'.$$

$$\Rightarrow x\phi = e', \; y^{-1}\phi = (y\phi)^{-1} = (e')^{-1} = e'$$

$$\Rightarrow \left(xy^{-1}\right)\phi = (x\phi)\left(y^{-1}\phi\right) = e'e' = e'$$

$$\therefore xy^{-1} \in \mathrm{Ker}\,\phi$$

కనుక G కు $\mathrm{Ker}\,\phi$ ఒక ఉప సమూహము.

$g \in G$, $x \in \mathrm{Ker}\phi$ అనుకొనుము.

$$\left(g^{-1}xg\right)\phi = \left(g^{-1}\phi\right)(x\phi)(g\phi) = (g\phi)^{-1} e'(g\phi)$$

$$= (g\phi)^{-1}(g\phi) = e'$$

$$\therefore g^{-1}xg \in \mathrm{Ker}\,\phi$$

కనుక $\mathrm{Ker}\,\phi$, G లో అభిలంబ ఉప సమూహము.

12.6.9 **సిద్ధాంతము :** $\phi : G \to G'$ సమూహాల సమరూపత, G యొక్క తత్సమ మూలకం, e, G' యొక్క తత్సమ మూలకం e' అనుకొనుము. ϕ అన్వేకము కావడానికి ఆ.ప.ని. $\mathrm{Ker}\,\phi = \{e\}$ కావడం.

ఉపపత్తి : ϕ అన్వేకము అనుకొనుము.

$$x \in \mathrm{Ker}\,\phi \Rightarrow x\phi = e' = e\phi$$

$$\Rightarrow x = e$$

$$\therefore \mathrm{Ker}\,\phi = \{e\}$$

విపర్యయంగా $\mathrm{Ker}\,\phi = \{e\}$ అనుకొనుము.

$$x\phi = y\phi \Rightarrow (x\phi)(y\phi)^{-1} = (x\phi)\left(y^{-1}\phi\right) = \left(xy^{-1}\right)\phi = e'$$

$$\Rightarrow xy^{-1} \in \mathrm{Ker}\,\phi = \{e\}$$

$$\Rightarrow xy^{-1} = e$$

$\Rightarrow x = y$

$\therefore \phi$ అన్వేకము.

12.6.10 ఉదాహరణ : $\{1, 2, \cdots\cdots, n\}$ పై ప్రస్తారాల సమూహం S_n. $G = \{e, a\}$ రెండు మూలకాలు గల సమూహమనుకొనుము.

$\phi : S_n \to G$ ను

$$\sigma\,\phi = \begin{cases} e, \ \sigma \text{ సరి ప్రస్తారమైతే} \\ a, \ \sigma \text{ బేసి ప్రస్తారమైతే,} \end{cases}$$ గా నిర్వచింపుము.

అపుడు ϕ సమరూపత అయి, $\mathrm{Ker}\phi = A_n$ అవుతుంది.

ఉపపత్తి : $\sigma, \psi \in S_n$ అనుకొనుము.

సందర్భం (i) : σ, ψ లు సరి ప్రస్తారాలనుకొనుము. అపుడు

$\sigma\psi$ కూడ సరి ప్రస్తారము.

$$e = (\sigma\psi)\phi, (\sigma\phi)(\psi\phi) = e\ e = e$$

$$\therefore (\sigma\psi)\phi = (\sigma\phi)(\psi\phi)$$

సందర్భం (ii) : σ, ψ లు రెండూ బేసి ప్రస్తారాలైతే $\sigma\psi$ సరి ప్రస్తారము.

$$(\sigma\psi)\phi = e, \quad \sigma\phi = a = \psi\phi$$

$$(\sigma\phi)\,(\psi\phi) = aa = e$$

$$\therefore (\sigma\psi)\,\phi = (\sigma\phi)\,(\psi\phi)$$

సందర్భం (iii) : σ బేసి ప్రస్తారము, ψ సరి ప్రస్తారమనుకొనుము.

అపుడు $\sigma\psi$ బేసి ప్రస్తారము.

$$(\sigma\psi)\phi = a$$

$$(\sigma\phi)(\psi\phi) = ae = a$$

$$\therefore (\sigma\psi)\phi = (\sigma\phi)(\psi\phi)$$

అదే విధంగా σ సరి ప్రస్తారము, ψ బేసి ప్రస్తారమైతే కూడా $(\sigma\,\psi)\,\phi = (\sigma\phi)\,(\psi\phi)$ అని చూడవచ్చును.

$\therefore$ ϕ ఒక సమరూపత

$\text{Ker}\ \phi = \{\sigma \in S_n / \sigma\phi = e\} = \{a \in S_n / \sigma$ సరి ప్రస్తారము $\}$

$= A_n$

12.6.11 SAQ : సమూహం G కు A ఒక శూన్యేతర సమితి అనుకొనుము.

$\langle A \rangle = \left\{x_1\,x_2 \cdots x_n / n \geq 1,\ x_i \text{ or } x_i^{-1} \in A\right\}$ అనుకొనుము.

G కు $\langle A \rangle$ ఉప సమూహమని, G ఉప సమితి గా గల ఉప సమూహాలన్నింటిలోను $\langle A \rangle$ ఉప సమూహము అని బుజువు చేయుము.

12.6.12 **ఉదాహరణ :** సమూహం G కు అశూన్య ఉప సమితి A, $G = \langle A \rangle$ అనుకొనుము. $\phi : G \to G'$ సమూహాల సమరూపత అనుకొనుము. A లోని మూలకాల వద్ద ϕ విలువలు ϕ ని సంపూర్ణంగా నిర్ధారిస్తాయి.

ఉపపత్తి : $x \in G.$ అనుకొనుము.

అపుడు ఒక n కు $x = x_1\,x_2 \cdots\cdots x_n$, x_i లేక $x_i^{-1} \in A$

అయ్యేటట్లు $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x_n$ లు G లో ఉంటాయి.

$x\phi = (x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n)\,\phi = (x_1\phi)\,(x_2\phi) \cdots\cdots\cdots (x_n\phi)$

$x_i\phi = \left(\left(x_i^{-1}\right)^{-1}\right)\phi = \left(\left(x_i^{-1}\right)\phi\right)^{-1}$ నుండి A లోని మూలకాల వద్ద ϕ యొక్క విలువలు ϕ ని సంపూర్ణంగా నిర్ధారిస్తాయి.

12.6.13 SAQ : ఒక సరళ సమూహము నుండి ఉండే సమరూపతలను గురించి ఏమి చెప్పగలము?

12.6.14 **నిర్వచనము :** $f : X \to Y$ ఒక ప్రమేయమనుకొనుము. $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ అనుకొనుము. $A = \{af / a \in A\}$ ను Y లో f క్రింద A యొక్క ప్రతిబింబము అంటాము. $Bf^{-1} = \{a \in X / af \in B\}$ ను X లో f క్రింద B యొక్క విలోమ ప్రతి బింబము అంటాము.

12.6.15 **సిద్ధాంతము :** సమూహము G కు అభిలంబ ఉప సమూహము N అనుకొనుము. అపుడు వ్యుత్పన్న సమూహము G/N, G యొక్క ఒక సమరూపతా ప్రతిబింబమవుతుంది.

ఉపపత్తి : $\phi : G \to G/N$ ను $g\phi = gN \;\; \forall \;\; g \in G$ గా నిర్వచింపుము.

$g_1, g_2 \in G$ కు $(g_1 \, g_2)\phi = g_1 g_2 N = (g_1 N)(g_2 N) = g_1\phi \; g_2\phi$

$\therefore$ ϕ సమరూపత

$G\phi = G/N$ అనేది స్పష్టము.

$\therefore$ ϕ సంగ్రస్తము.

G నుండి G/N మీదకు ఈ విధంగా నిర్వచింపబడిన ϕను నియత లేక సహజ సమరూపత అంటాము.

12.6.16 SAQ : G నుండి G/N కు గల సహజ సమరూపతకు అంతస్థి N అని చూపుము.

12.6.17 **ఉదాహరణ :** పూర్ణాంకాల సంకలన సమూహము Z, n పూర్ణాంకము అనుకొనుము. Z,కు nZ అభిలంబ ఉప సమూహమని తెలుసు. $m\phi = m + nZ \;\; \forall \;\; m \in Z$ గా నిర్వచింపబడిన సమరూపతతో Z యొక్క సమరూపతా ప్రతిబింబం Z/nZ అవుతుంది.

12.6.18 **సిద్ధాంతము :** $\phi : G \to G'$ సమూహాల సమరూపత అనుకొనుము. G కు ఒక ఉప సమూహం H, G'కు ఒక ఉప సమూహం K అనుకొనుము. అపుడు

(1) G' కు $H\phi$ ఉప సమూహమవుతుంది. H అభిలంబ ఉప సమూహమైతే $G\phi$కు $H\phi$ అభిలంబ ఉప సమూహమవుతుంది.

(2) G కు $K\phi^{-1}$ ఒక ఉప సమూహమవుతుంది. $G\phi$కు K అభిలంబ ఉప సమూహమైతే G కు $K\phi^{-1}$ అభిలంబ ఉప సమూహమవుతుంది.

ఉపపత్తి : e, e' లు క్రమంగా G, G' లలో తత్సమ మూలకాలనుకొనుము.

(1) $e' = e\phi \in H\phi$, కావున, G'కు $H\phi$ అశూన్య ఉప సమితి

$x, y \in H\phi$ అనుకొనుము.

అపుడు $x = h_1\phi$, $y = h_2\phi$ అయ్యేటట్లు Hలో h_1, h_2 లు ఉంటాయి..

G కు H ఉప సమూహం కనుక $h_1 \, h_2^{-1} \in H$

$$xy^{-1} = (h_1\phi)(h_2\phi)^{-1} = (h_1\phi)\left(h_2^{-1}\phi\right) = \left(h_1 h_2^{-1}\right)\phi \in H\phi$$

G'కు $H\phi$ ఉప సమూహము.

G లో H అభిలంబమనుకొనుము.

సమూహము $G\phi$ కు $H\phi$ ఉప సమూహము.

$g\phi \in G\phi, (g \in G)$ అనుకొనుము.

$h\phi \in H\phi, \ (h \in H)$ అనుకొనుము.

$$(g\phi)^{-1}(h\phi)(g\phi) = \left(g^{-1}\phi\right)(h\phi)(g\phi) = \left(g^{-1}hg\right)\phi \in H\phi,$$

$$(\because \ g^{-1}hg \in H)$$

కనుక $G\phi$ లో $H\phi$ అభిలంబము.

(2) $e\phi = e' \in K$

$\therefore e \in K\phi^{-1}$

$\therefore$ $K\phi^{-1}$ అశూన్య సమితి.

$x, y \in K\phi^{-1}$ అనుకొనుము.

$\therefore$ $x\phi, y\phi \in K$

G' కు K ఉప సమూహము కనుక $\left(xy^{-1}\right)\phi = (x\phi)\left(y^{-1}\phi\right) = (x\phi)(y\phi)^{-1} \in K$

$\therefore$ $xy^{-1} \in K\phi^{-1}$

$G\phi$ లో K అభిలంబ ఉప సమూహమనుకొనుము.

$x \in K\phi^{-1}, \ g \in G$ అనుకొనుము.

$x\phi \in K, g\phi \in G\phi$

$$\left(g^{-1}xg\right)\phi = \left(g^{-1}\phi\right)(x\phi)(g\phi) = (g\phi)^{-1}(x\phi)(g\phi) \in K$$

$\therefore g^{-1}xg \in K\phi^{-1}$

$\therefore$ G లో $K\phi^{-1}$ అభిలంబ ఉప సమూహము.

12.7 సమరూపతా మౌలిక సిద్ధాంతము:

సిద్ధాంతము 12.6.15 నుండి ఒక సమూహము యొక్క ప్రతి వ్యుత్పన్న సమూహము ఆ సమూహము యొక్క సమరూపతా ప్రతి బింబమని తెలుసుకున్నాము. ఇప్పుడు ఒక సమూహం యొక్క సమరూపతా ప్రతి బింబము ఆ సమూహం యొక్క ఒక వ్యుత్పన్న సమూహానికి తుల్య రూపంగా వుంటుందని ఋజువు చేస్తాము.

సిద్ధాంతము 12.6.8.లో $\phi: G \to G'$ కు ఒక సమూహాల సమరూపత అయితే G కు $\operatorname{Ker}\phi$ ఒక అభిలంబ సమూహమవుతుందని ఋజువు చేస్తాము.

12.7.1 సిద్ధాంతము (సమరూపతా మౌలిక సిద్ధాంతము) : $\phi: G \to G'$ సమూహాల సమరూపత, $\operatorname{Ker}\phi = N$ అనుకొనుము. అపుడు $G\phi$ ఒక సమూహమవుతుంది మరియు G/N నుండి $G\phi$ మీదకు ఒక నియత (లేక సహజ) తుల్యరూపత వుంటుంది.

ఉపపత్తి : సిద్ధాంతం 12.6.18 నుండి G' కు $G\phi$ ఉప సమూహము. అందుచే $G\phi$ ఒక సమూహము.

ప్రమేయం $\psi: G/N \to G\phi$ ను $(aN)\phi = a\phi \; \forall \; aN \in G/N, \;\; a \in G$ గా నిర్వచింపుము.

ముందుగా ψ నిర్వచనం సహసమితి aN యొక్క ప్రతినిధి a పై ఆధారపడదని ఋజువు చేస్తాము.

$a, b \in G, \quad aN = bN$ అనుకొనుము.

G' లోని తత్సమ మూలకం e' అనుకొనుము.

అపుడు $ab^{-1} \in N = \operatorname{Ker}\phi$

$$(a\phi)(b\phi)^{-1} = (a\phi)\left(b^{-1}\phi\right) = \left(ab^{-1}\right)\phi = e'$$

$$\Rightarrow a\phi = b\phi$$

కనుక ψ స్పష్టంగా నిర్వచింపబడినది.

$$(aNbN)\psi = (abN)\psi = (ab)\phi = (a\phi)(b\phi)$$

$$= (aN)\psi(bN)\psi$$

$\therefore \psi$ ఒక సమరూపత .... (1)

$(aN)\psi = e'$ అనుకొనుము.

$$(aN)\psi = a\phi = e' \Rightarrow a \in \operatorname{Ker}\phi = N$$

$$\therefore aN = N$$

$\therefore$ సిద్ధాంతము 12.6.9. నుండి ψ అన్వేకము ----------- (2)

$g \in G$ అనుకొనుము.

$(gN)\,\psi = g\phi \in G\phi$

$\therefore \psi$ సంగ్రస్తము .... (3)

(1), (2), (3) ల నుండి $\psi : G/N \to G\phi$ ఒక తుల్యరూపత.

ఈ సిద్ధాంతము మరియు సిద్ధాంతము 12.6.15 నుండి ఒక సమూహము యొక్క సమరూపతా ప్రతిబింబాల వర్గము, దాని యొక్క వ్యుత్పన్న సమూహాల వర్గము ఒక్కటేనని గమనించవచ్చు.

12.7.2 ఫలితము : $\phi : G \to G'$ సమూహాల సమరూపత అనుకొనుము. G కు N ఒక అభిలంబ ఉప సమూహం అనుకొనుము. G' కు N' ఒక అభిలంబ ఉప సమూహమనుకొనుము. $N\phi \subseteq N'$ అయితే G/N నుండి G'/N' కు ఒక సహజ సమరూపత ఉంటుంది.

ఉపపత్తి : $g_1, g_2 \in G,\ g_1N = g_2N$ అయితే $g_1 g_2^{-1} \in N$

$$(g_1\phi)(g_2\phi)^{-1} = (g_1\phi)\left(g_2{}^{-1}\phi\right) = \left(g_1g_2{}^{-1}\right)\phi \in N\phi \subseteq N'$$

$$\Rightarrow\ (g_1\phi)(g_2\phi)^{-1} \in N'$$

$$\Rightarrow g_1\phi N' = g_2\phi N' \ .... (1)$$

ప్రమేయం $\psi : G/N \to G'/N'$ ను $gN\psi = g\phi N'$ గా నిర్వచింపుము.

(1) నుండి ψ స్పష్టంగా నిర్వచింపబడినది అని గ్రహించవచ్చును.

$$(g_1Ng_2N)\psi = (g_1g_2N)\psi = g_1g_2\phi N' = g_1\phi g_2\phi N'$$

$$= g_1\phi N' g_2\phi N'$$

$$= (g_1N)\psi(g_2N)\psi$$

కనుక ψ ఒక సమరూపత.

12.7.3 సమస్య : సమూహం G లో ఒక మూలకం a అనుకొందాము.

ప్రమేయం $\phi : Z \to G$ ను $n\phi = a^n \ \forall\ n \in Z$ గా నిర్వచిద్దాము.

ϕ సమరూపత అని చూపుము. $Z\phi$ ను కనుగొనుము. Ker ϕ యొక్క సంభావతలను వర్ణింపుము.

సమాధానము : $n, m \in Z$ అనుకొనుము.

$(n+m)\phi = a^{n+m} = a^n a^m = n\phi\, m\phi$

కనుక ϕ ఒక సమరూపత.

$Z\phi = \left\{a^n / n \in Z\right\} = \langle a \rangle$, a చే జనితమైన G యొక్క ఉప సమూహము.

Z కు $\mathrm{Ker}\,\phi$ ఒక ఉప సమూహమని మనకు తెలుసును.

కనుక ఋణాత్మకం కాని ఒక పూర్ణాంకం m కు, $\mathrm{Ker}\,\phi = mZ$ అవుతుంది.

$m = 0,$ అయితే $mZ = \{0\}$, $Z \simeq Z/\{0\} \simeq \langle a \rangle$

కనుక $\langle a \rangle$ ఒక అపరిమిత చక్రీయ సమూహము.

$m \neq 0$ అయితే $Z/mZ \simeq \langle a \rangle$

కనుక $\langle a \rangle$ ఒక పరిమిత చక్రీయ సమూహము. దీని తరగతి m.

$\langle a \rangle \simeq Z_m$ గనుక $Z/mZ \simeq Z_m$

12.7.4 **ఉదాహరణ :** వాస్తవ సంఖ్యల సంకలన సమూహం R అనుకొనుము. శూన్యేతర సంకీర్ణ సంఖ్యల గుణకార సమూహం C^* అనుకొనుము.

ప్రమేయం $\phi : R \to C^*$ ను $x\phi = \cos x + i \sin x \;\forall\; x \in R$ గా నిర్వచింపుము.

$$(x+y)\phi = \cos(x+y) + i\sin(x+y) \text{ ---------- (1)}$$

$$x\phi y\phi = (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y)$$

$$= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\cos x \sin y + \cos y \sin x)$$

$$= \cos(x+y) + i\sin(x+y) \text{ ------------- (2)}$$

(1), (2)ల నుండి $(x+y)\phi = x\phi\, y\phi$

కనుక ϕ ఒక సమరూపత.

$\mathrm{Ker}\phi = \{x \in R / \cos x + i \sin x = 1\}$

$= \{x \in R / x = 2\pi n, n \in Z\}$

$= \langle 2\pi \rangle$

సమరూపతా మౌలిక సిద్ధాంతం నుండి

$$R / \langle 2\pi \rangle > \simeq R\phi = \left\{ c \in C^* / |c| = 1 \right\}$$

12.7.5 **నిర్వచనం :** సమూహం G కు N ఒక అభిలంబ ఉపసమూహము, $N \neq G$ అనుకొనుము. G యొక్క ఏ శుద్ధ అభిలంబ ఉప సమూహానికి N శుద్ధ ఉపసమితి కాకపోతే N ను G కు అధికతమ అభిలంబ ఉపసమూహము అంటాము.

12.7.6 **గమనిక :** సమూహం G కు ఒక శుద్ధ ఉప సమూహం N అధికతమ అభిలంబ ఉప సమూహం కావడానికి ఆ.ప.ని.

$N \subseteq M \subseteq G$, G కు M అభిలంబ ఉప సమూహమయితే $N = M$ లేదా $M = G$ కావడం.

12.7.7 SAQ : $\langle Z, + \rangle$ కు అధికతమ అభిలంబ ఉప సమూహాలు, ప్రధాన సంఖ్యలచే జనితమైన ఉప సమూహాలని చూపండి.

12.7.8 **సిద్ధాంతము :** సమూహం G కు N అభిలంబ ఉప సమూహం అనుకొనుము. G కు N అధికతమ అభిలంబ ఉప సమూహం కావడానికి ఆ.ప.ని. G/N సరళ సమూహం కావడం.

ఉపపత్తి : $\phi : G \to G/N$ సిద్ధాంతం **12.6.15**లో నిర్వచింపబడిన నియత (సహజ) సమరూపత అనుకొందాము.

(A) G కు N అధిక తమ అభిలంబ ఉప సమూహమనుకొందాము.

G/N లో K అభిలంబ ఉప సమూహమనుకొందాము.

సిద్ధాంతం **12.6.18**లో (ii) నుండి G కు $K\phi^{-1}$ అభిలంబ ఉప సమూహము.

$N\phi = \{n\phi / n \in N\} = \{nN / n \in N\} = \{N\}$ గనుక

$$N\phi \subseteq K \Rightarrow N \subseteq K\phi^{-1}$$

G లో N అధికతమ అభిలంబ ఉప సమూహము.

$\therefore$ $N = K\phi^{-1}$ లేదా $K\phi^{-1} = G$

ϕ సంగ్రస్తము గనుక $N\phi = K$ లేదా $K = G\phi$

అంటే $\{N\} = K$ లేక $K = G/N$ అవుతుంది.

కనుక G/N సరళ సమూహము.

(B) విపర్యయంగా G/N సరళ సమూహమనుకొనుము.

G కు M అభిలంబ ఉపసమూహము $N \subseteq M \subseteq G$ అనుకొనుము.

సిద్ధాంతం 12.6.18లో (i) నుండి G/N కు $M\phi$ ఒక అభిలంబ ఉప సమూహమవుతుంది.

అపుడు $M\phi = \{N\}$ లేదా $M\phi = G/N$

$M\phi = \{N\}$ అనుకొనుము.

$m \in M$ అయితే $m\phi = N$ అవుతుంది.

$\Rightarrow mN = N$

$\Rightarrow m \in N$

$\therefore M \subseteq N$

కనుక $M = N$ .... (1)

$M\phi = G/N$ అనుకొనుము.

$g \in G \Rightarrow gN \in G/N = M\phi$

$\Rightarrow gN = mN$ అయ్యేటట్లు M లో ఒక m ఉంటుంది.

$\Rightarrow gm^{-1} \in N \subseteq M \Rightarrow gm^{-1} \in M$

$\Rightarrow gm^{-1} m \in M$

$\Rightarrow ge = g \in M$

$\therefore G \subseteq M$

కనుక $M = G$ అవుతుంది .... (2)

(1), (2)ల నుండి G కు N అధికతమ అభిలంబ ఉప సమూహమవుతుంది.

$(A), (B)$ ల నుండి సిద్ధాంతము ఋజువు అయినది.

12.7.9 **సమస్య :** G ఒక సమూహము, G యొక్క అంతర స్వయం తుల్యరూపతల సమూహం I_G అనుకొనుము. ప్రమేయం $\phi : G \to I_G$ ను $g\phi = i_g \ \forall g \in G$ గా నిర్వచింపుము.

(ఇక్కడ ప్రమేయము i_g, G నుండి G కు $xi_g = g^{-1}xg \ \forall x \in G$ గా నిర్వచింపబడిన అంతర స్వయం తుల్యరూపత)

ϕ ఒక సమరూపత అని చూపుము. $\text{Ker}\,\phi$ ను కనుగొనుము.

ϕ తుల్యరూపత ఎప్పుడౌతుందో వర్ణింపుము.

సమాధానము :

$g_1, g_2 \in G, \quad x \in G$ అనుకొనుము.

$$x(g_1 \, g_2)\phi = x\, i_{g_1 g_2} = (g_1 g_2)^{-1} x \, g_1 g_2$$

$$= g_2^{-1} \, g_1^{-1} \, x \, g_1 \, g_2$$

$$x(g_1\phi)(g_2\phi) = x\left(i_{g_1} i_{g_2}\right) = \left(g_1^{-1} x \, g_1\right) i_{g_2}$$

$$= g_2^{-1} \, g_1^{-1} x \, g_1 g_2$$

కనుక $x(g_1 g_2)\phi = x(g_1\phi)(g_2\phi) \ \forall \ x \in G$

కనుక $(g_1 g_2)\phi = g_1\phi \ g_2\phi$

$\therefore \phi : G \to g_G$ ఒక తుల్యరూపత.

G నుండి G కు తత్సమ ప్రమేయాన్ని I_G అనుకొనుము.

$$\text{Ker}\phi = \{g \in G / g\phi = I_G\} = \left\{g \in G / i_g = I_G\right\}$$

$$= \left\{g \in G / x\, i_g = \underset{\forall x \in G}{xI_G}\right\} = \left\{g \in G \Big/ g^{-1} x \, g = \underset{\forall x \in G}{x}\right\}$$

$$= \{g \in G / xg = gx \ \forall \ x \in G\}$$

సిద్ధాంతం 12.6.9 నుండి

$$\phi \text{ అన్వేకము } \Leftrightarrow \text{Ker}\,\phi = \{e\}$$

కనుక ϕ తుల్యరూపత $\Leftrightarrow \{g \in G / xg = gx \forall x \in G\} = \{e\}$

12.7.10 నిర్వచనము : G ఒక సమూహము అనుకొనుము.

$\{g \in G / xg = g\, x \, \forall\, x \in G\}$ ను **G** యొక్క కేంద్రము అంటాము.

12.8 S.A.Q. లకు సమాధానాలు:

12.5.7 SAQ :

సమాధానము : ఎబీలియన్ సమూహము G కు ఒక ఉపసమూహము H అనుకొనుము.

$xy = yx \;\forall\; x, y \in G$ అవుతుంది.

ప్రత్యేకించి $ah = ha \;\; \forall \;\; a \in G,\, h \in H$ అవుతుంది.

$\therefore \;\; aH = \{ah / h \in H\} = \{ha / h \in H\} = Ha$.

కనుక G లో H యొక్క ప్రతి ఎడమ సహ సమితి ఒక కుడి సహ సమితి అవుతుంది.

$\therefore$ G కు H అభిలంబ ఉప సమూహము.

12.5.11 SAQ :

సమాధానము : G ఒక సమూహము, G లోని తత్సమ మూలకం e అనుకొందాము. X అనేది ఒక G లోని అబిలంబ సమూహాల సముదాయము అనుకొనుము.

$N = \bigcap\limits_{H \in X} H$ అనుకొనుము.

$e \in H \;\; \forall \;\; H \in X,$

$\therefore \;\; e \in N$

$a, b \in N$ అనుకుంటే $a, b \in H \;\; \forall \;\; H \in X$

$\Rightarrow \;\; ab^{-1} \in H \;\; \forall \; H \in X.$

$\Rightarrow \;\; ab^{-1} \in \bigcap\limits_{H \in X} H = N$

కనుక N ఒక ఉప సమూహము.

$a \in G, n \in N \quad \Rightarrow \;\; n \in H \;\; \forall \;\; H \in X$

$\Rightarrow \;\; a^{-1}na \in H \;\; \forall \; H \in X$

$$\Rightarrow \; a^{-1}na \in \bigcap_{H \in X} H = N$$

కనుక G లో N అభిలంబ ఉప సమూహము.

12.5.13 SAQ :

సమాధానము : ఇచ్చిన తరగతి m తో G కు H ఒకటే ఉప సమూహమనుకొనుము. సమస్య **12.5.12** యొక్క సమాధానములో H ఉప సమూహము $x \in G$ అయితే $x^{-1}Hx$ కూడా ఉప సమూహమని,

$|H| = \left|x^{-1}Hx\right|$ అని చూశాము. ఇక్కడ $|H| = m$

$\therefore \left|x^{-1}Hx\right| = m \;\forall\; x \in G$

m తరగతితో H ఒక్కటే ఉప సమూహం గనుక

$H = x^{-1}Hx \;\forall\; x \in G$ అవుతుంది.

$\therefore G$ కు H అబిలంబ ఉప సమూహం అవుతుంది.

12.5.14 SAQ :

సమాధానము : G ఒక సమూహమనుకొనుము. G యొక్క స్వయం తుల్యరూపతల సమితిని $\mathrm{Aut}(G)$ అనుకొనుము. $\mathrm{Aut}(G)$లో యుగ్మ పరిక్రియ $x(\phi\psi) = (x\phi)\psi \;\forall\; x \in G, \phi, \psi \in \mathrm{Aut}(G)$.

S.A.Q. **11.4.2**లోని భాగం (C)లో $G_1 = G_2 = G_3 = G$ గా తీసుకుంటే G కు $\phi\psi$ స్వయం తుల్యరూపత అవుతుంది. కనుక $\phi\psi \in \mathrm{Aut}(G)$.

ప్రమేయాల సంయోజనం సహచర్య న్యాయాన్ని పాటిస్తుందని మనకు తెలుసును.

SAQ **11.4.2** లోని భాగం (a) యొక్క సమాధానం నుండి G నుండి G కు గల తత్సమ ప్రసారం I_G ఒక స్వయం తుల్యరూపత అని మనకు తెలుస్తుంది.

$I_G\phi = \phi I_G = \phi \;\forall\; \phi \in \mathrm{Aut}(G)$ అనేది స్పష్టము.

SAQ **11.4.2** యొక్క సమాధానములో భాగం (b)లో $G_1 = G_2 = G$ గా తీసుకొంటే,

$\phi \in \mathrm{Aut}(G) \Rightarrow \phi^{-1} \in \mathrm{Aut}(G)$ అని తెలుస్తుంది.

ఇంకా $\phi\phi^{-1} = \phi^{-1}\phi = I_G$.

కనుక ప్రమేయాల సంయోజనంతో $\text{Aut}(G)$ ఒక సమూహము.

G యొక్క అంతర స్వయం తుల్య రూపతల సమితిని $\text{Iaut}(G)$ అనుకొనుము.

$I_G = i_e \in \text{Iaut}(G)$

$i_{g_1}, i_{g_2} \in \text{Iaut}(G)$ అనుకొనుము.

$$x\left(i_{g_1} i_{g_2}\right) = \left(x\, i_{g_1}\right) i_{g_2} = \left(g_1^{-1}\, x\, g_1\right) i_{g_2}$$

$$= g_2^{-1}\left(g_1^{-1}\, x\, g_1\right) g_2 = \left(g_2^{-1}\, g_1^{-1}\right) x\, \left(g_1\, g_2\right)$$

$$= \left(g_1\; g_2\right)^{-1} x \left(g_1\; g_2\right) = x\; i_{g_1\, g_2} \;\forall\; x \in G$$

$$\therefore i_{g_1}\, i_{g_2} = i_{g_1 g_2} \in \text{Iaut}\;(G)$$

$$x\, i_g\, i_{g^{-1}} = \left(g^{-1} x g\right) i_{g^{-1}} = \left(g^{-1}\right)^{-1}\left(g^{-1} x g\right) g^{-1}$$

$$= g g^{-1}\, x\, g g^{-1} = exe = x = xI_G \quad \forall\, x \in G$$

$$\therefore i_g\; i_{g^{-1}} = I_G.$$

ఇదే విధంగా $i_{g^{-1}}\; i_g = I_G$.

$\text{Iaut}(G)$, $\text{Aut}(G)$కు ఉప సమూహము.

$\phi \in \text{Aut}(G)$, $i_g \in \text{Iaut}(G)$ అనుకొనుము.

$$x\left(\phi^{-1}\, i_g\, \phi\right) = \left(\left(x\phi^{-1}\right) i_g\right)\phi = \left(g^{-1}\left(x\phi^{-1}\right) g\right)\phi$$

$$= \left(g^{-1}\phi\right)\left(\left(x\phi^{-1}\right)\phi\right)(g\phi) = (g\phi)^{-1}\left(x\left(\phi^{-1}\phi\right)\right)(g\phi)$$

$$= (g\phi)^{-1}\left(xI_G\right)(g\phi) = (g\phi)^{-1}\, x\; (g\phi) = x\, i_{g\phi} \,\forall\, x \in G$$

$$\therefore \phi^{-1}\, i_g\; \phi = i_{g\phi} \in \text{Iaut}(G).$$

కనుక G యొక్క అంతర స్వయం తుల్యరూపతల సమితి, G యొక్క స్వయం తుల్య రూపతల సమూహానికి అభిలంబ ఉప సమూహమవుతుంది.

12.5.18 SAQ :

సమాధానము : e తత్సమ మూలకంగా గల సమూహం G కు ఒక ఉప సమూహము H అనుకొనుము.

$a \in G$ అనుకొనుము.

$aH = H$ అయితే $a = ae \in aH = H$, $(\because e \in h)$

$\therefore aH = H \Rightarrow a \in H$

విపర్యయంగా $a \in H$ అనుకొనుము.

అపుడు $ah \in H \ \forall \ h \in H$

$\therefore aH \subseteq H$ ---------- (1)

$a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H \Rightarrow a^{-1}h \in H \ \forall \ h \in H.$

$h = eh = \left(a\, a^{-1}\right)h = a\left(a^{-1}h\right) \in aH \ \forall \ h \in H.$

$\therefore H \subseteq aH$ --------- (2)

(1), (2)ల నుండి $aH = H$

ఇదే విధంగా $Ha = H \Leftrightarrow a \in H$ అని ఋజువు చేయవచ్చును.

12.5.20 SAQ :

సమాధానము : ఎబీలియన్ సమూహము G కు ఒక ఉప సమూహం H అనుకొనుము.

$aH, bH \in G/H, \left(a, b \in G\right)$ అనుకొనుము.

G ఎబీలియన్ కనుక $ab = ba$ అవుతుంది.

G/H లో $aHbH = abH = baH = bH\,aH$

కనుక G/H ఎబీలియన్ అవుతుంది.

12.6.7 SAQ :

సమాధానము : G, G' లు సమూహాలు, G' యొక్క తత్సమ మూలకం e' అనుకొనుము.

ప్రమేయము $\phi : G \to G'$ ను $x\phi = e' \ \forall\ x \in G$ గా నిర్వచింపుము.

$(xy)\phi = e' = e'\,e' = (x\phi)(y\phi) \ \forall\ x, y \in G$

$\therefore$ ϕ ఒక సమరూపత.

12.6.11 SAQ :

సమాధానము : A అశూన్య సమితి కనుక A లో ఒక మూలకం a ఉంటుంది.

$$e = a\,a^{-1} \in \langle A \rangle.$$

$$\therefore \langle A \rangle \neq \phi$$

$x = x_1 x_2 \cdots x_n$, $y = y_1 y_2 \cdots y_m \in \langle A \rangle$, x_i లేక $x_i^{-1} \in A$, y_j లేక $y_j^{-1} \in A$ అనుకొనుము.

అపుడు $xy^{-1} = x_1 x_2 \cdots x_n\, y_m^{-1}\, y_{m-1}^{-1} \cdots y_2^{-1}\, y_1^{-1}$

x_i లేక $x_i^{-1} \in A$, y_j^{-1} లేక $\left(y_j^{-1}\right)^{-1} = y_j \in A$ అవుతుంది.

$\therefore$ $xy^{-1} \in \langle A \rangle$

కనుక G కు $\langle A \rangle$ ఒక ఉప సమూహమవుతుంది. ఇంకా $A \subseteq \langle A \rangle$ అనేది స్పష్టము.

G కు H ఒక ఉప సమూహము, $A \subseteq H$ అనుకొనుము.

$x = x_1 x_2 \cdots x_n \in \langle A \rangle$, x_i లేక $x_i^{-1} \in A$ అనుకొనుము.

అపుడు x_i లేక $x_i^{-1} \in H$ అయి, H ఉప సమూహం గనుక $x_i \in H$ అవుతుంది.

$\therefore x \in H$

కనుక $\langle A \rangle \subseteq H$

$\therefore$ A ఉప సమితిగా గల G యొక్క ఉప సమితులన్నింటిలోను $\langle A \rangle$ కనిష్ఠము.

12.6.13 SAQ :

సమాధానము : $\phi : G \to G'$ సమూహాల సమరూపత అనుకొనుము. G సరళ సమూహము అనుకొనుము. సిద్ధాంతము 12.6.8లోని (iii) నుండి G కు $Ker\ \phi$ అభిలంబ ఉప సమూహము. G యొక్క తత్సమ మూలకము e అనుకొనుము. G సరళ సమూహము గనుక $Ker\phi = \{e\}$ లేదా $Ker\phi = G$ అవుతుంది.

$Ker\phi = \{e\}$ అయితే ϕ అన్వేక సమరూపత అవుతుంది.

$Ker\ \phi = G$ అయితే $g\phi = e'\ \forall g \in G$, ($G'$ లోని తత్సమ మూలకం e') అవుతుంది.

12.6.16 SAQ :

సమాధానము : $\phi : G \to G/N$ నియత సమరూపత అనుకొనుము.

G/N యొక్క తత్సమ మూలకం N అని మనకు తెలుసు.

$Ker\phi = \{g \in G / g\phi = N\} = \{g \in G / gN = N\} = \{g \in G / g \in N\} = N$

12.7.7 SAQ :

సమాధానము : $\langle G, +\rangle$ ఎబీలియన్ కావడం వలన Z యొక్క అన్ని ఉప సమూహాలు అభిలంబ ఉప సమూహాలవుతాయి, అని nZ, n పూర్ణాంకము, $n \geq 0$ రూపంలో వుంటాయి.

(i) Z కు nZ అధికతను ఉప సమూహం అనుకొనుము.

$n = k\ell$. k, ℓ లు ధన పూర్ణాంకాలనుకొనుము.

అపుడు $nZ = k\ell Z \subseteq kZ \subseteq Z$

nZ అధికతమం కాబట్టి $nZ = kZ$ లేక $kZ = Z$ అవుతుంది.

$nZ = kZ$ అయితే $k = nm$ అయ్యేటట్లు ధన పూర్ణాంకం m ఉంటుంది.

$$n = k\ell = nm\ell \Rightarrow m\ell = 1 \Rightarrow m = \ell = 1$$

$kZ = Z$, అయితే $1 = km$ అయ్యేటట్లు ధన పూర్ణాంకం m వుంటుంది.

$$\Rightarrow k = 1$$

కనుక $k = 1$ లేదా $\ell = 1$ అవుతుంది.

అందువలన n ప్రధాన సంఖ్య అవుతుంది.

విపర్యయంగా n ప్రధాన సంఖ్య అనుకొనుము.

$nZ \subseteq mZ \subseteq Z$ అనుకుంటే $n \in nZ \Rightarrow n \in mZ \Rightarrow n = m\ell$ అయ్యేటట్లు ధన పూర్ణాంకం ℓ ఉంటుంది.

$\Rightarrow m = 1$ లేదా $\ell = 1$ ($\because$ n ప్రధాన సంఖ్య)

$m = 1$ అయితే $mZ = Z$

$\ell = 1$ అయితే $m = n$, $nZ = mZ$.

Z కు nZ అధికతమ అభిలంబ ఉప సమూహము.

12.9 అభ్యాసాలు :-

12.9.1: $Z_{36}/\langle 5\rangle$ యొక్క తరగతిని కనుగొనుము.

12.9.2: $Z_{12}/\langle 4\rangle$ సమూహంలో సహ సమితి $5+\langle 4\rangle$ యొక్క తరగతిని కనుగొనుము.

12.9.3: S_3లో $\{\rho_0, \mu_1\}$కు సంయుగ్మంగా వుండే అన్ని ఉప సమూహాలను కనుగొనుము.

(Ref ఉదా॥ 10.4.10)

12.9.4: ఒక సమూహంలో తత్సమం కాని మూలకాలన్నీ అనంత తరగతి కలిగి వుంటే ఆ సమూహాన్ని విమోటన విమోచన సమూహం అంటాము. ఒక ఎబీలియన్ సమూహం G లో పరిమిత తరగతి గల మూలకాలన్నింటి యొక్క ఉప సమితి T, G కు అభిలంబ ఉప సమూహమవుతుందని చూపుము. ఈ ఉప సమూహము T ని G యొక్క విమోటన ఉప సమూహము అంటాము. సమూహము G/T విమోటన విమోచనమని చూపుము.

(సూచన : $(aT)^n = a^nT = T \Rightarrow a^n \in T \Rightarrow \left(a^n\right)^m = a^{nm} = e$ అయ్యేటట్లు ఒక పూర్ణాంకము m వుంటుంది. $\Rightarrow a \in T \Rightarrow aT = T$)

12.9.5: పరిమిత సమూహం G యొక్క ఒక ఉప సమూహం H అనుకొనుము. $m = (G:H)$ అనుకొనుము. ప్రతి $a \in G$ కు $a^m \in H$ అని చూపుము.

(సూచన: G పరిమిత సమూహము, $a \in G$ అయితే $a^{0(G)} = e$)

12.9.6: సమూహం G కు ఒక ఉప సమితి అనుకొనుము. G లలో S ఉప సమితిగా గల కనిష్ఠ అభిలంబ ఉప సమూహముంటుందని చూపుము.

(సూచన: S.A.Q. 12.5.11)

12.9.7: సమూహం G కు N అభిలంబ ఉప సమూహము, H ఉప సమూహము అయితే H కు $H \cap N$ అభిలంబ ఉప సమూహం అవుతుందని చూపుము. ఒక ఉదాహరణ ద్వారా G కు $H \cap N$ అభిలంబ ఉప సమూహం కానవసరం లేదని చూపుము.

12.9.8: ఒక సమూహం యొక్క ఉప సమూహాలన్నింటి సముదాయం పై $A \sim B \Leftrightarrow A, B$ లు సంయుగ్మ ఉప సమూహాలుగా నిర్వచించిన సంబంధం $\sim$ ఒక తుల్య సంబంధమవుతుందని చూపుము. ఈ తుల్య సంబంధం క్రింద తుల్య వర్గంలో ఒకే ఒక మూలకం ఉండే ఉప సమూహాలను నిర్ణయించండి.

12.9.9: సమూహం G లో N అభిలంబ ఉప సమూహం, H ఉప సమూహమైతే $NH = HN$ అని చూపుము.

12.9.10: సమూహం G లో M, N లు అభిలంబ ఉప సమూహాలైతే G కు NM అభిలంబ ఉప సమూహమవుతుందని చూపుము.

12.9.11: సమూహం G కు H, K లు అభిలంబ ఉప సమూహాలు, $H \cap K = \{e\}$ అయితే $\forall\ h \in H, k \in K, hk = kh$ అని చూపుము.

12.9.12: $\phi : G \to G'$ సమూహాల సమరూపత అనుకొనుము.

$\forall\ n \geq 1, x_1, x_2, ..., x_n \in G, (x_1 x_2 \cdots\cdots x_n)\phi = (x_1\phi)(x_2\phi)\cdots\cdots(x_n\phi)$ అని

$\forall\ x \in G, x^n\phi = (x\phi)^n$ అని చూపుము.

12.9.13: దిగువనీయబడిన ప్రమేయాలు సమరూపతలో కాదో నిర్ణయించండి. సమరూపతలైతే వాని ప్రతిబింబాలను, అంతస్థి (Kernel) లను నిర్ణయించండి.

(a) $\phi : Z_6 \to Z_2$, $x\phi =$ x ను 2 చే భాగించగా వచ్చిన శేషం.

(b) $\phi : Z_9 \to Z_2$, $x\phi =$ x ను 2 చే భాగించగా వచ్చిన శేషం.

12.9.14: క్రింది వాటిలో సమరూపతల సంఖ్యను నిర్ణయింపుము.

(i) $Z \to Z$ సంగ్రస్తము (ii) $Z \to Z_2$ (iii) $Z \to Z_2$ సంగ్రస్తము (iv) $Z \to Z_8$

(v) $Z \to Z_8$ సంగ్రస్తము (vi) $Z_{12} \to Z_5$ సంగ్రస్తము (vii) $Z_{12} \to Z_6$ సంగ్రస్తము

(viii) $Z_{12} \to Z_6$ (ix) $Z_{12} \to Z_{14}$ (x) $Z_{12} \to Z_{16}$

(సూచన: ఫలితం 12.6.12)

12.9.15: $\phi_1 : G_1 \to G_2$, $\phi_2 : G_2 \to G_3$ సమూహాల సమరూపతలైతే $\phi_1\phi_2 : G_1 \to G_3$ సమరూపత అని చూపుము.

12.9.16: $\phi_1 : G_1 \to G_2, \phi_2 : G_2 \to G_1$ సమూహాల సమరూపతలకు $\phi_1\phi_2$, G_1 పై తత్సమ ప్రమేయము, $\phi_2\phi_1$, G_2 పై తత్సమ ప్రమేయమైతే ϕ_1, ϕ_2 లు తుల్యరూపతలని చూపుము.
(సూచన $\phi_1\phi_2$ లు అన్వేకము, సంగ్రస్తము అని చూపండి).

12.9.17: n తరగతిగా గల పరిమిత ఎబీలియన్ సమూహం G అనుకొనుము. n కు సాపేక్ష ప్రధానమైతే ఒక ధన పూర్ణాంకము m అనుకొనుము. $a\phi_m = a^m$ గా నిర్వచింపబడిన $\phi_m : G \to G$ ప్రమేయము ఒక తుల్యరూపత అని చూపుము. (దీని నుండి, ఒక పరిమిత ఎబీలియన్ సమూహం యొక్క తరగతికి m సాపేక్ష ప్రధానమయితే, G లో $x^m = a$ సమీకరణానికి ఏకైక సాధన ఉంటుందని తెలుస్తుంది).

12.10 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు :-

12.10.1: సమూహం G కు H ఒక ఉప సమూహమనుకొనుము. G లో H యొక్క ఎడమ (కుడి) సహ సమితుల సమితి పై ప్రేరిత గుణకార పరిక్రియ స్పష్టంగా నిర్వచింపబడడానికి ఆ.ప.ని. ప్రతి ఎడమ సహ సమితి ఒక కుడి సహ సమితి కావడం అని చూపుము.

12.10.2: ఒక సమూహం G యొక్క అభిలంబ ఉప సమూహాన్ని నిర్వచింపుము. సమూహం G యొక్క ఒక ఉప సమూహం H పై ఈ క్రింది నియమాలు తుల్యములు అని చూపుము

(i) G కు H అభిలంబ ఉప సమూహము.

(ii) $g^{-1}Hg \subseteq H \ \forall \ g \in G$.

(iii) G లో H యొక్క ప్రతి ఎడమ సహ సమితి G లో H యొక్క కుడి సహ సమితి అవుతుంది.

12.10.3: $n \geq 5$ కు ఏకాంతర సమూహము A_n సరళ సమూహమని చూపండి.

12.10.4: ఒక పరిమిత సమూహం G లో యిచ్చిన తరగతి గల సమూహం H ఒక్కటే అయితే G కు H అభిలంబ ఉప సమూహమని చూపుము.

12.10.5: సమూహాల సమరూపతను నిర్వచింపుము. $\phi : G \to G'$ సమూహాల సమరూపత, H, K లు క్రమంగా G, G' లకు ఉప సమూహాలైతే $H\phi$, $K\phi^{-1}$ లు క్రమంగా G', G లకు ఉప సమూహాలని చూపుము. G లో H అభిలంబమైతే $G\phi$ లో $H\phi$ అభిలంబమని, G' లో K అభిలంబమైతే G లో $K\phi^{-1}$ అభిలంబమని చూపుము.

12.10.6: ఒక సమూహం G' యింకొక సమూహం G యొక్క సమరూపతా ప్రతిబింబం కావడానికి ఆ.ప.ని G యొక్క ఒక వ్యుత్పన్న సమూహానికి G' తుల్యరూపం కావడం అని చూపుము.

12.10.7: సమూహాల సమరూపత యొక్క అంతస్థి (Kernel) ను నిర్వచింపుము. వాస్తవ సంఖ్యల సంకలన సమూహము R, శూన్యేతర సంకీర్ణ సంఖ్యల గుణకార సమూహం C^* అయితే $x\phi = \cos x + i \sin x \ \forall \ x \in R$ గా నిర్వచింపబడిన ప్రమేయం $\phi : R \to C^*$ సమరూపత అవుతుందని చూపి దాని అంతస్థిని కనుగొనుము.

12.10.8: సమూహం G లో M ఒక అభిలంబ ఉప సమూహమనుకొనుము. G లో M అధికతను అభిలంబ ఉప సమూహము $\Leftrightarrow G/M$ సరళ సమూహమని చూపుము.

12.10.9: ఒక సమూహాల సమరూపత ϕ అన్వేక సమరూపత $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\,\phi = \{e\}$, (e అనేది ϕ యొక్క ప్రదేశములోని తత్సమ మూలకం) అని చూపుము.

12.10.10: Z నుండి Z_8 కు గల సంగ్రస్త సమరూపతల సంఖ్యను నిర్ణయించండి.

12.10.11: సమూహాల సమరూపతల యొక్క సంయోజనము (నిర్వచింపబడితే) ఒక సమరూపత అని చూపుము.

12.10.12: G ఒక సమూహము G యొక్క అంతర స్వయం తుల్య రూపతల సమూహము I_G అనుకొనుము. $g\psi = i_g$ గా నిర్వచింపబడిన ప్రమేయం $\psi : G \to I_G$ ఒక సమరూపత అని చూపి $\mathrm{Ker}\,\psi$ ను కనుగొనుము.

12.11 ప్రామాణిక గ్రంథాలు :-

1. A first course in Abstract Algebra by J.B. Fraleigh, Narosa Pub. Home, 1988
2. Topoics in Algebra, by I.N. Herstein; Wiley Eastern Ltd., New Delhi, 1975
3. Basic Algebra, Vol. 1 & 2, by N. Jacobson, Hindustan Pub. Company 1980.
4. A Text Book of Modern Abstract Algebra; by Santi Narayan; S.Chand & Co.

పాఠ్య రచయిత

Smt. N. Rajani

పాఠ్యభాగము - 13

సదిశా అవకలనము

13.1 పాఠ్యభాగ లక్ష్యము:

ఈ పాఠ్యభాగములో ఒక వాస్తవ చలరాశి మరియు బహు వాస్తవ చలరాశుల సదిశా ప్రమేయముల గురించి చర్చిస్తాము. వాస్తవ చలరాశిలో ఉన్న వాస్తవ మూల్య ప్రమేయములకు ఉన్న అవకలన కలన గణితాన్ని సదిశా ప్రమేయములకు విస్తరిస్తాము. ఉదాహరణకు, అవధి, అవిచ్ఛిన్నత, అవకలనము అను భావములు సదిశా ప్రమేయములకు, బహు వాస్తవ చలరాశుల సదిశా ప్రమేయములకు పాక్షిక అవకలనాన్ని చర్చిస్తాము. కొన్ని ఫలితాలు నిరూపిస్తాము. కొన్ని సమస్యలు చర్చిస్తాము.

13.2 పాఠ్యభాగ నిర్మాణము:

ఈ పాఠ్యభాగములో ఈ క్రింది భాగములుంటాయి.

13.3 ఉపోద్ఘాతము:

ఈ పాఠ్యభాగములో సదిశా ప్రమేయములు, వీటి అవకలన కలన గణితము యొక్క భావములు వివరిస్తాము. వీటిని ఘన యాంత్రిక శాస్త్రము, ద్రవ ప్రవాహము, ఉష్ణ ప్రవాహము, విద్యుత్ స్థితి శాస్త్రము మొదలగు వానిలో ఇంజనీర్లు, భౌతిక శాస్త్రవేత్తలు ఉపయోగిస్తారు.

13.4 సదిశా ప్రమేయము, అదిశా ప్రమేయము, సదిశా బిందు ప్రమేయము, అదిశా బిందు ప్రమేయము:

13.4.1 నిర్వచనము: $\phi \neq S \subseteq R$ V త్రి పరిమాణ సదిశల సమితి (R వాస్తవ సంఖ్యా సమితి).

$\overline{f} : S \to V$ అను ప్రమేయమును Sలో ఒక సదిశా ప్రమేయము అంటాము.

$f : S \to R$ అను ప్రమేయమును Sలో ఒక అదిశా ప్రమేయము అంటాము.

13.4.2 నిర్వచనము: $\phi \neq D \subseteq R^3$ V త్రి పరిమాణ సదిశల సమితి.

$\overline{f} : D \to V$ అను ప్రమేయమును Dలో సదిశా బిందు ప్రమేయము అంటాము.

$f : D \to R$ అను ప్రమేయమును Dలో అదిశా బిందు ప్రమేయము అంటాము.

13.4.3 గమనిక: X, Y, Z అక్షాల ధనాత్మక దిశలలో పరస్పరం లంబంగా ఉండే యూనిట్ సదిశలు $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ అయితే, $\overline{f}$ అను సదిశా ప్రమేయమును

$$\overline{f}(t) = f_1(t)\overline{i} + f_2(t)\overline{j} + f_3(t)\overline{k}$$

అని వ్రాయవచ్చు. (f_1, f_2, f_3 లు వాస్తవ మూల్య ప్రమేయములు $\overline{f}$ యొక్క అంశలు అంటాము).

13.4.4 ఉదాహరణ: $\overline{f}(t) = a\cos t\,\overline{i} + a\sin t\,\overline{j} + 0\overline{k}$ $\forall$ $t \in [0, 2\pi]$, అను సమీకరణము XY తలంలో మూల బిందువు కేంద్రముగా a వ్యాసార్థముగా గల $x^2 + y^2 = a^2$ అను వృత్తాన్ని సూచిస్తుంది $(a > 0)$.

13.4.5 ఉదాహరణ: $\overline{f}(t) = at^2 i + 2at\overline{j} + o\overline{k},\ \forall t \in R$ అను సమీకరణము XY తలములో $\left(y^2 = 4ax\right)$ అను పరావలయాన్ని సూచిస్తుంది.

13.4.6 ఉదాహరణ: $\overline{f}(t) = a\cos t\,\overline{i} + b\sin t\,\overline{j}$, $\forall t \in [0, 2\pi]$ అనే సమీకరణము XY తలంలో $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\,(a, b \in R,\ a \neq b)$ అను దీర్ఘ వృత్తాన్ని సూచిస్తుంది.

13.5 అవధులు, అవిచ్ఛిన్నత:

13.5.1 నిర్వచనము: $a, \delta \in R$, $\delta > 0$. $\{x \in R / a - \delta < x < a + \delta\}$ అను సమితిని a యొక్క $\delta -$ సామీప్యము (a యొక్క ఒక సామీప్యము) అనీ, $\{x \in R / a - \delta < x < a + \delta,\ x \neq a\}$ ను a యొక్క విసర్జిత $\delta -$ సామీప్యము (a యొక్క విసర్జిత సామీప్యము) అంటాము.

13.5.2 నిర్వచనము: $a \in R$, $\overline{L}$ ఒక సదిశ. a యొక్క విసర్జిత సామీప్యములో $\overline{f}$ ఒక సదిశా ప్రమేయము నిర్వచింపబడినదనుకొందాము. ప్రతి $\in > 0$ కు అనుగుణంగా $\delta > 0$, $0 < |t - a| < \delta \Rightarrow \left|\overline{f}(t) - \overline{L}\right| < \in$ అగునట్లు వ్యవస్థితమైతే $\underset{t \to a}{Lt}\ \overline{f}(t) = \overline{L}$ అంటాము.

వాస్తవ మూల్య ప్రమేయముల మాదిరిగానే సదిశా ప్రమేయములలో కూడా అవధులు వ్యవస్థితమైనపుడు ఈ క్రింది అవధి సిద్ధాంతాలను నిరూపించవచ్చు.

$$\underset{t\to a}{\mathrm{Lt}}\left[\bar{f}(t)\pm\bar{g}(t)\right]=\underset{t\to a}{\mathrm{Lt}}\,\bar{f}(t)\pm\underset{t\to a}{\mathrm{Lt}}\,\bar{g}(t)$$

$$\underset{t\to a}{\mathrm{Lt}}\,k\bar{f}(t)=k\underset{t\to a}{\mathrm{Lt}}\,\bar{f}(t),\quad k\in\mathrm{R}$$

$$\underset{t\to a}{\mathrm{Lt}}\left[\bar{f}(t)\cdot\bar{g}(t)\right]=\underset{t\to a}{\mathrm{Lt}}\,\bar{f}(t)\cdot\underset{t\to a}{\mathrm{Lt}}\,\bar{g}(t),$$

$$\underset{t\to a}{\mathrm{Lt}}\,\bar{f}(t)\times\bar{g}(t)=\underset{t\to a}{\mathrm{Lt}}\,\bar{f}(t)\times\underset{t\to a}{\mathrm{Lt}}\,\bar{g}(t),$$

(. అనేది అదిశా లబ్ధము, $\times$ అనేది సదిశా లబ్ధము)

13.5.3 నిర్వచనము: $\bar{f}$ అనేది $a\in\mathrm{R}$ యొక్క సామీప్యములో నిర్వచింపబడిన సదిశా ప్రమేయము. ప్రతి $\in>0$కు అనుగుణంగా $\delta>0$

$$|t-a|<\delta\Rightarrow\left|\bar{f}(t)-\bar{f}(a)\right|<\in$$

అగునట్లు వ్యవస్థితమైతే $\bar{f}$, a వద్ద అవిచ్ఛిన్నము అంటాము.

i.e. $\underset{t\to a}{\mathrm{Lt}}\,\bar{f}(t)=\bar{f}(a)$ అయితే $\bar{f}$, a వద్ద అవిచ్ఛిన్నము.

13.5.4 నిర్వచనము: $a\in\mathrm{R}$, $\bar{f}$ అనేది a యొక్క సామీప్యములో నిర్వచించబడిన సదిశా ప్రమేయము అనుకొందాము. ప్రతి $\in>0$కు అనుగుణంగా $t\in(a,a+\delta)\Rightarrow\left|\bar{f}(t)-\bar{f}(a)\right|<\in$ అగునట్లు $\delta>0$ వ్యవస్థితమైతే $\bar{f}$, a వద్ద కుడి అవిచ్ఛిన్నము అంటాము.

13.5.5 నిర్వచనము: $a\in\mathrm{R}$, $\bar{f}$ అనేది a యొక్క సామీప్యములో నిర్వచించబడిన సదిశా ప్రమేయము అనుకొనుము. ప్రతి $\in>0$కు అనుగుణంగా $t\in(a-\delta,a)\Rightarrow\left|\bar{f}(t)-\bar{f}(a)\right|<\in$ అగునట్లు $\delta>0$ వ్యవస్థితమైతే $\bar{f}$, a వద్ద ఎడమ అవిచ్ఛిన్నము అంటాము.

$\bar{f}$, $\bar{g}$లు a వద్ద అవిచ్ఛిన్నమైతే $\bar{f}+\bar{g}$, $\bar{f}-\bar{g}$, $\bar{f}\cdot\bar{g}$, $\bar{f}\times\bar{g}$, $k\bar{f}$, $(k\in\mathbb{R})$లు a వద్ద అవిచ్ఛిన్నమవుతాయి.

(. మరియు $\times$లు సదిశల అదిశా లబ్ధము మరియు సదిశా లబ్ధము).

13.5.6 గమనిక: (a,b) అను వివృతాంతరములోని ప్రతి t వద్ద $\bar{f}$ అవిచ్ఛిన్నమయితే (a,b)లో $\bar{f}$ అవిచ్ఛిన్నము అంటాము. (a,b)లో $\bar{f}$ అవిచ్ఛిన్నము, $\bar{f}$, a వద్ద కుడి అవిచ్ఛిన్నము, b వద్ద ఎడమ అవిచ్ఛిన్నము అయితే $\bar{f}$, $[a,b]$లో అవిచ్ఛిన్నము అంటాము.

13.6 అవకలనము:

13.6.1 నిర్వచనము: $a \in R$ యొక్క సామీప్యములో $\bar{f}$ అను సదిశా ప్రమేయము నిర్వచించబడి, $\underset{t\to a}{Lt}\dfrac{\bar{f}(t)-\bar{f}(a)}{t-a}$ వ్యవస్థితమైతే a వద్ద $\bar{f}$ అవకలనీయము అనీ, ఆ అవధిని a వద్ద $\bar{f}$ యొక్క అవకలజము అనీ అంటాము. దీనిని $\bar{f}'(a)$ లేక $\left(\dfrac{d\bar{f}}{dt}\right)_{t=a}$ అని వ్రాస్తాము.

13.6.2 సిద్ధాంతము: $\bar{f}$, a వద్ద అవకలనీయమైతే అది a వద్ద అవిచ్ఛిన్నము.

ఉపపత్తి: $\underset{t\to a}{Lt}\left[\bar{f}(t)-\bar{f}(a)\right]=\underset{t\to a}{Lt}\left[\dfrac{\bar{f}(t)-\bar{f}(a)}{t-a}\right](t-a)$

$$=\underset{t\to a}{Lt}\frac{\bar{f}(t)-\bar{f}(a)}{t-a}\cdot\underset{t\to a}{Lt}(t-a)$$

$$=\bar{f}'=0=\bar{0}$$

$$=\lim_{t\to a}\bar{f}(t)=\bar{f}(a)\Rightarrow a$$ వద్ద $\bar{f}$ అవిచ్ఛిన్నము.

ఈ క్రింది ఉదాహరణ ద్వారా 13.6.2 సిద్ధాంతము యొక్క విపర్యయము నిజము కాదు అని తెలుస్తుంది.

13.6.3 ఉదాహరణ: $\bar{f}(t)=|f|\,\bar{i}\,\forall t\in R$ అని $\bar{f}$ ను నిర్వచిస్తే $t=0$ వద్ద $\bar{f}$ అవిచ్ఛిన్నమే కాని అవకలనీయము కాదు అని దిగువ వివరణతో స్పష్టమవుతుంది.

$\underset{t\to 0}{Lt}\,\bar{f}(t)=\underset{t\to 0}{Lt}\,|t|\,\bar{i}=0\,\bar{i}=\bar{0}=\bar{f}(0)$ $\bar{f}$, $t=0$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నము.

$$\underset{t\to 0}{Lt}\frac{\bar{f}(t)-\bar{f}(0)}{t-0}=\underset{t\to 0}{Lt}\frac{|t|\,\bar{i}-\bar{0}}{t-0}=\underset{t\to 0}{Lt}\frac{|t|}{t}\bar{i},$$

ఈ అవధి వ్యవస్థితము కాదు $\left(\because\ \underset{t\to 0_+}{Lt}\dfrac{|t|}{t}=1 \quad \text{and} \quad \underset{t\to 0_-}{Lt}\dfrac{|t|}{t}=-1\right)$

కాబట్టి $\bar{f}$, $t=0$ వద్ద అవకలనీయం కాదు.

అందుచేత అవిచ్ఛిన్నత అనేది అవకలనీయతకు ఆవశ్యక నియమము మాత్రమే కాని పర్యాప్త నియమము కాదు అని గమనించవచ్చు.

13.6.4 గమనిక: $\frac{d\bar{f}}{dt} = \underset{x \to t}{\mathrm{Lt}} \frac{\bar{f}(x) - \bar{f}(t)}{x - t}$

లేక $\underset{\delta t \to t}{\mathrm{Lt}} \frac{\bar{f}(t + \delta t) - \bar{f}(t)}{\delta t}$

అని వ్రాయవచ్చు. $(\because \; x = t + \delta t,$ అయితే $x \to t$ iff $\delta t \to 0)$

13.6.5 సిద్ధాంతము: $S(\subseteq R)$ పై $\bar{f}, \bar{g}$ లు సదిశా ప్రమేయములు. $t \in S$, వద్ద $\bar{f}, \bar{g}$ లు అవకలమీయమైతే t వద్ద $\bar{f} \pm \bar{g}$ అవకలనీయము.

మరియు $\frac{d}{dt}(\bar{f} \pm \bar{g}) = \frac{d\bar{f}}{dt} \pm \frac{d\bar{g}}{dt}$

ఉపపత్తి: $\bar{F} = \bar{f} \pm \bar{g}$ అనుకొందాము.

$$\frac{d}{dt}(\bar{f} \pm \bar{g}) = \frac{d\bar{F}}{dt} = \underset{\delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\bar{F}(t + \delta t) - \bar{F}(t)}{\delta t} = \underset{\delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{(\bar{f} \pm \bar{g})(t + \delta t) - (\bar{f} + \bar{g})(f)}{\delta t}$$

$$= \underset{\delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\bar{f}(t + \delta t) \pm \bar{g}(t + \delta t) - [\bar{f}(t) \pm \bar{g}(t)]}{\delta t}$$

$$= \underset{\delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\bar{f}(t + \delta t) - \bar{f}(t)}{\delta t} \pm \underset{\delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\bar{g}(t + \delta t) - \bar{g}(t)}{\delta t}$$

$$= \frac{d\bar{f}}{dt} \pm \frac{d\bar{g}}{dt}$$

$\therefore \bar{f} \pm \bar{g}$ అనేది t వద్ద అవకలనీయము మరియు $\frac{d}{dt}(\bar{f} \pm \bar{g}) = \frac{d\bar{f}}{dt} \pm \frac{d\bar{g}}{df}$ అగును.

13.6.6 సిద్ధాంతం: $S(\subseteq R)$ లో $\bar{f}, \bar{g}$ అను సదిశా ప్రమేయములు. $t \in S$, వద్ద $\bar{f}, \bar{g}$ లు అవకలనీయమైతే $\bar{f} \cdot \bar{g}$, $\bar{f} \times \bar{g}$, $k\bar{f}$ $(k \in \mathbb{R})$ లు t వద్ద అవకలనీయము మరియు

$$\frac{d}{dt}(\bar{f} \cdot \bar{g}) = \frac{d\bar{f}}{dt} \cdot \bar{g} + \bar{f} \cdot \frac{d\bar{g}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{f} \times \bar{g}) = \frac{d\bar{f}}{dt} \times \bar{g} + \bar{f} \times \frac{d\bar{g}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(k\bar{f}) = k\frac{d\bar{f}}{dt}$$

ఉపపత్తి: $F = \bar{f} \cdot \bar{g}$ అనుకొనుము.

$$\underset{\delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\bar{F}(t+\delta t) - \bar{F}(t)}{\delta t} = \underset{\delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{(\bar{f}\cdot\bar{g})(t+\delta t) - (\bar{f}\cdot\bar{g})(t)}{\delta t}$$

$$= \underset{\delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\bar{f}(t+\delta t)\cdot\bar{g}(t+\delta t) - \bar{f}(t)\cdot\bar{g}(t)}{\delta t}$$

$$= \underset{\delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\bar{f}(t+\delta t)\cdot\{\bar{g}(t+\delta t) - \bar{g}(t)\} + \{\bar{f}(t+\delta t) - \bar{f}(t)\}\cdot\bar{g}(t)}{\delta t}$$

$$= \underset{\delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \bar{f}(t+\delta t)\cdot\left\{\frac{\bar{g}(t+\delta t) - \bar{g}(t)}{\delta t}\right\} + \underset{\delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \left\{\frac{\bar{f}(1+\delta t) - \bar{f}(t)}{\delta t}\right\}\cdot\bar{g}(t)$$

$$= \bar{f}(t)\cdot\frac{d\bar{g}}{dt} + \frac{d\bar{f}}{dt}\cdot\bar{g}$$

($\therefore$ t వద్ద $\bar{f}$ అవకలనీయం $\Rightarrow$ t వద్ద $\bar{f}$ అవిచ్ఛిన్నం $\Rightarrow \underset{\delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \bar{f}(t+\delta t) = \bar{f}(t)$)

t వద్ద F అవకలనీయం మరియు $\frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{f}\cdot\bar{g}) = \bar{f}\cdot\frac{d\bar{g}}{dt} + \frac{df}{dt}\cdot\bar{g}$

ఇదే విధముగా మిగిలిన వాటిని కూడా నిరూపించవచ్చు.

13.6.7 సిద్ధాంతము: $\bar{f}, \bar{g}, \bar{h}$ లు $S(\subseteq R)$ లో సదిశా ప్రమేయములు. ఇవి $t \in S$ వద్ద అవకలనీయమైతే

(i) $\frac{d}{dt}\left[\bar{f}\ \bar{g}\ \bar{h}\right] = \left[\frac{d\bar{f}}{dt}\ \bar{g}\ \bar{h}\right] + \left[\bar{f}\ \frac{d\bar{g}}{dt}\ \bar{h}\right] + \left[\bar{f}\ \bar{g}\ \frac{d\bar{h}}{dt}\right]$

(ii) $\frac{d}{dt}\{\bar{f}\times(\bar{g}\times\bar{h})\} = \frac{d\bar{f}}{dt}\times(\bar{g}\times\bar{h}) + \bar{f}\times\left(\frac{d\bar{g}}{dt}\times\bar{h}\right) + \bar{f}\times\left(\bar{g}\times\frac{d\bar{h}}{dt}\right)$

$\left[\bar{f}\ \bar{g}\ \bar{h}\right]$ అనేది $\bar{f}, \bar{g}, \bar{h}$ ల అదిశా త్రిక లబ్ధము.

ఉపపత్తి: t వద్ద $\bar{f}, \bar{g}, \bar{h}$ లు అవకలనీయం $\Rightarrow$ t వద్ద $\bar{f}$, $\bar{g}\times\bar{h}$లు అవకలనీయం.

$\Rightarrow$ t వద్ద $\bar{f}\cdot(\bar{g}\times\bar{h})$, $\bar{f}\times(\bar{g}\times\bar{h})$లు అవకలనీయం అవుతాయి.

$\Rightarrow \left[\bar{f}\bar{g}\bar{h}\right], \bar{f}\times(\bar{g}\times\bar{h})$లు t వద్ద అవకలనీయం అవుతాయి.

(i) $\frac{d}{dt}\left[\bar{f}\ \bar{g}\ \bar{h}\right] = \frac{d}{dt}\ \bar{f}\cdot\left(\bar{g}\times\bar{h}\right)$

$$= \frac{d\bar{f}}{dt}\cdot\left(\bar{g}\times\bar{h}\right) + \bar{f}.\frac{d}{dt}\left(\bar{g}\times\bar{h}\right)$$

$$= \left[\frac{d\bar{f}}{dt}\ \bar{g}\ \bar{h}\right] + \bar{f}\cdot\left\{\frac{d\bar{g}}{dt}\times\bar{h} + \bar{g}\times\frac{d\bar{h}}{dt}\right\}$$

$$= \left[\frac{d\bar{f}}{dt}\ \bar{g}\ \bar{h}\right] + \bar{f}\cdot\left(\frac{d\bar{g}}{dt}\times\bar{h} + \bar{g}\times\frac{d\bar{h}}{dt}\right) = \left[\frac{d\bar{f}}{dt}\bar{g}\,\bar{h}\right] + \bar{f}\cdot\left(\frac{d\bar{g}}{dt}\times\bar{h}\right) + \bar{f}\cdot\left(\bar{g}\times\frac{d\bar{h}}{dt}\right)$$

$$= \left[\frac{d\bar{f}}{dt}\ \bar{g}\ \bar{h}\right] + \left[\bar{f}\ \frac{d\bar{g}}{dt}\ \bar{h}\right] + \left[\bar{f}\ \bar{g}\ \frac{d\bar{h}}{dt}\right]$$

(ii) $\frac{d}{dt}\bar{f}\times\left(\bar{g}\times\bar{h}\right) = \frac{d\bar{f}}{dt}\times\left(\bar{g}\times\bar{h}\right) + \bar{f}\times\frac{d}{dt}\left(\bar{g}\times\bar{h}\right)$

$$= \frac{d\bar{f}}{dt}\times\left(\bar{g}\times\bar{h}\right) + \bar{f}\times\left(\frac{d\bar{g}}{dt}\times\bar{h} + \bar{g}\times\frac{d\bar{h}}{dt}\right)$$

$$= \frac{d\bar{f}}{dt}\times\left(\bar{g}\times\bar{h}\right) + \bar{f}\times\left(\frac{d\bar{g}}{dt}\times\bar{h}\right) + \bar{f}\times\left(\bar{g}\times\frac{d\bar{h}}{dt}\right)$$

13.6.8 సిద్ధాంతము: $S(\subseteq R)$ లో $\bar{f}$ సదిశా ప్రమేయము ϕ అదిశా ప్రమేయము. $t\in S$ వద్ద $\bar{f},\phi$ లు అవకలనీయమైతే $\phi\bar{f}$, t వద్ద అవకలనీయం మరియు $\frac{d}{dt}\left(\phi\bar{f}\right) = \phi\frac{d\bar{f}}{dt} + \frac{d\phi}{dt}\bar{f}$ ఇక్కడ $\phi\bar{f}(t) = \phi(t)\bar{f}(t)\ \forall t\in S$

ఉపపత్తి: $\bar{F} = \phi\bar{f}$ అనుకొందాము.

$$\underset{\delta t\to 0}{Lt}\frac{\bar{F}(t+\delta t) - \bar{F}(t)}{\delta t} = \underset{\delta t\to 0}{Lt}\frac{\left(\phi\bar{f}\right)(t+\delta t) - \left(\phi\bar{f}\right)(t)}{\delta t}$$

$$= \underset{\delta t\to 0}{Lt}\frac{\phi(t+\delta t)\bar{f}(t+\delta t) - \phi(t)\bar{f}(t)}{\delta t}$$

$$= \underset{\delta t\to 0}{Lt}\ \phi(t+\delta t)\left[\frac{\bar{f}(t+\delta t) - \bar{f}(t)}{\delta t}\right] + \underset{\delta t\to 0}{Lt}\left[\frac{\phi(t+\delta t) - \phi(t)}{\delta t}\right]\bar{f}(t)$$

$$= \phi(t)\frac{d\overline{f}}{dt} + \frac{d\phi}{dt}\overline{f}(t)$$

$\therefore$ t వద్ద $\overline{F}$ అవకలనీయము మరియు $\frac{d\overline{F}}{dt} = \phi\frac{d\overline{f}}{dt} + \frac{d\phi}{dt}\overline{f}$

13.6.9 సిద్ధాంతము: $\overline{f}(t) = f_1(t)\overline{i} + f_2(t)\overline{j} + f_3(t)\overline{k}$ అయితే

$$\frac{d\overline{f}}{dt} = \frac{df_1}{dt}\overline{i} + \frac{df_2}{dt}\overline{j} + \frac{df_3}{dt}\overline{k}$$

ఉపపత్తి: $\frac{d\overline{f}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[f_1(t)\overline{i} + f_2(t)j + f_3(t)\overline{k}\right]$

$$= \frac{d}{dt}f_1(t)\overline{i} + \frac{d}{dt}f_2(t)\overline{j} + \frac{d}{dt}f_3(t)\overline{k} \quad \text{(13.6.5 నుండి)}$$

$$= \frac{df_1}{dt}\overline{i} + \frac{df_2}{dt}\overline{j} + \frac{df_3}{dt}\overline{k} \quad \text{(13.6.8 నుండి)}$$

13.6.10 నిర్వచనము: f_1, f_2, f_3 లు $S(\subseteq R)$పై t అను చలరాశిలో స్థిర ప్రమేయములయితే

$\left(\exists k_1 k_2, k_3 \in \mathbb{R} \ni f_i(t) = k_i \forall t \in \mathbb{R},\ i = 1,2,3\right)$ $\overline{f} = f_1\overline{i} + f_2\overline{j} + f_3\overline{k}$ ను

S పై స్థిర ప్రమేయము అంటాము.

13.6.11 సిద్ధాంతము: $\overline{f}$, $S(\subseteq \mathbb{R})$పై స్థిర ప్రవమేయము $\Leftrightarrow \frac{d\overline{f}}{dt} = \overline{0}$

ఉపపత్తి: (i) $\overline{f}$ స్థిర ప్రమేయము అనుకొందాము.

$\overline{f}(t) = \overline{c}\ \forall\ t \in S$ అనుకొందాము.

$$\therefore \frac{d\overline{f}}{dt} = \underset{\delta t \to 0}{Lt}\frac{\overline{f}(t+\delta t) - \overline{f}(t)}{\delta t} = \underset{\delta t \to 0}{Lt}\frac{\overline{c} - \overline{c}}{\delta t} = \underset{\delta t \to 0}{Lt}\frac{\overline{0}}{\delta t} = \overline{0},\ \forall t \in S$$

(ii) $\frac{d\overline{f}}{dt} = \overline{0}\ \forall t \in S$ అనుకొందాము.

గావ్ $\overline{f}(t) = f_1(t)\overline{i} + f_2(t)\overline{j} + f_3(t)\overline{k}$ అనుకొందాము.

$$\forall t \in S,\ \frac{d\overline{f}}{dt} = \overline{0} \Rightarrow \frac{df_1}{dt}\overline{i} + \frac{df_2}{dt}\overline{j} + \frac{df_3}{dt}\overline{k} = \overline{0} = 0\overline{i} + 0\overline{j} + 0\overline{k} \forall t \in S$$

$$\Rightarrow \frac{df_1}{dt} = 0,\ \frac{df_2}{dt} = 0,\ \frac{dt_3}{dt} = 0\ \forall t \in S$$

$\therefore f_1, f_2, f_3$ లు S పై స్థిర ప్రమేయములు.

$\Rightarrow \bar{f} = f_1\bar{i} + f_2\bar{j} + f_3\bar{k}$, S పై స్థిర ప్రమేయము.

13.6.12 సిద్ధాంతము: $\bar{f}$ అనేది $S(\subseteq R)$లోని t వద్ద అవకలనీయమగు సదిశ ప్రమేయమయితే

$$\frac{d}{dt}\bar{f}^2 = 2\bar{f}\cdot\frac{d\bar{f}}{dt} = 2|\bar{f}|\frac{d}{dt}|\bar{f}|$$

ఉపపత్తి: $\bar{f}^2 = \bar{f}\cdot\bar{f}$ అని మనకు తెలుసు.

$$\therefore \frac{d}{dt}(\bar{f}^2) = \frac{d}{dt}(\bar{f}\cdot\bar{f}) = \frac{d\bar{f}}{dt}\cdot\bar{f} + \bar{f}\cdot\frac{d\bar{f}}{dt} = 2\bar{f}\cdot\frac{d\bar{f}}{dt}$$

ఇంకా $\bar{f}^2 = \bar{f}\cdot\bar{f} = |\bar{f}|^2$

$$\therefore \frac{d}{dt}(\bar{f}^2) = \frac{d}{dt}|\bar{f}|^2 = 2|\bar{f}|\frac{d}{dt}|\bar{f}|$$

13.6.13 గమనిక: $\bar{f}\cdot\frac{d\bar{f}}{dt} = |\bar{f}|\frac{d}{dt}|\bar{f}|$

13.6.14 సిద్ధాంతము: $S(\subseteq R)$ పై $\bar{f}$ సదిశా ప్రమేయము $\bar{f}$ పరిమాణము (magnitude)లో స్థిరము $\Leftrightarrow \bar{f}\cdot\frac{d\bar{f}}{dt} = 0$.

ఉపపత్తి: (i) $\bar{f}$ పరిమాణములో స్థిరము అనుకొందాము.

$$\therefore \bar{f}(t)\cdot\bar{f}(t) = |\bar{f}(t)|^2 = \text{స్థిరము}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(\bar{f}\cdot\bar{f}) = 0$$

$$\Rightarrow 2\bar{f}\cdot\frac{d\bar{f}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \bar{f}\cdot\frac{d\bar{f}}{dt} = 0$$

(ii) $\bar{f}\cdot\frac{d\bar{f}}{dt}=0$ అనుకొందాము.

$$\Rightarrow 2\bar{f}\cdot\frac{d\bar{f}}{dt}=0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left|\bar{f}(t)\right|^2=0\ \forall\ t\in S$$

$$\Rightarrow \left|\bar{f}(t)\right|^2=\text{ స్థిరము }\ \forall t\in S$$

S పై $\bar{f}$ కు స్థిర పరిమాణముండును.

13.6.15 సిద్ధాంతము: $S(\subseteq R)$ పై $\bar{f}$ సదిశా ప్రమేయము. $\bar{f}$ దిశలో స్థిరము $\Leftrightarrow \bar{f}\times\frac{d\bar{f}}{dt}=\bar{0}$.

ఉపపత్తి: $\bar{f}(t)=f(t)\bar{F}(t)$ అనుకొందాము. $\forall t\in S,\ f(t)=\left|\bar{f}(t)\right|$; $\bar{F}(t)$ అనేది యూనిట్ పరిమాణము గల సదిశా ప్రమేయము అగును.

$\therefore\ \bar{f}=f\ \bar{F}$; ($\bar{F}$ దిశలోను, పరిమాణములోనూ స్థిరము)

$$\frac{d\bar{f}}{dt}=\frac{df}{dt}\bar{F}+f\frac{d\bar{F}}{dt}$$

$$\therefore \bar{f}\times\frac{d\bar{f}}{dt}=f\bar{F}\times\left(\frac{df}{dt}\bar{F}+f\frac{d\bar{F}}{dt}\right)$$

$$=f\frac{df}{dt}\bar{F}\times\bar{F}+f^2\bar{F}\times\frac{d\bar{F}}{dt}$$

$$=f^2\bar{F}\times\frac{d\bar{F}}{dt}\ \text{----------}\ (1)$$

(i) $\bar{f}$ దిశలో స్థిరమనుకొనుము.

$\bar{F}=$ స్థిరము (దిశలోను, పరిమాణములోను) $\Rightarrow \frac{d\bar{F}}{dt}=\bar{0}$

$\therefore$ (1) నుండి $\bar{f}\times\frac{d\bar{f}}{dt}=\bar{0}$

(ii) $\bar{f}\times\frac{d\bar{f}}{dt}=\bar{0}$ అనుకొనుము.

$$\therefore f^2\bar{F}\times\frac{d\bar{F}}{dt}=\bar{0}$$ ((1) నుండి)

$$\Rightarrow \bar{F}\times\frac{d\bar{F}}{dt}=\bar{0} \text{ -------- } (2) \quad \left(\because f^2\neq 0\right)$$

$\bar{F}$ యూనిట్ పరిమాణము గల సదిశ కావున, స్థిర పరిమాణ సదిశ కాబట్టి సిద్ధాంతము 13.6.14 నుండి

$$\bar{F}\cdot\frac{d\bar{F}}{dt}=0 \text{ -------- } (3)$$

(2), (3)ల నుండి $\frac{d\bar{F}}{dt}=\bar{0}$

$\Rightarrow \bar{F}$ స్థిరము

$\Rightarrow \bar{F}$ దిశలో స్థిరము

$\Rightarrow \bar{f}$ దిశలో స్థిరము $\qquad \left(\because \bar{f}=f\ \bar{F}\right)$

13.6.16 నిర్వచనము (సంయుక్త ప్రమేయము): $\phi\neq S\subseteq R$. S పై ϕ అదిశా ప్రమేయం అయితే ϕ యొక్క వ్యాప్తి $\phi(S)\subseteq\mathbb{R}$, $\phi(S)$ పై $\bar{f}$ సదిశా ప్రమేయమయితే S పై $\bar{f}\circ\phi$ అను సదిశా ప్రమేయమును

$\left(\bar{f}\circ\phi\right)(t)=\bar{f}\left(\phi(t)\right), \forall t\in S$ అని నిర్వచిస్తాము.

13.6.17 సిద్ధాంతము: S పై ϕ అదిశా ప్రమేయము. $\phi(S)$ పై $\bar{f}$ సదిశా ప్రమేయము, అనుకొందాము. ϕ అనేది t వద్ద $\bar{f}$ అనేది $\phi(t)$ వద్ద అవకలనీయమయితే $\bar{f}\circ\phi$ అనేది t వద్ద అవకనీయము మరియు

$$\left(\bar{f}\circ\phi\right)'(t)=\bar{f}'\left(\phi(t)\right)\phi'(t)$$

ఉపపత్తి: $$\lim_{\delta t\to 0}\frac{\left(\bar{f}\circ\phi\right)(t+\delta t)-\left(\bar{f}\circ\phi\right)(t)}{\delta t}$$

$$=\underset{\delta t\to 0}{\mathrm{Lt}}\frac{\bar{f}\left\{\phi(t+\delta t)\right\}-\bar{f}\left(\phi(t)\right)}{\delta t}$$

$$= \underset{\delta t \to 0}{Lt} \frac{\overline{f}\{\phi(t+\delta t)\} - \overline{f}(\phi(t))}{\phi(t+\delta t)-\phi(t)} \cdot \frac{\phi(t+\delta t)-\phi(t)}{\delta t}$$

ఈ అవధి వ్యవస్థితము మరియు ఆ అవధి $= \overline{f}^{'}(\phi(t))\phi^{'}(t)$, ($\because$ t వద్ద ϕ అవకలనీయము $\Rightarrow$ t వద్ద ϕ అవిచ్ఛిన్నం కాబట్టి $\underset{\delta t \to 0}{Lt}\ \phi(t+\delta t) = \phi(t)$.

$\therefore$ t వద్ద $\overline{f} \circ \phi$ అవకలనీయం మరియు $(\overline{f} \circ \phi)^{'}(t) = \overline{f}^{'}(\phi(t))\phi^{'}(t)$

13.7 అధిక పరిమాన అవకలజములు:

13.7.1 నిర్వచనము: ఒక అంతరము $I(\subseteq R)$ లో $\overline{f}$ సదిశా ప్రమేయము. I లో $\overline{f}$ అవకలనీయమయితే $\overline{f}$ యొక్క అవకలజము $\overline{f}^{'}$ కూడా I లో సదిశా ప్రమేయము. $\overline{f}^{'}$ కూడా I లో అవకలనీయమయితే $\overline{f}^{'}$ యొక్క అవకలజమును $\overline{f}$ యొక్క రెండవ అవకలజము అంటాము. దీనిని $\overline{f}^{''}$ లేక $\overline{f}^{(2)}$ లేక $\dfrac{d^2\overline{f}}{dt^2}$ తో సూచిస్తాము. $\overline{f} \cdot n$ సార్లు అవకలనీయమయితే $\overline{f}$ యొక్క n వ అవకలజము $\dfrac{d^n\overline{f}}{dt^n}$ లేక $\overline{f}^{(n)} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\overline{f}\right)$

సాధించిన సమస్యలు:

13.7.2: $\overline{A} = 5t^2\overline{i} + t^3\overline{j} - t\overline{k},\ \overline{B} = 2\sin t\,\overline{i} - \cos t\,\overline{j} + 5t\overline{k}$ అయితే $t=0$ వద్ద $\dfrac{d}{dt}(\overline{A}\cdot\overline{B})$ విలువ కనుక్కోండి.

సాధన: $\overline{A}\cdot\overline{B} = 5t^2(2\sin t) + t^3(-\cos t) + (-t)5t$

$$= 10t^2 \sin t - t^3 \cos t - 5t^2$$

$$\frac{d}{dt}(\overline{A}\cdot\overline{B}) = 10t^2\cos t + 20t\sin t + t^3\sin t - 3t^2\cos t - 10t$$

$\therefore t=0$ వద్ద $\dfrac{d}{dt}(\overline{A}\cdot\overline{B}) = 0$

13.7.3: $\overline{r}$ సదిశా ప్రమేయమయితే

(a) $[\overline{r}\ \overline{r}'\ \overline{r}'']' = [\overline{r}\ \overline{r}'\ \overline{r}''']$ (b) $[\overline{r}\times(\overline{r}'\times\overline{r}'')]' = \overline{r}'\times(\overline{r}'\times\overline{r}'') + \overline{r}\times(\overline{r}'\times\overline{r}''')$ అని చూపండి.

సాధన: (a) $[\overline{r}\ \overline{r}'\ \overline{r}'']' = [\overline{r}'\ \overline{r}'\ \overline{r}''] + [\overline{r}\ \overline{r}''\ \overline{r}''] + [\overline{r}\ \overline{r}'\ \overline{r}''']$

$$= 0 + 0 + [\overline{r}\ \overline{r}'\ \overline{r}''] = [\overline{r}\ \overline{r}'\ \overline{r}''']$$

(b) $\left[\overline{r} \times (\overline{r}' \times \overline{r}'')\right]' = \overline{r}' \times (\overline{r}' \times \overline{r}'') + \overline{r} \times (\overline{r}' \times \overline{r}'')'$

$$= \overline{r}' \times (\overline{r}' \times \overline{r}'') + \overline{r} \times (\overline{r}'' \times \overline{r}'' + \overline{r}' \times r''')$$

$$= \overline{r}' \times (\overline{r}' \times \overline{r}'') + \overline{r} \times (\overline{r}' \times \overline{r}''') \qquad (\because \overline{r}'' \times \overline{r}'' = 0)$$

13.7.4: $\overline{r} = \overline{a}\cos wt + \overline{b}\sin wt$, అయితే ($\overline{a}$, $\overline{b}$ లు స్థిర సదిశలు), $\overline{r} \times \dfrac{d\overline{r}}{dt} = w\overline{a} \times \overline{b}$ మంరియు $\dfrac{d^2\overline{r}}{dt^2} = -w^2\overline{r}$ అని చూపండి.

సాధన: $\dfrac{d\overline{r}}{dt} = -\overline{a}\ w\ \sin wt + \overline{b}w \sin wt$

$$\frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = -\overline{a}w^2 \cos wt - \overline{b}w^2 \sin wt$$

$$= -w^2(\overline{a}\ \cos wt + \overline{b}\sin wt)$$

$$= -w^2\overline{r}$$

$$\overline{r} \times \frac{d\overline{r}}{dt} = (\overline{a}\cos wt + \overline{b}\sin wt) \times (-\overline{a}w \sin wt + \overline{b}w \cos wt)$$

$$= -\overline{a} \times \overline{a}w \cos wt \sin wt + \overline{a} \times \overline{b}w \cos^2 wt - \overline{b} \times \overline{a}w \sin^2 wt + \overline{b} \times \overline{b}w \sin wt \cos wt$$

$$= \overline{0} + \overline{a} \times \overline{b}w \cos^2 wt + \overline{a} \times \overline{b}\ w\ \sin^2 wt + \overline{0}$$

$$= (\overline{a} \times \overline{b})w(\cos^2 wt + \sin^2 wt) = w\overline{a} \times \overline{b}$$ --------- QED

13.7.5 SAQ: $\overline{r} = a\cos t\,\overline{i} + b\sin t\,\overline{j} + b\overline{k}$, అయితే $\left|\dfrac{d\overline{r}}{dt}\right|$ కనుక్కోండి.

(Self Assessment Question - స్వీయ అంచనాత్మక ప్రశ్న)

13.7.6 SAQ: $\overline{r} = \cos nt\,\overline{i} + \sin nt\,\overline{j}$ అయితే ($n \in R$,) $\overline{r} \times \dfrac{d\overline{r}}{dt}$, $\overline{r} \cdot \dfrac{d\overline{r}}{dt}$, $\dfrac{d^2\overline{r}}{dt^2}$ విలువలు కనుక్కోండి.

13.7.7 SAQ : $\overline{r} = x\,\overline{i} + y\,\overline{j} + z\overline{k}$, $x = 2\sin 3t$, $y = 2\cos 3t$, $z = 8t$ అయితే $|\overline{r}'| = 10$, $|r''| = 18$ అని చూపండి.

13.8 b Í¿¢£n e ¿£ q e ΠΠ:

$\phi = \phi(x, y, z)$ అనేది x, y, z అను వాస్తవ చలరాశులలో ప్రమేయాలయితే ఇంటర్మీడియట్‌లో ϕ యొక్క అవకలజాలు (x దృష్ట్యా, y దృష్ట్యా, z దృష్ట్యా) నిర్వచించాము. ఉదాహరణకు $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = \underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} \dfrac{\phi(x+h, y, z) - \phi(x, y, z)}{h}$, (అవధి వ్యవస్థితమైతే) ఇదే విధంగా $\dfrac{\partial \phi}{\partial y}, \dfrac{\partial \phi}{\partial z}$.

13.8.1 నిర్వచనము: $\bar{f} = \bar{f}(x, y, z)$ ఒక సదిశా ప్రమేయము. $\underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} \dfrac{\bar{f}(x+h, y, z) - \bar{f}(x, y, z)}{h}$ వ్యవస్థితమైతే, x దృష్ట్యా $\bar{f}$ అవకలనీయమనీ, ఈ అవధిని x దృష్ట్యా $\bar{f}$ యొక్క పాక్షిక అవకలజమనీ అంటాము. దీన్ని $\dfrac{\partial \bar{f}}{\partial x}$ లేక $\bar{f}_x$ తో సూచిస్తాము.

ఉపపత్తి లేకుండా ఈ క్రింది సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచిద్దాము.

13.8.2 సిద్ధాంతము: $\bar{f}$, $\bar{g}$ లు (x, y, z) లో సదిశా ప్రమేయాలు. ϕ అనేది (x, y, z)లో అదిశా ప్రమేయము అయితే

(a) $\dfrac{\partial}{\partial x}(\bar{f} \pm \bar{g}) = \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial x} \pm \dfrac{\partial \bar{g}}{\partial x}$

(b) $\dfrac{\partial}{\partial x}(\bar{f} \cdot \bar{g}) = \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial x} \cdot \bar{g} + \bar{f} \cdot \dfrac{\partial \bar{g}}{\partial x}$

(c) $\dfrac{\partial}{\partial x}(\bar{f} \times \bar{g}) = \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial x} \times \bar{g} + \bar{f} \times \dfrac{\partial \bar{g}}{\partial x}$

(d) $\dfrac{\partial}{\partial x}(\phi \bar{f}) = \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \bar{f} + \phi \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial x}$

(e) $\dfrac{\partial}{\partial x}(k \bar{f}) = k \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial x}$

(f) $\dfrac{\partial}{\partial x}(\phi \bar{c}) = \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \bar{c}$, ($k \in R$, $\bar{c}$ స్థిర సదిశ)

ఈ ఫలితాలు y దృష్ట్యా z దృష్ట్యా పాక్షిక అవకలజాలకు కూడా నిజము.

13.8.3 నిర్వచనము: (x_1, x_2, x_3)లో $\overline{f}$ సదిశా ప్రమేయము అయితే $i = 1,2,3$కు $\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial x_i}$ అనేది (x_1, x_2, x_3) సదిశా ప్రమేయము అగును. x_j దృష్ట్యా $\overline{f}_{x_i} = \dfrac{\partial \overline{f}}{\partial x_i}$ యొక్క పాక్షిక అవకలజమును $\overline{f}$ యొక్క రెండవ పాక్షిక అవకలజం అంటాము. దీన్ని $\overline{f}_{x_j x_i} = \dfrac{\partial^2 \overline{f}}{\partial x_j \partial x_i}$ తో సూచిస్తాము. $j = i$ అంటటే ప్రతి $i = 1,2,3$కు దీన్ని $\overline{f}_{x_i x_i}$ లేక $\dfrac{\partial^2 \overline{f}}{\partial {x_i}^2}$ తో సూచిస్తాము. (x_1, x_2, x_3)ను (x, y, z)తో వ్రాస్తే రెండవ పాక్షిక అవకలజాలు $\dfrac{\partial^2 \overline{f}}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 \overline{f}}{\partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial^2 \overline{f}}{\partial x \partial z}, \dfrac{\partial^2 \overline{f}}{\partial z \partial x}, \dfrac{\partial^2 \overline{f}}{\partial y \partial z}$ మరియు $\dfrac{\partial^2 \overline{f}}{\partial z \partial y}$ అవుతాయి.

13.8.4 గమనిక:

i) $\overline{f} = f_1 \overline{i} + f_2 \overline{j} + f_3 \overline{k}$, అయితే $\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial x} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_i} \overline{i} + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_i} \overline{j} + \dfrac{\partial f_3}{\partial x_i} \overline{k}$ (f_1, f_2, f_3 లు అదిశా ప్రమేయములు)

($\overline{f}$ అనేది (x_1, x_2, x_3)లో సదిశా ప్రమేయము).

ii) సాధారణంగా $\overline{f}_{x_i x_j} \neq \overline{f}_{x_j x_i}$. కాని కొన్ని సందర్భాలలో మాత్రమే ఈ రెండు అవకలజాలు సమానమవుతాయి.

ఈ క్రింది ఉదాహరణ ద్వారా $\dfrac{\partial^2 \overline{f}}{\partial x \partial y} \neq \dfrac{\partial^2 \overline{f}}{\partial y \partial x}$ అని స్పష్టము.

13.8.5 ఉదాహరణ: $\overline{f}(x, y) = \begin{cases} xy \dfrac{(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \overline{i}, & \text{if } (x, y) \neq (0,0) \\ \overline{0} & \text{if } (x, y) = (0,0) \end{cases}$

అని నిర్వచిద్దాము.

$$\overline{f}_x(0, y) = \left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial x} \right)_{(0,y)} = \underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\overline{f}(x, y) - \overline{f}(0, y)}{x} = \underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \overline{i} - 0\, \overline{i}}{x} = \underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{y(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \overline{i}$$

$$= -y\, \overline{i}$$

$$\bar{f}_{yx}(0,0)=\left(\frac{\partial^2\bar{f}}{\partial y\,\partial x}\right)_{(0,0)}=\left[\frac{\partial}{\partial y}f_x(0,y)\right]_{(0,0)}=\underset{y\to 0}{\text{Lt}}\frac{\bar{f}_x(0,y)-\bar{f}_x(0,0)}{y}$$

$$=\underset{y\to 0}{\text{Lt}}\frac{-y\bar{i}-0\bar{i}}{y}=-\bar{i}$$

$$\bar{f}_y(x,0)=\left(\frac{\partial\bar{f}}{\partial y}\right)_{(x,0)}=\underset{y\to 0}{\text{Lt}}\frac{\bar{f}(x,y)-\bar{f}(x,0)}{y}=\underset{y\to 0}{\text{Lt}}\frac{x_y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\bar{i}-\bar{0}}{y}=x\bar{i}$$

$$\bar{f}_{xy}(0,0)=\left(\frac{\partial^2\bar{f}}{\partial x\partial y}\right)_{(0,0)}=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\bar{f}}{\partial y}\right)\right]_{(0,0)}=\left[\frac{\partial}{\partial x}\,\bar{f}_y(x,0)\right]_{(0.0)}$$

$$=\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{\bar{f}_y(x,0)-\bar{f}_y(0,0)}{x}=\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{x\bar{i}-\bar{0}}{x}=\bar{i}$$

కాబట్టి $\bar{f}_{yx}(0,0)\neq\bar{f}_{xy}(0,0)$ అ.వ. $\frac{\partial^2\bar{f}}{\partial y\partial x}\neq\frac{\partial^2\bar{f}}{\partial x\,\partial y}$

సాధించిన సమస్యలు:

13.8.6: $\bar{f}=\left(2x^2y-x^4\right)\bar{i}+\left(e^{xy}-y\sin x\right)\bar{j}+x^2\cos y\,\bar{k}$ అయితే $\frac{\partial^2\bar{f}}{\partial x^2},\frac{\partial^2\bar{f}}{\partial x\,\partial y},\frac{\partial^2\bar{f}}{\partial y\,\partial x},\frac{\partial^2\bar{f}}{\partial y^2}$ కనుక్కోండి.

సాధన:

$$\frac{\partial\bar{f}}{\partial x}=\left(4xy-4x^3\right)\bar{i}+\left(ye^{xy}-y\cos x\right)\bar{j}+2x\cos y\,\bar{k}$$

$$\frac{\partial^2\bar{f}}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\bar{f}}{\partial x}\right)=\left(4y-12x^2\right)\bar{i}+\left(y^2e^{xy}+y\sin x\right)\bar{j}+2\cos y\,\bar{k}$$

$$\frac{\partial^2\bar{f}}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\bar{f}}{\partial x}\right)=4x\bar{i}+\left(e^{xy}+xye^{xy}-\cos x\right)\bar{j}-2x\sin y\,\bar{k}$$

$$\frac{\partial\bar{f}}{\partial y}=2x^2\bar{i}+\left(xe^{xy}-\sin x\right)\bar{j}-x^2\sin y\bar{k}$$

$$\frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}\right) = 4x\overline{i} + \left(e^{xy} + xye^{xy} - \cos x\right)\overline{j} - 2x\sin y\,\overline{k}$$

$$\frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}\right) = 0\overline{i} + x^2e^{xy}\overline{j} - x^2\cos y\,\overline{k}$$

$$= x^2e^{xy}\overline{j} - x^2\cos y\overline{k}$$

ఈ సమస్యలో $\frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial y \partial x}$ అని గమనిద్దాము.

13.8.7: $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$, $\overline{a}$ స్థిర సదిశ అయితే

$$\frac{\partial}{\partial x}(\overline{a}\cdot\overline{r})\,\overline{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{a}\cdot\overline{r})\,\overline{j} + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{a}\cdot\overline{r})\,\overline{k} = \overline{a}$$ అని చూపండి.

సాధన: $\overline{a} = a_1\overline{i} + a_2\overline{j} + a_3\overline{k}$ అనుకోండి. $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ (దత్తాంశం ప్రకారం)

$$\therefore \overline{a}\cdot\overline{r} = a_1x + a_2y + a_3z$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\overline{a}\cdot\overline{r}) = a_1,\ \frac{\partial}{\partial y}(\overline{a}\cdot\overline{r}) = a_2,\ \frac{\partial}{\partial x}(\overline{a}\cdot\overline{r}) = a_3$$

L.H.S. = $a_1\overline{i} + a_2\overline{j} + a_3\overline{k} = \overline{a}$ = R.H.S.

13.8.8: $\phi = 2xz^4 - x^2y$, అయితే $(2,-2,-1)$ వద్ద $\left|\overline{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \overline{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \overline{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|$ విలువ కనుక్కోండి.

సాధన: $\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2z^4 - 2xy,\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = -x^2,\ \frac{\partial\phi}{\partial z} = 8xz^3$

$$\therefore \overline{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \overline{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \overline{k}\frac{\partial\phi}{\partial z} = \left(2z^4 - 2xy\right)\overline{i} - x^2\overline{j} + 8xz^3\overline{k}$$

$$\text{At } (2,-2,-1),\ \overline{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \overline{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \overline{k}\frac{\partial\phi}{\partial z} = 10\overline{i} - 4\overline{j} - 16\overline{k}$$

$$\text{At } (2,-2,-1), \left|\bar{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\bar{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\bar{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right| = \sqrt{100+16+256} = \sqrt{372} = 2\sqrt{93}$$

13.8.9 SAQ: $\bar{f} = yz\bar{i} + zx\bar{j} + xy\bar{k}$, అయితే $i\times\frac{\partial\bar{f}}{\partial x}+\bar{j}\times\frac{\partial\bar{f}}{\partial y}+\bar{k}\times\frac{\partial\bar{f}}{\partial z} = \bar{0}$ అని చూపండి.

13.8.10 SAQ: $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, $\bar{a}$ స్థిర సదిశ అయితే

(a) $\frac{\partial}{\partial x}(\bar{a}\times\bar{r})\cdot\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{a}\times\bar{r})\cdot\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{a}\times\bar{r})\cdot\bar{k} = 0$

(b) $\frac{\partial}{\partial x}(\bar{a}\times\bar{r})\times\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{a}\times\bar{r})\times\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{a}\times\bar{r})\times\bar{k} = -2\bar{a}$ అని చూపండి.

13.9 SAQలకు సమాధానములు:

13.7.5 SAQ:

$$\sqrt{a^2+b^2} \quad \left(\because \frac{d\bar{r}}{dt} = -a\sin t\,\bar{i} + a\cos t\,\bar{j} + b\bar{k} \Rightarrow \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2+b^2}\right)$$

13.7.6 SAQ: $\frac{d\bar{r}}{dt} = -n\sin nt\,\bar{i} + n\cos nt\,\bar{j}$

$$\therefore \bar{r}\times\frac{d\bar{r}}{dt} = (\cos nt\ \bar{i} + \sin nt\ \bar{j})\times(-n\sin nt\ \bar{i} + n\cos nt\ \bar{j})$$

$$= n\bar{k}$$

$$\bar{r}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt} = 0,\ \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -n^2\bar{r}$$

13.7.7 SAQ: $\bar{r}' = 6\cos 3t\,\bar{i} - 6\sin 3t\ \bar{j} + 8\bar{k}$

$$|\bar{r}'| = \sqrt{36\cos^2 3t + 36\sin^2 3t + 64} = 10$$

$$\bar{r}'' = -18\sin 3t\,\bar{i} - 18\cos 3t\,\bar{j}$$

$$|\bar{r}''| = \sqrt{324(\sin^2 3t + \cos^2 3t)} = 18$$

13.8.9 SAQ: $\dfrac{\partial \bar{f}}{\partial x} = z\bar{j} + y\bar{k}$

$$\bar{i} \times \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = z\bar{k} - y\bar{j}$$

$$\bar{j} \times \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} = x\bar{i} - z\bar{x}, \ \bar{x} \times \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = y\bar{j} - x\bar{i}$$

అనగా LHS $= \bar{0}$

13.8.10 SAQ: (a) LHS = $\sum(\bar{a} \times \bar{i}) \cdot \bar{i} = 0$

(b) LHS $= \sum(\bar{a} \times \bar{i}) \times \bar{i} = \sum(\bar{a} \cdot \bar{i})\bar{i} - (\bar{i} \cdot \bar{i})\bar{a}$

$$= \bar{a} - 3\bar{a} = -2\bar{a}$$

13.10 k Ís +Xø TT:

ఈ పాఠములో సదిశా ప్రమేయములు, అదిశా ప్రమేయములు, సదిశా బిందు ప్రమేయములు, అదిశా బిందు ప్రమేయములు, వాటి అవధులు, అవిచ్ఛిన్నత, అవకలనీయత, అధిక క్రమము గల అవకలజాలు చర్చించాము. బహు వాస్తవ చలరాశులలో గల అదిశా, సదిశా బిందు ప్రమేయాల పాక్షిక అవకలజాల గురించి, కొన్ని సమస్యలను చర్చించాము.

13.11 సాంకేతిక పదాలు:

సదిశా ప్రమేయములు, అదిశా ప్రమేయములు, సదిశా బిందు ప్రమేయము, అదిశా బిందు ప్రమేయము, అవకలజాలు, పాక్షిక అవకలజాలు.

13.12 అభ్యాసము:

13.12.1: $\bar{r} = \sin t\,\bar{i} + \cos t\,\bar{j} + t\bar{k}$, అయితే $\dfrac{d\bar{r}}{dt}, \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}, \left|\dfrac{d\bar{r}}{dt}\right|, \left|\dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right|$ విలువలు కనుక్కోండి.

13.12.2: $\bar{r} = a\cos t\,\bar{i} + a\sin t\,\bar{j} + at\tan\theta\bar{k}$, అయితే

$\left|\dfrac{d\bar{r}}{dt} \times \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right|$ మరియు $\left[\dfrac{d\bar{r}}{dt}\ \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}\ \dfrac{d^3\bar{r}}{dt^3}\right]$ విలువలు కనుక్కోండి.

13.12.3: $\bar{a} = 3t^2\bar{i} - (t+4)\bar{j} + (t^2 - 2t)\bar{k}$

$\bar{b} = \sin t\,\bar{i} + 3e^{-t}\bar{j} - 3\cos t\,\bar{k}$, అయితే $t = 0$ వద్ద $\frac{d^2}{dt^2}(\bar{a}\times\bar{b})$ విలువ కనుక్కోండి.

13.12.4 : $(\bar{A}\times\bar{B}' - \bar{A}'\times\bar{B}')' = \bar{A}\times\bar{B}'' - \bar{A}''\times\bar{B}$ అని చూపండి. ($\bar{A}$, $\bar{B}$లు tలో అవకలనీయ ప్రమేయములు మరియు $\bar{A}' = \frac{d\bar{A}}{dt}, \bar{B}' = \frac{d\bar{B}}{dt}$)

13.12.5: $\frac{d\bar{a}}{dt} = \bar{b}\times\bar{a}, \frac{d\bar{c}}{dt} = \bar{b}\times\bar{c}$, అయితే $\frac{d}{dt}(\bar{a}\times\bar{c}) = \bar{b}\times(\bar{a}\times\bar{c})$ అని చూపండి.

13.12.6: $\bar{A} = 5t^2\bar{i} + t\bar{j} - t^3\bar{k}$ మరియు $\bar{B} = \sin t\;\bar{i} - \cos t\;\bar{j}$ అయితే $\frac{d}{dt}(\bar{A}\cdot\bar{B})$, $\frac{d}{dt}(\bar{A}\times\bar{B})$ కనుక్కోండి.

13.12.7: $\bar{f} = x^2yz\bar{i} - 2xz^3\;j + xz^2\bar{k}$, $\bar{g} = 2z\bar{i} + y\bar{j} - x^2\bar{k}$ అయితే $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\bar{f}\times\bar{g})$, $(1,0,-2)$ వద్ద కనుక్కోండి.

13.12.8: $\bar{f} = 2x^2\bar{i} - 3yz\bar{j} - xz^2\bar{k}$, $\phi = 2z - x^3y$, అయితే

$\frac{\partial\bar{f}}{\partial x}\cdot\left(\bar{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = 14$ అని చూపండి.

13.12.9: $\bar{f} = xz\,\bar{i} - xy\bar{j} + yz^2\bar{k}$, $\phi = xy^2z$ అయితే

$\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial z}(\phi\bar{f})$ ని $(2,-2,-1)$ వద్ద కనుక్కోండి.

13.13 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు:

13.13.1: $\bar{r} = \cos nt\bar{i} + \sin nt\bar{j}$, n స్థిరరాశి, అయితే $\bar{r}\times\frac{d\bar{r}}{dt}, \bar{r}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt}, \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ కనుక్కోండి.

13.13.2: $\bar{r} = \bar{a}\cos wt + \bar{b}\sin wt$. $\bar{a}, \bar{b}$ లు స్థిర సదిశలు అయితే $\bar{r}\times\frac{d\bar{r}}{dt} = w\bar{a}\times\bar{b}$, $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} + w^2\bar{r} = \bar{0}$ అని చూపండి.

13.13.3: $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$, $\overline{a}$ స్థిర సదిశ అయితే

$$\frac{\partial}{\partial x}(\overline{a}\cdot\overline{r})\overline{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{a}\cdot\overline{r})\overline{j} + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{a}\cdot\overline{r})\overline{k} = \overline{a}$$

13.14 అభ్యాసమునకు సమాధానములు:

13.12.1: $\cos t\,\overline{i} - \sin t\,\overline{j} + \overline{k};\ -\sin t\,\overline{i} - \cos t\,\overline{j};\ \sqrt{2};\ 1$

13.12.2: $a^2 \sec\theta;\ a^3 \mathrm{Tan}\theta$

13.12.3: $-30\overline{i} + 14\overline{j} + 20\overline{k}$

13.12.6: $5t^2 \cos t + 11t \sin t - \cos t$

$$\left(t^3 \sin t - 3t^2 \cos t\right)\overline{i} - \left(t^3 \cos t + 3t^2 \sin t\right)\overline{j} + \left(5t^2 \sin t - 11t \cos t - \sin t\right)\overline{k}$$

13.12.7: $-4\overline{i} - 8\overline{j}$

13.12.9: $-6\overline{i} + 16\overline{j}$

13.15 సంప్రదించవలసిన పుస్తకములు:

1. Murray R. Spiegel, Vector Analysis, Schaum Publishing Company, New York
2. N. Saran and S.N. Nigam, Introduction to Vector Analysis, Pothishala pvt. Ltd. Allahabad
3. Shanti Narayan, A Text book of Vector Calculus - S.Chand & Co., New Delhi
4. Advanced Engineering Mathematics by Erwin Kreyszig, Published by John Wiley&Sons Inc.

పాఠ్యభాగ రచయిత

శ్రీ ఆకెళ్ళ సత్యనారాయణ మూర్తి

అవకలన పరికర్తలు

14.1 పాఠ్యభాగ లక్ష్యము:

ఈ పాఠ్యభాగములో అదిశా బిందు ప్రమేయమునకు ఉత్పలం, అదిశా బిందు ప్రమేయమునకు ఒక బిందువు P వద్ద P గుండా పోవు ఒక సదిశ పై దైశిక వ్యుత్పన్నము, సదిశా బిందు ప్రమేయమునకు అపసరణము, అలకల గురించి, వాటి పై కొన్ని ఫలితాలను, సమస్యలను చర్చిస్తాము.

14.2 పాఠ్యభాగ నిర్మాణము:

ఈ పాఠ్యభాగములో ఈ క్రింది భాగములుంటాయి.

14.3 ఉపోద్ఘాతము:

ఈ పాఠ్యభాగములో ఉత్పలం, అపసరణము, అలకల పై ఫలితాలు, సమస్యలు చర్చిస్తాము.

14.4 ఒక వక్రము యొక్క సదిశా సమీకరణము, స్పర్శరేఖ, అభిలంబ రేఖ:

14.4.1 నిర్వచనము: $D(\subseteq R)$ పై నిర్వచించబడిన సదిశా ప్రమేయము $\bar{r} = \bar{f}(t)$ అనుకొందాము. ప్రతి $t \in D$ కు,

$\bar{r} = \bar{f}(t)$ అనేది మూల బిందువు O తొలి బిందువుగా గల) P అనే బిందువు స్థాన సదిశ $\overline{OP}$ ను సూచిస్తుంది. Dలో t మారుతుంటే P అనే బిందువు అంతరాళంలో ఒక వక్రము C పై చలించును. కనుక $\bar{r} = \bar{f}(t)$ ను C యొక్క సదిశా సమీకరణము అని అంటాము.

14.4.2 నిర్వచనము: $\bar{r} = \bar{f}(t)$ ను C అను వక్రమును సూచిస్తుంది అనుకొందాము. C పై P ఒక బిందువు. Q అనేది C పై $Q \neq P$ అగునట్లు ఒక బిందువు అయితే $\overleftrightarrow{PQ}$ ను సికెంట్ అంటాము. C పై Q అను బిందువు P ను సమీపిస్తే $\overleftrightarrow{PQ}$ యొక్క అవధిని C కు P వద్ద స్పర్శరేఖ అంటాము. (Tanjent Line) అంటాము.

14.4.3 నిర్వచనము: స్పర్శరేఖ ఆధారముగా గల సదిశను స్పర్శ సదిశ (Tangent Ve:tor) అంటాము.

14.4.4 సిద్ధాంతము: $\bar{r} = \bar{f}(t)$ అనేది C అను వక్రాన్ని సూచించు అవకలనీయ సదిశా ప్రమేయము. C పై P ఒక బిందువు. $\overline{OP} = \bar{r} = \bar{f}(t)$ అయితే $\frac{d\bar{r}}{dt}$ అనేది C పై P వద్ద స్పర్శ సదిశ అవుతుంది.

ఉపపత్తి: C పై P ఒక బిందువు. P యొక్క స్థాన సదిశ $\bar{r}$ అనుకొందాము. ($\overline{OP} = \bar{r}$) C పై $Q \neq P$

$\overline{OQ} = \bar{r} + \delta\bar{r} = \bar{f}(t + \delta t)$ అగునట్లు ఒక బిందువనుకొందాము.

$$\therefore \overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{OP} = \delta\bar{r}$$

$$\therefore \delta\bar{r} = \bar{r}(t + \delta t) - \bar{r}(t)$$

$$\frac{\delta\bar{r}}{\delta t} = \frac{\bar{r}(t + \delta t) - \bar{r}(t)}{\delta t}$$

Q, P ను సమీపిస్తుంటే $\delta t \to 0$ $\therefore \overleftrightarrow{PQ}$ అనే సదిశ P వద్ద స్పర్శరేఖ అవుతుంది.

$$\therefore \frac{d\bar{r}}{dt} = \underset{\delta t \to 0}{Lt} \frac{\delta\bar{r}}{\delta t} = \underset{\delta t \to 0}{Lt} \frac{\bar{r}(t + \delta t) - \bar{r}(t)}{\delta t}$$

$\therefore \frac{d\bar{r}}{dt}$ అనేది వక్రము C పై P వద్ద స్పర్శరేఖకు సమాంతరంగా ఉండు సదిశ.

i.e. $\frac{d\bar{r}}{dt}$ అనేది వక్రము C పై P వద్ద స్పర్శ సదిశ.

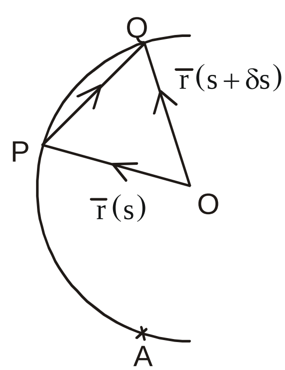
14.4.5 నిర్వచనము: $\bar{r} = \bar{f}(t)$ అనేది అవకలనీయమగు సదిశా ప్రమేయము. ఇది C అను వక్రమును సూచిస్తుంది అనుకొందాము. $\overline{OP} = \bar{r} = \bar{f}(t)$ అగునట్లు C పై P ఒక బిందువు అనుకుంటే $\frac{d\bar{r}}{dt}$ అనేది C పై P వద్ద స్పర్శ సదిశ అవుతుంది.

$\dfrac{\frac{d\overline{r}}{dt}}{\left|\frac{d\overline{r}}{dt}\right|}$ అనేది P వద్ద C కు యూనిట్ స్పర్శ సదిశ అవుతుంది. ($\left|\frac{d\overline{r}}{dt}\right|$ అనేది $\frac{d\overline{r}}{dt}$ యొక్క పొడవు)

14.4.6 సంకేతము: అంతరాళంలో C ఒక వక్రము. C పై A ఒక స్థిర బిందువు. A నుంచి C పై ఉన్న బిందువు P అనేది AP అను ఛాప దూరము (ar: length) S తో ఏకైకముగా నిర్ణయించబడుతుంది. $(\text{Arc } AP = s)$ కాబట్టి $\overline{OP} = \overline{r}(s)$ అని వ్రాయవచ్చు. $\overline{AB}$ ఏదైనా సదిశ అయితే $\overline{AB} = AB \cdot \overline{AB}$ దిశలో యూనిట్ సదిశ, $|\overline{AB}| = AB$.

14.4.7 సిద్ధాంతము: $\overline{r} = \overline{r}(s)$ అను వక్రము పై P వద్ద యూనిట్ స్పర్శరేఖ $\overline{T} = \frac{d\overline{r}}{ds}$ అగును.

ఉపపత్తి: ఒక వక్రమనుకొందాము. C పై A స్థిర బిందువు A నుంచి C పై బిందువుల ఛాప దూరము కొలవబడుతుంది. arc $AP = s$ అనుకొందాము. $\overline{OP} = \overline{r}(s)$ అనుకొందాము. C పై Q అను బిందువు $\overline{OQ} = \overline{r}(s+\delta s)$ అగునట్లు తీసుకొందాము.



$$\therefore \overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{OP} = \overline{r}(s+\delta s) - \overline{r}(s)$$

$$\frac{\overline{PQ}}{\delta s} = \frac{\overline{r}(s+\delta s) - \overline{r}(s)}{\delta s}$$

$Q \to P$ అయితే $\overline{PQ}$ అనే సదిశ C పై P వద్ద స్పర్శ సదిశ అవుతుంది. C పై P వద్ద యూనిట్ స్పర్శ సదిశను $\overline{T}$ అనుకొందాము.

$$\therefore \underset{\delta s \to 0}{\text{Lt}} \frac{\overline{r}(s+\delta s) - \overline{r}(s)}{\delta s} = \underset{Q \to P}{\text{Lt}} \frac{\overline{PQ}}{\delta s} = \underset{\delta s \to 0}{\text{Lt}} \frac{\overline{T}(PQ)}{\delta s}$$

$$\therefore \frac{d\bar{r}}{ds} = \underset{Q\to P}{Lt}\, \bar{T} \cdot \underset{Q\to P}{Lt} \frac{PQ}{\delta s} = \bar{T} \cdot 1 \qquad \left(\because \underset{Q\to P}{Lt} \frac{\overline{PQ}}{\delta s} = \underset{Q\to P}{Lt} \frac{\text{chord } PQ}{\text{arc } PQ} = 1 \right)$$

వక్రానికి P వద్ద యూనిట్ స్పర్శ సదిశ $\bar{T} = \dfrac{d\bar{r}}{ds}$.

14.4.8 నిర్వచనము: $\bar{T}$ కు లంబంగా ఉండు యూనిట్ సదిశను వక్రానికి P వద్ద ప్రధాన యూనిట్ అభిలంబ సదిశ అంటాము. దీన్ని $\bar{N}$ తో సూచిస్తాము.

14.4.9 సిద్ధాంతము: $\bar{N} = \dfrac{d^2\bar{r}}{ds^2} \div \left|\dfrac{d^2\bar{r}}{ds^2}\right|$

ఉపపత్తి: $\bar{T}\cdot\bar{T} = 1 \Rightarrow \dfrac{d\bar{r}}{ds}\cdot\dfrac{d\bar{r}}{ds} = 1$ అని మనకు తెలుసు $\Rightarrow \dfrac{d\bar{r}}{ds}\cdot\dfrac{d\bar{r}}{ds} = 1$

s దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$2\frac{d\bar{r}}{ds}\cdot\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = 0 \Rightarrow \frac{d\bar{r}}{ds}\cdot\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = 0 \Rightarrow \bar{T}\cdot\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = 0$$

$\therefore$ $\bar{T}$ కు $\dfrac{d^2\bar{r}}{ds^2}$ లంబంగా ఉంటుంది.

$\therefore$ $\dfrac{d^2\bar{r}}{ds^2}$ P వద్ద వక్రానికి లంబంగా ఉంటుంది.

$\therefore$ యూనిట్ అభిలంబ సదిశ $\bar{N} = \dfrac{d^2\bar{r}}{ds^2} \div \left|\dfrac{d^2\bar{r}}{ds^2}\right|$.

14.4.10 సంకేతము: $\phi \neq D \subseteq \mathsf{R}$, V అనేది త్రి పరిమాణ సదిశల సమితి. $\phi : D \to \mathsf{R}$ అను ప్రమేయమును D లో అదిశా ప్రమేయమనీ, $\bar{f} : D \to V$ ను D లో సదిశా ప్రమేయమనీ మనకు తెలుసు. ఇంకా $\phi \neq D \subseteq \mathsf{R}^3$ అయితే $\phi : D \to \mathsf{R}$ ను D లో అదిశా బిందు ప్రమేయమనీ $\bar{f} : D \to V$ ను సదిశా బిందు ప్రమేయమనీ మనకు తెలుసు.

$P = (x, y, z) \in D \subseteq \mathsf{R}^3$ అయితే $\phi(P)$ను $\phi(x, y, z)$ అనీ $\bar{f}(P)$ ను $\bar{f}(x, y, z)$ అని వ్రాస్తాము. $\bar{r}$ అనేది P యొక్క స్థాన సదిశ (0 మూల బిందువు) అంటే $\phi(P)$, $\bar{f}(P)$లను $\phi(\bar{r})$ అనీ $\bar{f}(\bar{r})$ అని కూడా వ్రాస్తాము.

14.5 అదిశ బిందు ప్రమేయమునకు ఉత్పలం (Gradient):

14.5.1 నిర్వచనము (అదిశా బిందు ప్రమేయమునకు ఉత్పలం): ϕ అను అదిశా ప్రమేయమునకు $\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}$ అను పాక్షిక అవకలజాలు ఉన్నవనుకొందాము. ϕ యొక్క ఉత్పలం (gradient) ను

$\text{grad}\,\phi = \bar{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}$ అని నిర్వచిస్తాము.

14.5.2 సంకేతము: ∇ అను పరికర్త (డెల్ లేక నాబ్లా అని చదువుతాము) $\bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}$ ను సూచిస్తుంది.

grad ϕ ను : $\text{grad}\,\phi = \nabla\phi = \bar{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial\phi}{\partial z} + \bar{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}$ అని గాని, $\sum \bar{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}$ అని గాని వ్రాస్తాము.

14.5.3 సిద్ధాంతము: f , g లు అదిశా ప్రమేయములయితే

(i) $\text{grad}(f \pm g) = \text{grad}\,f \pm \text{grad}\,g$

(ii) $\text{grad}(fg) = (\text{grad}\,f)g + f(\text{grad}\,g)$

ఉపపత్తి: (i) $\text{grad}(f \pm g) = \Sigma\bar{i}\frac{\partial}{\partial x}(f \pm g)$

$$= \Sigma\bar{i}\left(\frac{\partial f}{\partial x} \pm \frac{\partial g}{\partial x}\right)$$

$$= \Sigma\bar{i}\left(\frac{\partial f}{\partial x} \pm \frac{\partial g}{\partial x}\right)$$

$$= \Sigma\bar{i}\frac{\partial f}{\partial x} \pm \Sigma\bar{i}\frac{\partial g}{\partial x}$$

$$= \text{grad}\,f \pm \text{grad}\,g$$

(ii) $\text{grad}(fg) = \sum\bar{i}\frac{\partial}{\partial x}(fg) = \Sigma\bar{i}\left(\frac{\partial f}{\partial x}g + f\frac{\partial g}{\partial x}\right)$

$$= \left(\sum\bar{i}\frac{\partial f}{\partial x}\right)g + f\sum\bar{i}\frac{\partial g}{\partial x}$$

$$= (\text{grad}\,f)g + f(\text{grad}\,g)$$

14.5.4 సిద్ధాంతము: f అను అదిశా బిందు ప్రమేయము స్థిరమగుటకు ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమము $\nabla f = \overline{0}$.

ఉపపత్తి : (i) f స్థిరమనుకొందాము.

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

$$\therefore \nabla f = \overline{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \overline{j}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \overline{k}\frac{\partial f}{\partial z} = \overline{i}\,0 + \overline{j}\,0 + \overline{k}0 = \overline{0}$$

(ii) $\nabla f = \overline{0}$ అనుకొందాము. $\Rightarrow \overline{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \overline{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \overline{k}\frac{\partial f}{\partial z} = \overline{j} = \overline{i}\,0 + \overline{j}0 + \overline{k}0$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} \Rightarrow$ x, y, z లలో f స్వతంత్రముగా ఉండును.

$\Rightarrow f$ స్థిరము.

14.5.5 సిద్ధాంతము: ϕ అదిశా బిందు ప్రమేయము $c \in \mathsf{R}$, అయితే $\text{grad}(c\phi) = c\ \text{grad}\,\phi$.

ఉపపత్తి: $\text{grad}(c\phi) = \sum \overline{i}\frac{\partial}{\partial x}(c\phi) = \sum \overline{i}c\frac{\partial \phi}{\partial x} = c\sum \overline{i}\frac{\partial \phi}{\partial x} = c\ \text{grad}\,\phi$

సాధించిన సమస్యలు:

14.5.6: $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$, $r = |\overline{r}|$ అయితే $\nabla r = \frac{\overline{r}}{r}$, అని చూపండి.

సాధన: $r = |\overline{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow 2r\frac{dr}{dx} = 2x \Rightarrow \frac{dr}{dx} = \frac{x}{r}$

ఇదే విధముగా $\frac{dr}{dy} = \frac{y}{r}, \frac{dr}{dz} = \frac{z}{r}$

$$\nabla r = \sum \overline{i}\frac{dr}{dx} = \sum \overline{i}\frac{x}{r} = \overline{i}\left(\frac{x}{r}\right) + \overline{j}\left(\frac{y}{r}\right) + \overline{k}\left(\frac{z}{r}\right) = \frac{x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}}{r} = \frac{\overline{r}}{r}$$

14.5.7: $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$, $r = |\overline{r}|$ అయితే $\nabla r^m = mr^{m-2}\overline{r}$, అని చూపండి.

సాధన: $\nabla r^m = \sum \overline{i}\frac{\partial}{\partial x}(r^m) = \sum \overline{i}mr^{m-1}\frac{\partial r}{\partial x} = \sum \overline{i}\,m\,r^{m-1}\frac{x}{r}$

$$= \sum \overline{i}\,m\,r^{m-2}x = m\,r^{m-2}\sum x\overline{i} = mr^{m-2}\overline{r}$$

14.5.8: 14.5.7లో $m=1$, అంటే $\nabla r = r^{-1}\bar{r} = \frac{\bar{r}}{r}$, $m=2$, అంటే $\nabla r^2 = 2\bar{r}$ అవుతుంది.

14.5.9: $\phi = x^3 - y^3 + x^2 z$ అయితే $(1,1,-2)$ వద్ద $\nabla\phi$ విలువ కనుక్కోండి.

సాధన: $\frac{\partial\phi}{\partial x} = 3x^2 + 2xz, \frac{\partial\phi}{\partial y} = -3y^2, \frac{\partial\phi}{\partial z} = x^2$

$$\therefore \text{grad } \phi = \sum \bar{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} = \left(3x^2 + 2xz\right)\bar{i} - 3y^2\bar{j} + x^2\bar{k}$$

At $(1,1,-2)$, $\text{grad}\phi = -\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$.

14.6 స్థాయి ఉపరితలము:

14.6.1 నిర్వచనము (స్థాయి ఉపరితలము): $S \subseteq R^3$ అను క్షేత్రము పై ϕ ఒక అదిశా ప్రమేయము, $c \in R$ అనుకొందాము. $\phi(P) = c$ అగునట్లు ఉండు బిందువుల సమితిని స్థాయి ఉపరితలమంటాము. $P = (x,y,z)$ అయితే ఈ స్థాయి ఉపరితలమును $\phi(x,y,z) = c$ అని కూడా వ్రాస్తాము. $P(P_0) = C$ అగునట్లు Sలో P_0 ఉంటే P_0 గుండా పోవు స్థాయి తలము $= \{Q \in S / \phi(Q) = \phi(P_0)\}$.

14.6.2 గమనిక: ϕ యొక్క స్థాయి ఉపరితలము పై P, Q లు బిందువులయితే $\phi(P) = \phi(Q)$ అవుతుంది.

14.6.3 నిర్వచనము: అంతరాళములో P ఒక బిందువు. $\delta > 0$ అనుకొందాము. $PQ < \delta$ అగునట్లు ఉండు Q అను బిందువుల సమితిని P యొక్క δ - సామీప్యము అనీ, దీని నుంచి Pను తొలగిస్తే వచ్చు సమితిని P యొక్క విసర్జిత δ - సామీప్యమనీ అంటాము.

14.6.4 నిర్వచనము: P ఒక బిందువు. $\ell \in R$ అనుకొందాము. P యొక్క విసర్జిత సామీప్యములో ϕ అదిశల ప్రమేయము అనుకొందాము. ప్రతి $\in > 0$కు $\exists \delta > 0 \ni 0 < QP < \delta \Rightarrow |\phi(Q) - \ell| < \in$ అయితే P వద్ద ϕ యొక్క అవధి ℓ అంటాం. దీన్ని $\underset{Q\to P}{\text{Lt}} \phi(Q) = \ell$ అని వ్రాస్తాము.

14.6.5 నిర్వచనము: P ఒక బిందువు. $\bar{\ell} \in V$ అనుకొందాము. P యొక్క విసర్జిత సామీప్యములో $\bar{f}$ ఒక సదిశా ప్రమేయము అనుకొనుము. ప్రతి $\in > 0$కు, $\exists \delta > 0 \ni 0 < QP < \delta \Rightarrow |\bar{f}(Q) - \bar{\ell}| < \in$ అయితే P వద్ద $\bar{f}$ యొక్క అవధి $\bar{\ell}$ అంటాము. దీన్ని $\underset{Q\to P}{\text{Lt}} \bar{f}(Q) = \bar{\ell}$ అని వ్రాస్తాము.

14.6.6 నిర్వచనము: P ఒక బిందువు ϕ అనేది P యొక్క సామీప్యములో నిర్వచించబడిన ప్రమేయము అనుకొనుము. $\underset{Q\to P}{\text{Lt}} \phi(Q) = \phi(P)$ అంటే P వద్ద ϕ అవిచ్ఛిన్నమంటాము.

14.7 దైశిక వ్యుత్పన్నము (Dire:tional Derivative):

14.7.1 నిర్వచనము (దైశిక వ్యుత్పన్నము): P యొక్క ఒక సామీప్యము Dలో నిర్వచించబడిన అదిశా ప్రమేయము ϕ అనుకొందాము. P గుండా పోవు ఒక రేఖ పై $\bar{e}$ ఒక యూనిట్ సదిశ అనుకొందాము $Q \in L \cap D, Q \neq P$

$\underset{Q\to P}{Lt} \dfrac{\phi(Q)-\phi(P)}{QP}$ అను అవధి వ్యవస్థితమైతే, ఈ అవధిని P వద్ద $\bar{e}$ దిశలో ϕ యొక్క దైశిక వ్యుత్పన్నం అని అంటాము.

$s = PQ$ అయితే దీన్ని $\dfrac{\partial\phi}{\partial e}$ లేక $\dfrac{\partial\phi}{\partial s}$ అని వ్రాస్తాము.

14.7.2 గమనిక: $\bar{e} = \bar{i}$, ($\overline{OX}$ దిశలో యూనిట్ సదిశ) అయితే $\dfrac{\partial\phi}{\partial\bar{e}} = \dfrac{\partial\phi}{\partial\bar{i}} = \dfrac{\partial\phi}{\partial x}$

$\bar{e} = \bar{j}$ ($\overline{OY}$ దిశలో యూనిట్ సదిశ) అయితే $\dfrac{\partial\phi}{\partial\bar{e}} = \dfrac{\partial\phi}{\partial\bar{j}} = \dfrac{\partial\phi}{\partial y}$

$\bar{e} = \bar{k}$, ($\overline{OZ}$ దిశలో యూనిట్ సదిశ) అయితే $\dfrac{\partial\phi}{\partial\bar{e}} = \dfrac{\partial\phi}{\partial\bar{k}} = \dfrac{\partial\phi}{\partial z}$

14.7.3 గమనిక: 14.7.1 నిర్వచనములో ϕకు బదులు $\bar{f}$ అను సదిశా ప్రమేయము వ్రాయవచ్చు.

14.7.4 గమనిక: $\bar{f} = f_1\bar{i} + f_2\bar{j} + f_3\bar{k}$ (f_1, f_2, f_3 లకు $\bar{e}$, దిశలో P వద్ద దైశిక వ్యుత్పన్నములుంటాయి) అయితే $\dfrac{\partial\bar{f}}{\partial s} = \dfrac{\partial f_1}{\partial s}\bar{i} + \dfrac{\partial f_2}{\partial s}\bar{j} + \dfrac{\partial f_3}{\partial s}\bar{k}$.

14.7.5 సిద్ధాంతము: $\operatorname{grad}\phi$ అనేది $\phi(x,y,z) = c$ అను స్థాయి ఉపరితలము (c స్థిర సంఖ్య)నకు అభిలంబంగా ఉండు సదిశ.

ఉపపత్తి: స్థాయి ఉపరితలము ϕ పై $P(x,y,z)$ ఒక బిందువు. P వద్ద యూనిట్ స్పర్శ సదిశ $\bar{T}$ అనుకొందాము. P యొక్క స్థాన సదిశ $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ అనుకొందాము.

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \bar{i}\frac{\partial x}{\partial s} + \bar{j}\frac{\partial y}{\partial s} + \bar{k}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$\phi(x,y,z) = c \Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial s} = 0 \Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\bar{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial s}\bar{i} + \frac{\partial y}{\partial s}\bar{j} + \frac{\partial z}{\partial s}\bar{k}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla\phi \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla\phi \cdot \bar{T} = 0$$

$\therefore \nabla\phi$ అనేది ϕ అనే ఉపరితలము పై P వద్ద అభిలంబముగా ఉంటుంది.

14.7.6 సిద్ధాంతము: $\phi(x, y, z) = c$ అను స్థాయి ఉపరితలము పై $P(x, y, z)$ వద్ద ϕ యొక్క ఆరోహణ దిశలో అభిలంబంగా ఉండు యూనిట్ అభిలంబ సదిశ $\bar{N}$ అయితే $\text{grad}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{N}} \bar{N}$.

ఉపపత్తి: $\phi(x, y, z) = c$, అను ఉపరితలమునకు అభిలంబంగా $\text{grad}\phi$ ఉంటుంది. కాబట్టి $\text{grad}\ \phi = K\bar{N}$ అగునట్లు K అను సదిశ ఉంటుంది. ($\bar{N}$ అనేది P వద్ద ఉపరితలానికి యూనిట్ అభిలంబ సదిశ).

$\therefore$ $\bar{N}$ దిశలో ϕ యొక్క దైశిక వ్యుత్పన్నము $= \frac{\partial \phi}{\partial \bar{N}} = \nabla\phi \cdot \bar{N}$

$$= K\bar{N} \cdot \bar{N}$$

$$= K \cdot$$

$$\therefore \text{grad}\ \phi = K\bar{N} = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{N}} \bar{N}$$

14.7.7 గమనిక: $|\text{grad}\ \phi| = |K\ \bar{N}| = K = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{N}}$

14.7.8 సిద్ధాంతము: $\frac{\partial \phi}{\partial s}$ గరిష్టమగు దిశలోని సదిశ $\text{grad}\phi$ అవుతుంది.

ఉపపత్తి: $\bar{e}$ దిశలో P వద్ద ϕ యొక్క దైశిక వ్యుత్పన్నము $= \frac{\partial \phi}{\partial s} = \bar{e} \cdot \text{grad}\phi = \bar{e} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial s} \bar{N} = (\bar{e} \cdot \bar{N}) \frac{\partial \phi}{\partial \bar{N}} = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{N}} \cos(\bar{e}, \bar{N})$, ($(\bar{e}, \bar{N})$ అనేది $\bar{e}$, $\bar{N}$ల మధ్య కోణము) ఇది గరిష్టము కావాలంటే $\cos(\bar{e}, \bar{N}) = 1$ i.e. $\bar{e}$ సదిశలో ఉంటుంది. $\bar{N}$ దిశలో దైశిక వ్యుత్పన్నము గరిష్ఠము అవుతుంది. గరిష్ఠ విలువ $= |\nabla\phi|$.

14.7.9 సిద్ధాంతము: $\bar{r}$ అనేది P యొక్క సామీప్యములో నిర్వచించబడిన సదిశా బిందు ప్రమేయము. $\bar{e}$ అనేది P గుండా పోవు యూనిట్ సదిశ అయితే $\frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{e}} = \bar{e}$.

ఉపపత్తి: $\bar{r}$ క్షేత్రములో P ఒక బిందువు. $\bar{e}$ దిశలో P గుండా పోవు రేఖ పై $P(Q \neq P)$ ఒక బిందువు అయితే

$$\underset{Q\to P}{Lt}\frac{\overline{r}(Q)-\overline{r}(P)}{QP}=\underset{Q\to P}{Lt}\frac{\overline{OQ}-\overline{OP}}{QP}=\underset{Q\to P}{Lt}\frac{\overline{PQ}}{QP}\ \text{(where } \overline{r}(P)=\overline{OP}\text{)}$$

$$\therefore\ \frac{\partial\overline{r}}{\partial\overline{e}}=\underset{Q\to P}{Lt}\frac{PQ\cdot\overline{e}}{QP}=\underset{Q\to P}{Lt}\ \overline{e}=\overline{e}.$$

14.7.10 గమనిక: $\frac{\partial\overline{r}}{\partial\overline{i}}=\frac{\partial\overline{r}}{\partial x}=\overline{i},\ \frac{\partial\overline{r}}{\partial\overline{j}}=\frac{\partial\overline{r}}{\partial y}=\overline{j};\ \frac{\partial\overline{r}}{\partial\overline{x}}=\frac{\partial\overline{r}}{\partial z}=\overline{k}$

14.7.11 గమనిక: If $\overline{r}=x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$, తృవల $\frac{\partial\overline{r}}{\partial\overline{e}}=\frac{\partial x}{\partial s}\overline{i}+\frac{\partial y}{\partial s}\overline{j}+\frac{\partial z}{\partial s}\overline{k}=\overline{e}$.

సాధించిన సమస్యలు:

14.7.12 : $r=|\overline{r}|$ అయితే $\frac{\partial\overline{r}}{\partial\overline{e}}=\frac{\overline{r}\cdot\overline{e}}{r}$ అని చూపండి.

సాధన: $\overline{r}^2=r^2$ అని మనకు తెలుసు.

$$\therefore\frac{\partial}{\partial\overline{e}}(\overline{r}\cdot\overline{r})=\frac{\partial}{\partial\overline{e}}\left(r^2\right)$$

$$\Rightarrow 2\overline{r}\cdot\frac{\partial\overline{r}}{\partial\overline{e}}=2r\frac{\partial r}{\partial\overline{e}}$$

$$\Rightarrow \overline{r}\cdot\frac{\partial\overline{r}}{\partial\overline{e}}=r\frac{\partial r}{\partial\overline{e}}$$

$$\Rightarrow \overline{r}\cdot\overline{e}=r\frac{\partial r}{\partial\overline{e}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial r}{\partial\overline{e}}=\frac{\overline{r}\cdot\overline{e}}{r}$$

14.7.13 గమనిక: $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\overline{r}\cdot\overline{i}}{r}=\frac{x}{r};\ \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\ \frac{\partial r}{\partial e}=\frac{z}{r}$

14.7.14 సిద్ధాంతము: $\overline{e}$ అను యూనిట్ సదిశ దిశలో P వద్ద ϕ అను అదిశా బిందు ప్రమేయము యొక్క దైశిక వ్యుత్పన్నం $(\text{grad}\,\phi)_p\cdot\overline{e}$ అవుతుంది.

ఉపపత్తి: $\bar{e}$ దిశలో P వద్ద ϕ యొక్క దైశిక వ్యుత్పన్నం $=\dfrac{\partial\phi}{\partial \bar{e}}=\dfrac{\partial\phi}{\partial s}$

$$=\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}=\left(\bar{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\bar{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\bar{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\cdot\left(\bar{i}\frac{\partial x}{\partial s}+\bar{j}\frac{\partial y}{\partial s}+\bar{k}\frac{\partial z}{\partial s}\right)$$

$$=(\mathrm{grad}\,\phi)_P\cdot\bar{e}$$

14.7.15 నిర్వచనము (రెండు ఉపరితలాల మధ్య కోణము): $\phi_1(x,y,z)=0,\ \ \phi_2(x,y,z)=0$ అను స్థాయి ఉపరితలాల ఖండన బిందువు P అనుకొనుము. P వద్ద రెండు ఉపరితలాలకు అభిలంబ రేఖల మధ్య కోణాన్ని P వద్ద ఉపరితలాల మధ్య కోణమని అంటాము.

14.7.16 గమనిక: P వద్ద ఉపరితలాల మధ్య కోణము θ అయితే

$$\cos\theta=\frac{\nabla\phi_1\cdot\nabla\phi_2}{|\nabla\phi_1|\,|\nabla\phi_2|},\qquad (\because\ \nabla\phi_1 \text{ అనేది P వద్ద } \phi_1 \text{ కు అభిలంబ సదిశ}).$$

సాధించిన సమస్యలు:

14.7.17: $\nabla f(r)=f'(r)\dfrac{\bar{r}}{r}$, అని చూపండి.

సాధన: $\nabla f(r)=\sum\bar{i}\dfrac{\partial}{\partial x}f(r)$

$$=\sum\bar{i}\ f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}.$$

$$=\sum\bar{i}\ f'(r)\frac{x}{r}$$

$$=\frac{f'(r)}{r}\sum x\bar{i}$$

$$=f'(r)\frac{\bar{r}}{r}$$

14.7.18: $P=(1,2,3)$, $Q=(5,0,4)$ అయితే $\overline{PQ}$, దిశలో P వద్ద $f=x^2-y^2+2z^2$ యొక్క దైశిక వ్యుత్పన్నాన్ని కనుగొని అది ఎప్పుడు గరిష్ఠమగునో తెలిపి, గరిష్ఠ విలువను కనుక్కోండి.

సాధన: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2y,\ \frac{\partial f}{\partial z} = 4z$

$$\text{grad} f = \sum \bar{i} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x\bar{i} - 2y\bar{j} + 4z\bar{k}$$

$$P(1,2,3), \text{grad } f = 2\bar{i} - 2y\bar{j} + 4z\bar{k}$$

$$\overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{OP} = 4\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$$

$\overline{PQ}$ దిశలో యూనిట్ సదిశ $\bar{e} = \frac{4\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}}{\sqrt{21}}$

$\therefore$ P వద్ద $\overline{PQ}$ దిశలో f యొక్క దైశిక వ్యుత్పన్నం $= (\text{grad } f)_P \cdot \bar{e}$

$$= (2\bar{i} - 4\bar{j} + 12\bar{k}) \cdot \frac{(4\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k})}{\sqrt{21}}$$

$$= \frac{8+8+12}{\sqrt{21}} = \frac{28}{\sqrt{21}}$$

$\text{grad} f = 2\bar{i} - 4\bar{j} + 12\bar{k}$ దిశలో P వద్ద f యొక్క దైశిక వ్యుత్పన్నం గరిష్ఠమవుతుంది.

$\overline{PQ}$ దిశలో P వద్ద f యొక్క దైశిక వ్యుత్పన్నపు గరిష్ఠ విలువ $= |\text{grad } f|$

$$= \sqrt{4+16+144}$$

$$= \sqrt{164}$$

$$= 2\sqrt{41}$$

14.7.19: $(4,-3,2)$ వద్ద $x^2 + y^2 + z^2 = 29$ మరియు $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - 8z - 47 = 0$ అను గోళాల మధ్య కోణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: $\phi_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 29$

$$\phi_2 = x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - 8z - 47$$

$$\nabla\phi_1 = 2x\bar{i} + 2y\bar{j} + 2z\bar{k}$$

$$\nabla\phi_1 = (2x+4)\bar{i} + (2y-6)\bar{j} + (2z-8)\bar{k}$$

At $P(4,-3,2)$, $\nabla\phi_1 = 8\bar{i} - 6\bar{j} + 4\bar{k}$

$$\nabla\phi_2 = 12\bar{i} - 12\bar{j} - 4\bar{k}$$

P వద్ద ఉపరితలాల మధ్య కోణము θ అయితే

$$\cos\theta = \frac{\nabla\phi_1 \cdot \nabla\phi_2}{|\nabla\phi_1|\,|\nabla\phi_2|} = \frac{(8i - 6\bar{j} + 4\bar{k}) \quad \cdot\ (12\bar{i} - 12\bar{j} - 4\bar{k})}{\sqrt{64+36+16} \qquad \sqrt{144+144+16}}$$

$$= \frac{152}{\sqrt{116 \times 304}} = \sqrt{\frac{19}{29}} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\sqrt{\frac{19}{29}}$$

14.8 అపసరణము, అలక (Divergen:e and :url):

14.8.1 నిర్వచనము (అపసరణము): $\bar{F}$ అవకలనీయ సదిశా బిందు ప్రమేయము అయితే $\bar{F}$ యొక్క అపసరణము $\operatorname{div}\bar{F} = \bar{i}\cdot\frac{\partial\bar{F}}{\partial x} + \bar{j}\cdot\frac{\partial\bar{F}}{\partial y} + \bar{k}\cdot\frac{\partial\bar{F}}{\partial z}$ అని నిర్వచిస్తాము.

14.8.2 గమనిక: $\operatorname{div}\bar{F}$ ను $\nabla\cdot\bar{F} = \sum \bar{i}\cdot\frac{\partial\bar{F}}{\partial x}$ అని కూడా వ్రాస్తాము.

14.8.3 గమనిక: $\bar{F}$సదిశా బిందు ప్రమేయము అయితే $\operatorname{div}\bar{F}$ అదిశా బిందు ప్రమేయము.

14.8.4 సిద్ధాంతము: $\bar{F} = F_1\bar{i} + F_2\bar{j} + F_3\bar{k}$, అయితే $\operatorname{div}\bar{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$

ఉపపత్తి: $\operatorname{div}\bar{F} = \sum\bar{i}\cdot\frac{\partial\bar{F}}{\partial x} = \sum\bar{i}\cdot\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial F_2}{\partial x}\bar{j} + \frac{\partial F_3}{\partial x}\bar{k}\right)$

$$= \sum\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

14.8.5 నిర్వచనము: $\bar{F}$ సదిశా బిందు ప్రమేయము, $\operatorname{div}\bar{F} = 0$ అయితే $\bar{F}$ ను సొలినాయిడల్ (solenoidal) సదిశ అంటాము.

14.8.6 గమనిక: $\bar{F}$ స్థిర సదిశా బిందు ప్రమేయము అంటే $\bar{F}$ సొలినాయిడల్ ($\because \bar{F} = F_1\bar{i} + F_2\bar{j} + F_3\bar{k}$ స్థిరము $\Rightarrow F_1, F_2, F_3$ స్థిరము $\Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial x} = 0 = \frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\partial F_3}{\partial z} \Rightarrow \operatorname{div}\bar{F} = 0$).

సాధించిన సమస్యలు:

14.8.7: $y^3z^2\bar{i} - 3x^2z^5\bar{j} + 5x^5y^4\bar{k}$ సాలినాయిడల్ అని చూపండి.

సాధన: $\bar{f} = y^3z^2\bar{i} - 3x^2z^5\bar{j} + 5x^5y^4\bar{k}$ అనుకొందాము.

$$\operatorname{div}\bar{f} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y^3z^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-3x^2z^5\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(5x^5y^4\right)$$

$= 0+0+0 = 0$ $\quad \therefore \bar{f}$ సాలినాయిడల్ సదిశ అవుతుంది.

14.8.8: $\bar{f} = (x+3y)\bar{i} + (y=2z)\bar{j} + (x+pz)\bar{k}$ సాలినాయిడల్ సదిశ అయితే p విలువ కనుక్కోండి.

సాధన: $\bar{f}$ సాలినాయిడల్ సదిశ అయితే $\operatorname{div}\bar{f} = 0$.

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(x+3y) + \frac{\partial}{\partial y}(y-2z) + \frac{\partial}{\partial z}(x+pz) = 0$$

$$\Rightarrow 1+1+p = 0$$

$$\Rightarrow p = -2$$

14.8.9 నిర్వచనము (అలక): $\bar{F}$ అవకలనీయ సదిశా బిందు ప్రమేయమైతే $\bar{F}$ యొక్క అలక

$$\operatorname{Curl}\bar{F} = \bar{i}\times\frac{\partial\bar{F}}{\partial x} + \bar{j}\times\frac{\partial\bar{F}}{\partial y} + \bar{k}\times\frac{\partial\bar{F}}{\partial z}$$ అని నిర్వచిస్తాము.

14.8.10 గమనిక: $\bar{F}$ ఒక సదిశా బిందు ప్రమేయము. దీన్ని $\operatorname{curl}\bar{F} = \sum \bar{i}\times\frac{\partial\bar{F}}{\partial x}$ అని కూడా వ్రాస్తాము.

14.8.11 సిద్ధాంతము: $\bar{F} = F_1\bar{i} + F_2\bar{j} + F_3\bar{k}$ అయితే $\operatorname{Curl}\ \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$

ఉపపత్తి: $\operatorname{Curl}\bar{F} = \sum i\times\frac{\partial\bar{F}}{\partial x}$

$$= \bar{i}\times\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial F_2}{\partial x}\bar{j} + \frac{\partial F_3}{\partial x}\bar{k}\right) + \bar{j}\times\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\bar{i} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial F_3}{\partial y}\bar{k}\right) + \bar{k}\times\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\bar{i} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\bar{j} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\bar{k}\right)$$

$$= \frac{\partial F_2}{\partial x}\bar{k} + \frac{\partial F_3}{\partial x}(-\bar{j}) + \frac{\partial F_1}{\partial y}(-\bar{k}) + \frac{\partial F_3}{\partial y}(\bar{i}) + \frac{\partial F_1}{\partial z}(\bar{j}) + \frac{\partial F_2}{\partial z}(-\bar{i})$$

$$= \bar{i}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) - \bar{j}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right) + \bar{k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

14.8.12 నిర్వచనము: $\bar{F}$ సదిశా బిందు ప్రమేయము. $\operatorname{curl}\bar{F} = \bar{0}$ అయితే $\bar{F}$ ను భ్రమణ రాహిత్య (irrotational) సదిశ అంటాము.

14.8.13 గమనిక: $\bar{F}$ స్థిర సదిశ అయితే $\bar{F}$ భ్రమణ రాహిత్య సదిశ.

$\left(\because \bar{F} = F_1\bar{i} + F_2\bar{j} + F_3\bar{k}\right.$ స్థిరము $\Rightarrow F_1, F_2, F_3$ స్థిరము $\left.\Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial x} = \bar{0}\right)$

14.8.14 S.A.Q.: $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ అయితే $\operatorname{div}\bar{r} = 3$ మరియు curl $\bar{r} = \bar{0}$ అని చూపండి.

14.8.15 S.A.Q.: $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ అయితే $\frac{\bar{r}}{r^2}$ భ్రమణ రాహిత్య సదిశ అనీ, $\frac{\bar{r}}{r^3}$ సాలినాయిడల్ సదిశ అని చూపండి.

సాధించిన సమస్యలు:

14.8.16: $\bar{f} = (y+z)\bar{i} + (z+x)\bar{j} + (x+y)\bar{k}$ భ్రమణ రాహిత్య సదిశ అని చూపండి.

సాధన: $\operatorname{Curl}\bar{f} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}$

$$= \bar{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(x+y) - \frac{\partial}{\partial z}(z+x)\right\} - \bar{j}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(x+y) - \frac{\partial}{\partial z}(y+z)\right\} + \bar{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(z+x) - \frac{\partial}{\partial y}(y+z)\right\}$$

$$=\overline{i}(1-1)-\overline{j}(1-1)+\overline{k}(1-1)$$

$$=\overline{0}$$

$\therefore \overline{f}$ భ్రమణ రాహిత్య సదిశ.

14.8.17: $\overline{f}=(x+2y+az)\overline{i}+(bx-3y-z)\overline{j}+(4x+cy+2z)\overline{k}$ భ్రమణ రాహిత్య సదిశ అయితే a,b,c విలువలు కనుక్కోండి.

సాధన: $\overline{f}$ భ్రమణ రాహిత్య సదిశ కాబట్టి $\overline{f}=\overline{0}$.

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x+2y+az & bx-3y-z & 4x+cy+2z \end{vmatrix}=\overline{0}$$

$$\Rightarrow \overline{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(rx+cy+2z)-\frac{\partial}{\partial z}(bx-3y-z)\right\}-\overline{j}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(4x+cy+2z)-\frac{\partial}{\partial z}(x+2y+az)\right\}$$

$$+\overline{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(bx-3y-2)-\frac{\partial}{\partial y}(x+2y+az)\right\}=\overline{0}$$

$$\Rightarrow \overline{i}(c+1)-\overline{j}(4-a)+\overline{k}(b-z)=\overline{0}$$

$$\Rightarrow c=-1, a=4, b=2$$

14.8.18: $\operatorname{curl}(\overline{r}\times\overline{a})=-2\overline{a}$ అని చూపండి.

సాధన: $\operatorname{curl}(\overline{r}\times\overline{a})=\sum\overline{i}\times\dfrac{\partial}{\partial x}(\overline{r}\times\overline{a})=\sum\overline{i}\times\left(\dfrac{\partial\overline{r}}{\partial x}\times\overline{a}\right)$

$$=\sum\overline{i}\times(\overline{i}\times\overline{a})=\sum\left\{(\overline{i}\cdot\overline{a})\overline{i}-(\overline{i}\cdot\overline{i})\overline{a}\right\}$$

$$=\sum(\overline{a}\cdot\overline{i})\overline{i}-\sum\overline{a}=\overline{a}-3\overline{a}=-2\overline{a}$$

14.8.19: $r^n\overline{r}$ భ్రమణ రాహిత్య సదిశ అని చూపండి.

సాధన: $\overline{f}=r^n\overline{r}=r^n x\overline{i}+r^n y\overline{j}+r^n z\overline{k}$ అనుకొందాము.

$$\operatorname{curl}\bar{f} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ r^n x & r^n y & r^n z \end{vmatrix}$$

$$= \bar{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(r^n z) - \frac{\partial}{\partial z}(r^n y)\right\} - \bar{j}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(r^n z) - \frac{\partial}{\partial z}(r^n x)\right\} + \bar{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(r^n z) - \frac{\partial}{\partial y}(r^n x)\right\}$$

$$= \bar{i}\left\{nr^{n-1}\frac{y}{r}z - nr^{n-1}\frac{z}{r}y\right\} - \bar{j}\left\{nr^{n-1}\frac{x}{r}z - nr^{n-1}\frac{z}{r}x\right\} + \bar{k}\left\{nr^{n-1}\frac{x}{r}z - nr^{n-1}\frac{y}{r}x\right\}$$

$$= \bar{0}$$

$\therefore \bar{f}$ భ్రమణ రాహిత్య సదిశ.

14.8.20: $r^n \bar{r}$ సొలినాయిడల్ సదిశ అయితే $n = -3$ అని చూపండి. $\left(\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}\right)$

సాధన: $\bar{f} = r^n \bar{r}$ అనుకొందాము. $\Rightarrow \bar{f} = r^n x\bar{i} + r^n y\bar{j} + r^n z\bar{k}$

$\bar{f}$ సొలినాయిడల్ కాబట్టి $\operatorname{div}\bar{f} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(r^n x) + \frac{\partial}{\partial y}(r^n y) + \frac{\partial}{\partial z}(r^n z) = 0$$

$$\Rightarrow \sum\left(r^n \cdot 1 + x \cdot nr^{n-1}\frac{x}{r}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 3r^n + nr^{n-2}\sum x^2 = 0$$

$$\Rightarrow 3r^n + nr^{n-2}r^2 = 0$$

$$\Rightarrow (3+n)r^4 = 0$$

$$\Rightarrow n = -3$$

14.8.21 గమనిక: $\frac{\bar{r}}{r^3}$ సొలినాయిడలల్ సదిశ.

14.8.22: $f(r)\bar{r}$ భ్రమణ రాహిత్య సదిశ అని చూపండి.

సాధన: $\overline{F} = f(r)\overline{r} = f(r)x\overline{i} + f(r)y\overline{j} + f(r)z\overline{k}$ అనుకొందాము.

$$\therefore \text{Curl}\,\overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xf(r) & yf(r) & zf(r) \end{vmatrix}$$

$$= \overline{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(zf(r)) - \frac{\partial}{\partial z}(yf(r))\right\} - \overline{j}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(zf(r)) - \frac{\partial}{\partial z}(xf(r))\right\} + \overline{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(yf(r)) - \frac{\partial}{\partial y}(xf(r))\right\}$$

$$= \overline{i}\left\{zf'(r)\frac{y}{r} - yf'(r)\frac{z}{r}\right\} = \overline{0}$$

$\therefore \overline{F}$ భ్రమణ రాహిత్య సదిశ.

14.8.23 సిద్ధాంతము: $\overline{f}, \overline{g}$ లు సదిశా బిందు ప్రమేయములయితే $\text{div}(\overline{f} \pm \overline{g}) = \text{div}\,\overline{f} \pm \text{div}\,\overline{g}$.

ఉపపత్తి: $$\text{div}(\overline{f} \pm \overline{g}) = \sum \overline{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\overline{f} \pm \overline{g}) = \sum \overline{i} \cdot \left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial x} \pm \frac{\partial \overline{g}}{\partial x}\right)$$

$$= \sum \overline{i} \cdot \frac{\partial \overline{f}}{\partial x} \pm \sum \overline{i} \cdot \frac{\partial \overline{g}}{\partial x}$$

$$= \text{div}\,\overline{f} \pm \text{div}\,\overline{g}$$

14.8.24 సిద్ధాంతము: $\overline{f}, \overline{g}$ లు సదిశా బిందు ప్రమేయములయితే $\text{Curl}(\overline{f} \pm \overline{g}) = \text{Curl}\,\overline{f} \pm \text{Curl}\,\overline{g}$.

ఉపపత్తి: $$\text{Curl}(\overline{f} \pm \overline{g}) = \sum i \times \frac{\partial}{\partial x}(\overline{f} \pm \overline{g}) = \sum \overline{i} \times \left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial x} \pm \frac{\partial \overline{g}}{\partial x}\right)$$

$$= \sum \overline{i} \times \frac{\partial \overline{f}}{\partial x} \pm \sum \overline{i} \times \frac{\partial \overline{g}}{\partial x}$$

$$= \text{Curl}\,\overline{f} \pm \text{Curl}\,\overline{g}$$

14.8.25 నిర్వచనము: $\overline{a}$ సదిశ అయితే

$$\overline{a} \cdot \nabla = (\overline{a} \cdot \overline{i})\frac{\partial}{\partial x} + (\overline{a} \cdot \overline{j})\frac{\partial}{\partial y} + (\overline{a} \cdot \overline{k})\frac{\partial}{\partial z}$$

అను పరికర్తను $(\bar{a}\cdot\nabla)\phi=(\bar{a}\cdot\bar{i})\frac{\partial\phi}{\partial x}+(\bar{a}\cdot\bar{j})\frac{\partial\phi}{\partial y}+(\bar{a}\cdot\bar{k})\frac{\partial\phi}{\partial z}$

$$(\bar{a}\cdot\nabla)\bar{F}=(\bar{a}\cdot\bar{i})\frac{\partial\bar{F}}{\partial x}+(\bar{a}\cdot\bar{j})\frac{\partial\bar{F}}{\partial y}+(\bar{a}\cdot\bar{k})\frac{\partial\bar{F}}{\partial z}$$ అని నిర్వచిస్తాము.

(ϕ అదిశా బిందు ప్రమేయము, $\bar{F}$ సదిశా బిందు ప్రమేయం)

$\bar{a}$ సదిశ అయితే

$$\bar{a}\times\nabla=(\bar{a}\times\bar{i})\frac{\partial}{\partial x}+(\bar{a}\times\bar{j})\frac{\partial}{\partial y}+(\bar{a}\times\bar{k})\frac{\partial}{\partial z}$$

అను పరికర్తను

$$(\bar{a}\times\nabla)\phi=(\bar{a}\times\bar{i})\frac{\partial\phi}{\partial x}+(\bar{a}\times\bar{j})\frac{\partial\phi}{\partial y}+(\bar{a}\times\bar{k})\frac{\partial\phi}{\partial z}$$ అని నిర్వచిస్తాము.

(ϕ అదిశా బిందు ప్రమేయం)

14.8.26 సిద్ధాంతము: $\bar{f}$ సదిశా ప్రమేయం ϕ అదిశా ప్రమేయము, $\bar{f}, \phi$ లు అవకలనీయమయితే

$$\operatorname{div}\phi\bar{f}=(\operatorname{grad}\phi)\cdot\bar{f}\times\phi\operatorname{div}\bar{f}$$

$$\operatorname{curl}\phi\bar{f}=(\operatorname{grad}\phi)\times\bar{f}+\phi\operatorname{curl}\bar{f}$$

ఉపపత్తి: $$\operatorname{div}\phi\bar{f}=\sum\bar{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\phi\bar{f})=\sum\bar{i}\cdot\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\bar{f}+\phi\frac{\partial\bar{f}}{\partial x}\right)=\left[\bar{i}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x}\bar{f}+\sum\bar{i}\cdot\phi\frac{\partial\bar{f}}{\partial x}\right]$$

$$=\sum\bar{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot\bar{f}+\phi\sum\bar{i}\cdot\frac{\partial\bar{f}}{\partial x}=(\operatorname{grad}\phi)\cdot\bar{f}+\phi\operatorname{div}\bar{f}$$

$$\operatorname{curl}\phi\bar{f}=\sum\bar{i}\times\frac{\partial}{\partial x}(\phi\bar{f})=\sum\bar{i}\times\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\bar{f}+\phi\frac{\partial\bar{f}}{\partial x}\right)$$

$$=\sum\bar{i}\times\frac{\partial\phi}{\partial x}\bar{f}+\sum\bar{i}\times\phi\frac{\partial\bar{f}}{\partial x}$$

$$= \sum \bar{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} \times \bar{f} + \phi \left(\sum \bar{i} \times \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \right)$$

$$= (\text{grad } \phi) \times \bar{f} + \phi \text{ curl } \bar{f}$$

14.8.27 సిద్ధాంతము: $\bar{f}$, $\bar{g}$ లు అవకలనీయమగు సదిశా ప్రమేయములయితే $\text{div}(\bar{f} \times \bar{g}) = \bar{g} \cdot \text{curl} \bar{f} - \bar{f} \cdot \text{curl} \bar{g}$

ఉపపత్తి: $$\text{div}(\bar{f} \times \bar{g}) = \sum \bar{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\bar{f} \times \bar{g}) = \sum \bar{i} \cdot \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \times \bar{g} + \bar{f} \times \frac{\partial \bar{g}}{\partial x} \right)$$

$$= \sum \bar{i} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \times \bar{g} + \sum \bar{i} \cdot \bar{f} \times \frac{\partial \bar{g}}{\partial x}$$

$$= \sum \bar{i} \times \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \cdot \bar{g} - \sum \bar{i} \times \frac{\partial \bar{g}}{\partial x} \cdot \bar{f}$$

$$= (\text{curl } \bar{f}) \cdot \bar{g} - (\text{curl} \bar{g}) \cdot \bar{f}$$

$$= \bar{g} \cdot \text{curl} \bar{f} - \bar{f} \cdot \text{curl} \bar{g}$$

14.8.28 ఉప సిద్ధాంతము: $\bar{f}$, $\bar{g}$ లు భ్రమణ రాహిత్య సదిశలయితే $\bar{f} \times \bar{g}$ సాలినాయిడల్ సదిశ అవుతుంది.

$$\left(\because \text{div } \bar{f} \times \bar{g} \cdot \text{curl} - \bar{f} - \bar{f} \cdot \text{curl} \bar{g} \cdot \bar{o} - \bar{f} \cdot \bar{o} = 0 \right)$$

14.8.29 సిద్ధాంతము: $\bar{f}$, $\bar{g}$ లు అవకలనీయ సదిశా ప్రమేయములయితే

$$\text{grad}(\bar{f} \cdot \bar{g}) = (\bar{f} \cdot \nabla)\bar{g} + (\bar{g} \cdot \nabla)\bar{f} + \bar{f} \times \text{curl} \bar{g} + \bar{g} \times \text{curl} \bar{f}$$

ఉపపత్తి: $$\bar{f} \times \text{curl} \bar{g} = f \times \sum \bar{i} \times \frac{\partial \bar{g}}{\partial x} = \sum \bar{f} \times \left(\bar{i} \times \frac{\partial \bar{g}}{\partial x} \right)$$

$$= \sum \left(\bar{f} \cdot \frac{\partial \bar{g}}{\partial x} \right) \bar{i} - (\bar{f} \cdot \bar{i}) \frac{\partial \bar{g}}{\partial x}$$

$$= \sum \left(\bar{f} \cdot \frac{\partial \bar{g}}{\partial x} \right) \bar{i} - \sum (\bar{f} \cdot \bar{i}) \frac{\partial \bar{g}}{\partial x}$$

$$\therefore \sum \left(\bar{f} \cdot \frac{\partial \bar{g}}{\partial x} \right) \bar{i} = \bar{f} \times \text{curl } \bar{g} + (\bar{f} \cdot \nabla)\bar{g}$$

$$\therefore \sum\left(\overline{f}\cdot\frac{\partial\overline{g}}{\partial x}\right)\overline{i} = \overline{f}\times \text{curl}\,\overline{g} + \left(\overline{f}\cdot\nabla\right)\overline{g}$$

ఇదే విధంగా $\sum\left(\frac{\partial\overline{f}}{\partial x}\cdot\overline{g}\right)\overline{i} = \overline{g}\times \text{curl}\ \overline{f} + \left(\overline{g}\cdot\nabla\right)\overline{f}$

కలుపగా $\sum\left(\overline{f}\cdot\frac{\partial\overline{g}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{f}}{\partial x}\cdot\overline{g}\right)\overline{i} = \overline{f}\times \text{curl}\,\overline{g} + \overline{g}\times \text{curl}\,\overline{f} + \left(\overline{f}\cdot\nabla\right)\overline{g} + \left(\overline{g}\cdot\nabla\right)\overline{f}$

$$\Rightarrow \sum\overline{i}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{f}\cdot\overline{g}\right) = \overline{f}\times \text{curl}\,\overline{g} + \overline{g}\times \text{curl}\,\overline{f} + \left(\overline{f}\cdot\nabla\right)\overline{g} + \left(\overline{g}\cdot\nabla\right)\overline{f}$$

$$\text{grad}\left(\overline{f}\cdot\overline{g}\right) = \overline{f}\times \text{curl}\ \overline{g} + \overline{g}\ \text{curl}\,\overline{f} + \left(\overline{f}\cdot\nabla\right)\overline{g} + \left(\overline{g}\cdot\nabla\right)\overline{f}$$

14.8.30 సిద్ధాంతము: $\overline{f}$, $\overline{g}$ లు అవకలనీయ సదిశా ప్రమేయాలయితే

$$\text{curl}\left(\overline{f}\times\overline{g}\right) = \overline{f}\ \text{div}\,\overline{g} - \overline{g}\,\text{div}\,\overline{f} + \left(\overline{g}\cdot\nabla\right)\overline{f} - \left(\overline{f}\cdot\nabla\right)\overline{g}$$

ఉపపత్తి: $\text{curl}\left(\overline{f}\times\overline{g}\right) = \sum\overline{i}\times\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{f}\times\overline{g}\right)$

$$= \sum\overline{i}\times\left(\frac{\partial\overline{f}}{\partial x}\times\overline{g} + \overline{f}\times\frac{\partial\overline{g}}{\partial x}\right)$$

$$= \sum\overline{i}\times\left(\frac{\partial\overline{f}}{\partial x}\times\overline{g}\right) + \sum\overline{i}\times\left(\overline{f}\times\frac{\partial\overline{g}}{\partial x}\right)$$

$$= \sum\left\{\left(\overline{i}\cdot\overline{g}\right)\frac{\partial\overline{f}}{\partial x} - \left(\overline{i}\cdot\frac{\partial\overline{f}}{\partial x}\right)\overline{g}\right\} + \sum\left(\overline{i}\cdot\frac{\partial\overline{g}}{\partial x}\right)\overline{f} - \left(\overline{i}\cdot\overline{f}\right)\frac{\partial\overline{g}}{\partial x}$$

$$= \sum\left(\overline{i}\cdot\overline{g}\right)\frac{\partial\overline{f}}{\partial x} - \left(\sum\overline{i}\cdot\frac{\partial\overline{f}}{\partial x}\right)\overline{g} + \sum\left(\overline{i}\cdot\frac{\partial\overline{g}}{\partial x}\right)\overline{f} - \sum\left(\overline{i}\cdot\overline{f}\right)\frac{\partial\overline{g}}{\partial x}$$

$$= \left(\overline{g}\cdot\nabla\right)\overline{f} - \left(\text{div}\,\overline{f}\right)\overline{g} + \left(\text{div}\,\overline{g}\right)\overline{f} - \left(\overline{f}\cdot\nabla\right)\overline{g}$$

$$= \overline{f}\ \text{div}\ \overline{g} - \overline{g}\,\text{div}\,\overline{f} + \left(\overline{g}\cdot\nabla\right)\overline{f} - \left(\overline{f}\cdot\nabla\right)\overline{g}$$

14.8.31 సిద్ధాంతము: ϕ అవకలనీయ అదిశా బిందు ప్రమేయము అయితే $\operatorname{div}\operatorname{grad}\phi = \sum \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$.

ఉపపత్తి: $\operatorname{div}\operatorname{grad}\phi = \sum \bar{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{grad}\phi)$

$$= \sum \bar{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{i} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$= \sum \bar{i} \cdot \left(\bar{i}\,\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \bar{j}\,\frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial y} + \bar{i}\,\frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial z}\right)$$

$$= \sum \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

14.8.32 నిర్వచనము: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ అను లాప్లాస్ పరికర్తను

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

$\nabla^2\bar{F} = \frac{\partial^2\bar{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\bar{F}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\bar{F}}{\partial z^2}$ అని నిర్వచిస్తాము

(ϕ అదిశా బిందు ప్రమేయము, $\bar{F}$ సదిశా బిందు ప్రమేయము)

14.8.33 సిద్ధాంతము: ϕ అవకలనీయ అదిశా బిందు ప్రమేయమయితే $\operatorname{curl}\operatorname{grad}\phi = \bar{0}$.

ఉపపత్తి: $\operatorname{grad}\phi = \sum \bar{i}\,\frac{\partial\phi}{\partial x}$.

$$\therefore \operatorname{curl}\operatorname{grad}\phi = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \sum\left[\bar{i}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z\,\partial y}\right)\right] = \bar{0}$$

14.8.34 గమనిక: ϕ అదిశా బిందు ప్రమేయమయితే $\nabla\phi$ భ్రమణ రాహిత్య సదిశ. $\nabla^2\phi = 0$ ను లాప్లాస్ సమీకరణము అంటాము.

14.8.35 సిద్ధాంతము: $\overline{f}$ అవకలనీయ సదిశా బిందు ప్రమేయమయితే $\text{div curl } \overline{f} = 0$.

ఉపపత్తి: $\overline{f} = f_1\overline{i} + f_2\overline{j} + f_3\overline{k}$ అనుకొందాము.

$$\text{curl}\,\overline{f} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \overline{i}\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) - \overline{j}\left(\frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z}\right) + \overline{i}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)$$

$$\therefore \text{div}\,\text{curl}\,\overline{f} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 f_3}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial z\,\partial y}$$

$$= 0$$

14.8.36 గమనిక: $\overline{f}$ సదిశా బిందు ప్రమేయము అయితే $\text{curl}\,\overline{f}$ సాలినాయిడల్ సదిశ అవుతుంది.

14.8.37 సిద్ధాంతము: $\overline{f}$ అవకలనీయ సదిశా బిందు ప్రమేయమయితే $\text{curl curl}\,\overline{f} = \text{grad div}\,\overline{f} - \nabla^2\overline{f}$.

ఉపపత్తి: $$\text{curl curl}\,\overline{f} = \sum \overline{i} \times \frac{\partial}{\partial x}\left(\text{curl}\,\overline{f}\right) = \sum \overline{i} \times \frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{i} \times \frac{\partial \overline{f}}{\partial x} + \overline{j} \times \frac{\partial \overline{f}}{\partial y} + \overline{k} \times \frac{\partial \overline{f}}{\partial z}\right)$$

$$= \overline{i} \times \frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{i} \times \frac{\partial \overline{f}}{\partial x} + \overline{j} \times \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{y}} + \overline{k} \times \frac{\partial \overline{f}}{\partial z}\right) + \overline{j} \times \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{i} \times \frac{\partial \overline{f}}{\partial x} + \overline{j} \times \frac{\partial \overline{f}}{\partial y} + \overline{k} \times \frac{\partial \overline{f}}{\partial z}\right) + \overline{k} \times \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{i} \times \frac{\partial \overline{f}}{\partial x} + \overline{j} \times \frac{\partial \overline{f}}{\partial y} + \overline{k} \times \frac{\partial \overline{f}}{\partial z}\right)$$

$$= \overline{i} \times \left(\overline{i} \times \frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial x^2} + \overline{j} \times \frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial x\,\partial y} + \overline{k} \times \frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial x\,\partial z}\right) + \overline{j} \times \left(\overline{i} \times \frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial y\,\partial x} + \overline{j} \times \frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial y^2} + \overline{k} \times \frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial y \partial z}\right)$$

$$+ \overline{k} \times \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{i} \times \frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial z\,\partial x} + \overline{j} \times \frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial z \partial y} + \overline{k} \times \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)$$

$$= \left(\overline{i} . \frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial x^2}\right)\overline{i} - (\overline{i} \cdot \overline{i})\frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial x^2} + \left(\overline{i} \cdot \frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial x\,\partial y}\right)\overline{j} + \left(\overline{i} \cdot \frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial x\,\partial z}\right)\overline{k} + \left(\overline{j} \cdot \frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial y\,\partial x}\right)\overline{i} + \left(\overline{j} \cdot \frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial y^2}\right)\overline{j} - (\overline{j} \cdot \overline{j})\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$+\left(\overline{j}\cdot\frac{\partial^2\overline{f}}{\partial y\,\partial z}\right)\overline{k}+\left(\overline{k}\cdot\frac{\partial^2\overline{f}}{\partial z\,\partial x}\right)\overline{i}+\left(\overline{k}\cdot\frac{\partial^2\overline{f}}{\partial z\,\partial y}\right)\overline{j}+\left(\overline{k}\cdot\frac{\partial^2\overline{f}}{\partial z^2}\right)\overline{k}-(\overline{k}\cdot\overline{k})\frac{\partial^2\overline{f}}{\partial z^2}$$

$$=\overline{i}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{i}\cdot\frac{\partial\overline{f}}{\partial x}+\overline{j}\cdot\frac{\partial\overline{f}}{\partial y}+\overline{k}\cdot\frac{\partial\overline{f}}{\partial z}\right)+\overline{j}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{i}\cdot\frac{\partial\overline{f}}{\partial x}+\overline{j}\cdot\frac{\partial\overline{f}}{\partial y}+\overline{k}\cdot\frac{\partial\overline{f}}{\partial z}\right)$$

$$+\overline{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{i}\cdot\frac{\partial\overline{f}}{\partial x}+\overline{j}\cdot\frac{\partial\overline{f}}{\partial y}+\overline{k}\cdot\frac{\partial\overline{f}}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial^2\overline{f}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\overline{f}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\overline{f}}{\partial z^2}\right)$$

$$=\sum\overline{i}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\text{div }\overline{f}\right)-\nabla^2\overline{f}$$

$$=\text{grad div }\overline{f}-\nabla^2\overline{f}$$

సాధించిన సమస్యలు:

14.8.38: $\overline{f}=\text{grad}\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right)$ అయితే $\text{div}\,\overline{f}$, $\text{curl}\,\overline{f}$ కనుక్కోండి.

సాధన: $\overline{f}=\text{grad}\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right)$

$$=\sum\overline{i}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right)$$

$$=\sum\overline{i}\left(3x^2-3yz\right)=\left(3x^2-3yz\right)\overline{i}+\left(3y^2-3zx\right)\overline{j}+\left(3z^2-3xy\right)\overline{k}$$

$$\therefore\text{div }\overline{f}=\frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2-3yz\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(3y^2-3zx\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(3z^2-3xy\right)$$

$$=6x+6y+6z$$

$$\text{curl}\,\overline{f}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 3x^2-3yz & 3y^2-3zx & 3x^2-3xy\end{vmatrix}$$

$$=\overline{i}\,(-3x+3x)-\overline{j}\,(-3y+3y)+\overline{k}\,(-3z+3z)$$

$$=\overline{0}$$

14.8.39: $\phi = x^2yz$ అయితే curl grad ϕ కనుక్కోండి.

సాధన: $\operatorname{grad}\phi = \sum \bar{i}\dfrac{\partial\phi}{\partial x} = 2xyz\,\bar{i} + x^2z\,\bar{j} + x^2y\,\bar{k}$

$$\therefore \operatorname{curl}\operatorname{grad}\phi = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz & x^2z & x^2y \end{vmatrix}$$

$$= \bar{i}\left(x^2 - x^2\right) - \bar{j}\left(2xy - 2xy\right) + \bar{k}\left(2xz - 2xz\right)$$

$$= \bar{0}$$

14.8.40: $\bar{f} = 2xz^2\bar{i} - yz\bar{j} + 3xz^3\bar{k}$ అయితే **(1, 1, 1)** వద్ద curl curl $\bar{f}$ కనుక్కోండి.

సాధన: $$\operatorname{curl}\bar{f} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xz & -yz & 3xz^3 \end{vmatrix} = \bar{i}\left(0 + y\right) - \bar{j}\left(3z^3 - 4xz\right) + \bar{k}\left(0 - 0\right)$$

$$= y\bar{i} + \left(4xz - 3z^3\right)\bar{j}$$

$$\therefore \operatorname{curl}\operatorname{curl}\bar{f} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & 4xz - 3z^3 & 0 \end{vmatrix} = \bar{i}\left(0 - 4x + 9z^2\right) - \bar{j}\left(0 - 0\right) + \bar{k}\left(4z - 1\right)$$

$$= \left(9z^2 - 4x\right)\bar{i} + \left(4z - 1\right)\bar{k}$$

$(1,1,1)$ వద్ద curl curl $\bar{f} = 5\bar{i} + 3\bar{k}$

14.8.41: $\bar{a}$ స్థిర సదిశ అయితే

$$\operatorname{curl}\frac{\bar{a} \times \bar{r}}{r^3} = -\frac{\bar{a}}{r^3} + \frac{3\bar{r}}{r^5}$$ అని చూపండి.

సాధన: $\operatorname{curl}\frac{\bar{a}\times\bar{r}}{r^3}=\sum\bar{i}\times\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\bar{a}\times\bar{r}}{r^3}\right)$

$$=\sum\bar{i}\times\left\{-\frac{3}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x}(\bar{a}\times\bar{r})+\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial x}(\bar{a}\times\bar{r})\right\}$$

$$=\sum\bar{i}\times\left\{-\frac{3}{r^4}\,\frac{x}{r}(\bar{a}\times\bar{r})+\frac{1}{r^3}(\bar{a}\times\bar{i})\right\}\ \because\frac{\partial}{\partial x}(\bar{a}\times\bar{r})=\frac{\partial\bar{a}}{\partial x}\times\bar{r}+a\times\frac{\partial\bar{r}}{\partial x}=0+\bar{a}\times\bar{i}=\bar{a}\times\bar{i}$$

$$=-\frac{3}{r^5}\sum x\bar{i}\times(\bar{a}\times\bar{r})+\frac{1}{r^3}\sum\{\bar{i}\times(\bar{a}\times\bar{i})\}$$

$$=\frac{-3}{r^5}\bar{r}\times(\bar{a}\times\bar{r})+\frac{1}{r^3}\sum\{(\bar{i}\cdot\bar{i})\bar{a}-(\bar{i}\cdot\bar{a})\bar{i}\}$$

$$=\frac{-3}{r^5}\{(\bar{r}\cdot\bar{r})\bar{a}-(\bar{r}\cdot\bar{a})\bar{r}\}+\frac{1}{r^3}(3\bar{a}-\bar{a})$$

$$=\frac{-3}{r^5}\{(\bar{r}\cdot\bar{r})\bar{a}-(\bar{r}\cdot\bar{a})\bar{r}\}+\frac{2\bar{a}}{r^3}$$

$$=\frac{-3}{r^5}r^2\bar{a}+\frac{3}{r^5}(\bar{r}\cdot\bar{a})\bar{r}+\frac{2\bar{a}}{r^3}$$

$$=\frac{3}{r^5}(\bar{r}\cdot\bar{a})\bar{r}-\frac{\bar{a}}{r^3}$$

14.8.42: $\nabla^2\frac{1}{r}=0$ అని చూపండి.

సాధన: $\nabla^2\frac{1}{r}=\sum\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\sum\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)=\sum\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\right)=\sum\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{r^3}\right)$

$$=\sum\left[-\frac{1}{r^3}-x\left(\frac{-3}{r^4}\cdot\frac{dr}{dx}\right)\right]$$

$$=\sum\left(-\frac{1}{r^3}+\frac{3x}{r^4}\,\frac{x}{r}\right)$$

$$= \frac{-3}{r^3} + \frac{3}{r^5}\sum x^2$$

$$= -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^5}\sum x^2$$

$$= \frac{-3}{r^3} + \frac{3}{r^3}$$

$$= 0$$

14.8.43: $\nabla^2 r^n = n(n+1)r^{n-2}$ అని చూపండి.

సాధన: $$\nabla^2 r^n = \sum \frac{\partial^2}{\partial x^2}(r^n) = \sum \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(r^n) = \sum \frac{\partial}{\partial x}\left(nr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial x}\right)$$

$$= \sum \frac{\partial}{\partial x}\left(nr^{n-1}\frac{x}{r}\right) = \sum \frac{\partial}{\partial x}\left(nr^{n-2}x\right)$$

$$= n\sum\left(r^{n-2} + x\cdot(n-2)x\cdot r^{n-3}\cdot\frac{x}{r}\right)$$

$$= 3nr^{n-2} + n(n-2)r^{n-4}\sum x^2$$

$$= 3nr^{n-2} + n(n-2)r^{n-4}\, r^2$$

$$= nr^{n-2}(3+n-2)$$

$$= n(n+1)r^{n-2}$$

14.8.44: $\overline{f}$ సదిశా బిందు ప్రమేయము, $\overline{a}$ స్థిర సదిశ అయితే $\nabla(\overline{a}\cdot\overline{f}) = (\overline{a}\cdot\nabla)\overline{f} + \overline{a}\times \text{curl}\,\overline{f}$ అని చూపండి.

సాధన: $$\overline{a}\times\text{curl}\,\overline{f} = \overline{a}\times\left(\overline{i}\times\frac{\partial\overline{f}}{\partial x} + \overline{j}\times\frac{\partial\overline{f}}{\partial y} + \overline{k}\times\frac{\partial\overline{f}}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\overline{a}\cdot\frac{\partial\overline{f}}{\partial x}\right)\overline{i} - (\overline{a}\cdot\overline{i})\frac{\partial\overline{f}}{\partial x} + \left(\overline{a}\cdot\frac{\partial\overline{f}}{\partial y}\right)\overline{j} - (\overline{a}\cdot\overline{j})\frac{\partial\overline{f}}{\partial y} + \left(\overline{a}\cdot\frac{\partial\overline{f}}{\partial z}\right)\overline{k} - (\overline{a}\cdot\overline{k})\frac{\partial\overline{f}}{\partial z}$$

$$= \overline{i}\,\frac{\partial}{\partial x}(\overline{a}\cdot\overline{f}) + \overline{j}\,\frac{\partial}{\partial y}(\overline{a}\cdot\overline{f}) + \overline{k}\,\frac{\partial}{\partial z}(\overline{a}\cdot\overline{f}) - \left\{(\overline{a}\cdot\overline{i})\frac{\partial\overline{f}}{\partial x} + (\overline{a}\cdot\overline{j})\frac{\partial\overline{f}}{\partial y} + (\overline{a}\cdot\overline{k})\frac{\partial\overline{f}}{\partial z}\right\}$$

$$= \sum \bar{i} \frac{\partial}{\partial x}(\bar{a} \cdot \bar{f}) - \sum (\bar{a} \cdot \bar{i}) \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}$$

$$= \text{grad}(\bar{a} \cdot \bar{f}) - (\bar{a} \cdot \nabla)\bar{f}$$

$$\therefore \text{grad}(\bar{a} \cdot \bar{f}) = \bar{a} \times \text{curl}\,\bar{f} + (\bar{a} \cdot \nabla)\bar{f}$$

14.8.45 S.A.Q.: $\nabla r^3 = 3r\bar{r}$ అని చూపండి.

14.8.46 S.A.Q.: $\bar{A}$, $\bar{B}$ లు అవకలనీయ సదిశా బిందు ప్రమేయములయితే, $(\bar{A} \times \nabla) \cdot \bar{B} = \bar{A} \cdot (\nabla \times \bar{B})$ అని చూపండి.

14.8.47 S.A.Q.: $\bar{F}$ అవకలనీయ సదిశా బిందు ప్రమేయము, $\bar{a}$ స్థిర సదిశ అయితే

$\text{div}(\bar{a} \times \bar{F}) = -\bar{a} \cdot \text{curl}\,\bar{F}$, $\text{curl}(\bar{a} \times \bar{F}) = \bar{a}\,\text{div}\,\bar{F} - (\bar{a} \cdot \nabla)\bar{F}$ అని చూపండి.

14.8.48 S.A.Q.: $\nabla(\bar{r} \cdot \bar{a}) = \bar{a}$, అని చూపండి. ($\bar{a}$ స్థిర సదిశ)

14.8.49 S.A.Q.: $\nabla \cdot (\bar{r} \times \bar{a}) = 0$ అని చూపండి. ($\bar{a}$ స్థిర సదిశ)

14.9 S.A.Q.లకు సమాధానాలు:

14.8.14 S.A.Q.: $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ అనుకొందాము. $\Rightarrow \text{div}\,\bar{r} = \sum \frac{\partial}{\partial x}(x) = \sum 1 = 3$

$$\text{curl}\,\bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \bar{i}(0-0) - \bar{j}(0-0) + \bar{k}(0-0) = \bar{0}$$

14.8.15 S.A.Q.: $\bar{f} = \frac{\bar{r}}{r^2}$ అనుకొందాము.

$$\text{curl}\,\bar{f} = \sum \bar{i} \times \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\bar{r}}{r^2}\right) = \sum \bar{i} \times \left(\frac{-2}{r^3}\frac{\partial r}{\partial x}\bar{r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial \bar{r}}{\partial x}\right)$$

$$= \sum \bar{i} \times \left(\frac{-2}{r^3}\frac{x}{r}\bar{r} + \frac{1}{r^2}\bar{i}\right)$$

$$= \left(\sum x\bar{i} \times \bar{r}\right)\left(\frac{-2}{r^4}\right) + \frac{1}{r^2}\sum \bar{i} \times \bar{i}$$

$$=(\overline{r}\times\overline{r})\left(\frac{-2}{r^4}\right)+\frac{1}{r^2}\overline{0}=\overline{0}$$

$\therefore \overline{f}$ భ్రమణ రాహిత్య సదిశ.

$\overline{g}=\frac{\overline{r}}{r^3}=\frac{x}{r^3}\overline{i}+\frac{y}{r^3}\overline{j}+\frac{z}{r^3}\overline{k}$ అనుకొందాము.

$$\operatorname{div}\overline{g}=\sum\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right)=\sum\left[\frac{1}{r^3}+x\left(-\frac{3}{r^4}\right)\frac{x}{r}\right]$$

$$=\sum\frac{1}{r^3}-\frac{3}{r^5}\sum x^2$$

$$=\frac{3}{r^3}-\frac{3}{r^5}r^2=0$$

$\therefore \overline{g}$ సాలినాయిడల్ అవుతుంది.

14.8.45 S.A.Q.: $\nabla r^3=\sum\overline{i}\frac{\partial}{\partial x}(r^3)=\sum i\,3r^2\frac{x}{r}=3r\sum x\,\overline{i}=3r\overline{r}$

14.8.46 S.A.Q.: $(\overline{A}\times\nabla)\cdot\overline{B}=\sum(\overline{A}\times\overline{i})\cdot\frac{\partial\overline{B}}{\partial x}$

$$=\sum\left(\overline{A}\cdot\overline{i}\times\frac{\partial\overline{B}}{\partial x}\right)$$ ($\because$ అదిశ త్రిక లబ్దములో $\cdot$ మరియు $\times$ లు తారుమారు చేయవచ్చు)

$$=\overline{A}\cdot\sum\overline{i}\times\frac{\partial\overline{B}}{\partial x}$$

$$=\overline{A}\cdot(\nabla\times\overline{B})$$

14.8.47 S.A.Q.: $\operatorname{div}(\overline{a}\times\overline{F})=\sum\overline{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\overline{a}\times\overline{F})=\sum\overline{i}\cdot\left(\overline{a}\times\frac{\partial\overline{F}}{\partial x}\right)$

$$=-\overline{a}\cdot\sum\overline{i}\times\frac{\partial\overline{F}}{\partial x}=-\overline{a}\cdot\operatorname{curl}\overline{F}$$

$$\operatorname{curl}(\bar{a}\times\bar{F})=\sum\bar{i}\times\frac{\partial}{\partial x}(\bar{a}\times\bar{F})=\sum\bar{i}\times\left(\bar{a}\times\frac{\partial\bar{F}}{\partial x}\right)$$

$$=\sum\left(\bar{i}\cdot\frac{\partial\bar{F}}{\partial x}\right)\bar{a}-\sum(\bar{i}\cdot\bar{a})\frac{\partial\bar{F}}{\partial x}=\bar{a}\operatorname{div}\bar{F}-(\bar{a}\cdot\nabla)\bar{F}$$

14.8.48 S.A.Q.: $\nabla(\bar{r}\cdot\bar{a})=\sum\bar{i}\frac{\partial}{\partial x}(\bar{r}\cdot\bar{a})=\sum\bar{i}\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial x}\cdot\bar{a}\right)=\sum\bar{i}(\bar{i}\cdot\bar{a})$

$$=\bar{a}\left(\text{since } \bar{a}=a_1\bar{i}+a_2\bar{j}+a_3\bar{k}\Rightarrow\bar{i}\cdot\bar{a}=a_1\right)$$

14.8.49 S.A.Q.: $\nabla\cdot(\bar{r}\times\bar{a})=\sum\bar{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\bar{r}\times\bar{a})=\sum\bar{i}\cdot\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial x}\times\bar{a}\right)$

$$=\sum\bar{i}\cdot(\bar{i}\times\bar{a})=0$$

14.10 సారాంశము:

సదిశా బిందు ప్రమేయము, వక్రములసమీకరణములు, స్పర్శరేఖలు, అభిలంబ రేఖల సమీకరణములు, స్థాయి ఉపరితలములు, దైశిక వ్యుత్పన్నాలు, ఉత్పలం, అపసరణము, అలక, సాలినాయిడల్ సదిశ, భ్రమణ రాహిత్య సదిశలు మొదలగు వాటి గురించి, వాటి ఫలితాలు, వీటికి సంబందించిన సమస్యలు చర్చించాము.

14.11 సాంకేతిక పదాలు:

ఉత్పలం, అపసరణము, అలక, సాలినాయిడల్, భ్రమణ రాహిత్య సదిశలు.

14.12 అభ్యాసము:

14.12.1 : $a=x+y+z,\ b=x^2+y^2+z^2,\ c=xy+yz+zx$ అయితే $[\nabla a,\ \nabla b,\ \nabla c]=0$ అని చూపండి.

14.12.2 : (1, 2, 0) వద్ద $\bar{i}+2\bar{j}+2\bar{k}$ దిశలో $f=xy+yz+zx$ యొక్క దైశిక వ్యుత్పన్నాన్ని కనుక్కోండి.

14.12.3 : $(1,2,0)$ వద్ద $x^2+y^2+z^2=9,\ \ x^2+y^2-z=3$ అను ఉపరితలాల మధ్య కోణాన్ని కనుక్కోండి.

14.12.4 : $(\bar{f}\times\nabla)\cdot\bar{r}=0$ అని చూపండి.

14.12.5 : $\bar{F}=x^2y\bar{i}-2xz\bar{j}+2yz\bar{k}$ అయితే (1, 1, 1) వద్ద $\operatorname{div}\bar{F}$, $\operatorname{curl}\bar{F}$ కనుక్కోండి.

14.12.6 : $\operatorname{div}\frac{\bar{r}}{r}=\frac{2}{r}$ అని చూపండి.

14.12.7 : $\phi = x^2 - y^2$ అయితే $\nabla^2\phi = 0$ అని చూపండి.

14.12.8 : $\overline{f} = \left(3x^2y - z\right)\overline{i} + \left(xz^3 + y^4\right)\overline{j} - 2x^3z^2\overline{k}$ అయితే $\text{grad}\,\text{div}\,\overline{f}$ విలువ $(2,-1,0)$ వద్ద కనుక్కోండి.

14.12.9 : $\phi = x^2 + y^2 + z^2$ అయితే $\text{curl}\,\text{grad}\,\phi$ కనుక్కోండి.

14.12.10 : $\text{grad}\ r^m = \overline{0}$ అని చూపండి.

14.12.11 : $\overline{a}$, $\overline{b}$ స్థిర సదిశలయితే $\text{div}\left((\overline{r} \times \overline{a}) \times \overline{b}\right) = -2\overline{b} \cdot \overline{a}$ అని చూపండి.

14.13 అభ్యాసమునకు సమాధానములు:

14.12.2 : $\dfrac{10}{3}$

14.12.3 : $\cos^{-1}\left(-\dfrac{3}{7\sqrt{6}}\right)$

14.12.5 : $4,\ 4\overline{i} - 3\overline{k}$

14.12.8 : $-6\overline{i} + 24\overline{j} - 32\overline{k}$

14.12.9 : $\overline{0}$

14.14 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు:

14.14.1 : $\nabla\phi,\ \nabla \cdot \overline{f},\ \nabla \times \overline{f}$ నిర్వచించండి.

14.14.2 : సాలినాయిడల్, భ్రమణ రాహిత్య సదిశలు నిర్వచించండి.

14.14.3 : $r^n\,\overline{r}$ భ్రమణ రాహిత్య సదిశ అని చూపండి.

14.14.4 : $(x+3y)\overline{i} + (y-2z)\overline{j} + (x+kz)\overline{k}$ సాలినాయిడల్ సదిశ అయితే k విలువ కనుక్కోండి.

14.14.5 : $\text{curl}\left(f(r)\,\overline{r}\right) = \overline{0}$ అని చూపండి.

14.5 సంప్రదించవలసిన పుస్తకములు:

14.15.1 : Murray R. Spiegel, Ve:tor Analysis, S:haum Publishing :ompany, New York.

14.15.2 : N. Saran and S.N. Nigam, Introdu:tion to Ve:tor Analysis, Pothisala Pvt.Ltd., Allahabad.

14.15.3 : Shanti Narayan, A Text Book of Ve:tor :al:ulus, S. :hand & :o., New Delhi.

14.15.4 : Advan:ed Engg. Mathemeti:s by Erwin Kreyszig, published by John Wiley & Sons, in:.,

పాఠ్యభాగ రచయిత

శ్రీ ఆకెళ్ళ సత్యనారాయణ మూర్తి

పాఠ్యభాగము - 15

సదిశ సమాకలనము

15.1 పాఠ్యభాగ లక్ష్యము:

ఈ పాఠ్య భాగములో సదిశా ప్రమేయము యొక్క సమాకలనము, రేఖా సమాకలనములు (ఉపరి) తల సమాకలనములు, ఘన సమాకలనముల గురించి, వాటి పై ఫలితాలు, సమస్యల గురించి చర్చిస్తాము.

15.2 పాఠ్యభాగ నిర్మాణము:

ఈ పాఠ్యభాగములో ఈ క్రింది భాగములుంటాయి.

15.3 ఉపోద్ఘాతము:

ఇంటర్మీడియట్‌లో (అదిశా) ప్రమేయముల సమాకలనము గురించి చర్చించాము. ఈ పాఠ్యభాగము సదిశా ప్రమేయముల సమాకలనము, రేఖా సమాకలనులు, (ఉపరి) తల సమాకలనులు, ఘన సమాకలనుల గురించి వాటి పై ఫలితాల గురించి, సమస్యల గురించి చర్చిస్తాము.

15.4 సదిశా ప్రమేయముల సమాకలనము:

15.4.1 నిర్వచనము: $\bar{f}$, $\bar{F}$లు t అనే (వాస్తవ) చలరాశిలో నిరక్ష్వచించబడిన సదిశా ప్రమేయములు. $\bar{c}$ స్థిర సదిశ. $\frac{d}{dt}(\bar{F}(t)+\bar{c})=\bar{f}(t)$ అయితే $\bar{F}(t)+\bar{c}$ ను $\bar{f}(t)$ యొక్క అనిశ్చిత సమాకలని అంటాము. దీన్ని $\int \bar{f}(t)dt=\bar{F}(t)+\bar{c}$. అని వ్రాస్తాము. $\bar{c}$ ను సమాకలన స్థిర సదిశ అంటాము.

15.4.2 గమనిక: $\bar{f}(t)=f_1(t)\bar{i}+f_2(t)\bar{j}+f_3(t)\bar{k}$ అయితే $\int \bar{f}(t)dt=\bar{i}\int f_1(t)dt+\bar{j}\int f_2(t)dt+\bar{k}\int f_3(t)dt$ అవుతుంది.

15.4.3 నిర్వచనము: $\bar{f}(t)$ $[a,b]$ పై నిర్వచించబడిన సదిశా ప్రమేయము $\int \bar{f}(t)dt=\bar{F}(t)+\bar{c}$ అయితే $\bar{F}(b)-\bar{F}(a)$ను $[a,b]$ పై $\bar{f}(t)$ యొక్క నిశ్చిత సమాకలని అంటాము. దీన్ని $\int_a^b \bar{f}(t)dt=\bar{F}(b)-\bar{F}(a)$ అని వ్రాస్తాము. aను దిగువ అవధి అని, bను ఎగువ అవధి అని అంటాము.

15.4.4 గమనిక: $\int \bar{f}(t)dt=\bar{F}(t)+\bar{c} \Rightarrow \int_a^b \bar{f}(t)dt=\bar{F}(b)-\bar{F}(a)$

15.4.5 గమనిక: $\bar{f}(t)=f_1(t)\bar{i}+f_2(t)\bar{j}+f_3(t)\bar{k}$ అయితే $\int_a^b \bar{f}(t)dt=\bar{i}\int_a^b f_1(t)dt+\bar{j}\int_a^b f_2(t)dt+\bar{k}\int_a^b f_3(t)dt$

15.4.6 గమనిక: $\int(\bar{f}+\bar{g})(t)dt=\int \bar{f}(t)dt+\int \bar{g}(t)dt$ మరియు $\int k\bar{f}(t)dt=k\int \bar{f}(t)dt$ $(k \in \mathsf{R})$

15.4.7 సిద్ధాంతము: $\bar{f}$, $\bar{g}$ సదిశా ప్రమేయములయితే,

$$\int\left(\frac{d\bar{f}}{dt}\cdot\bar{g}+\bar{f}\cdot\frac{d\bar{g}}{dt}\right)dt=\bar{f}\cdot\bar{g}+c$$

ఉపపత్తి: $\frac{d}{dt}(\bar{f}\cdot\bar{g}+c)=\frac{d\bar{f}}{dt}\cdot\bar{g}+\bar{f}\frac{d\bar{g}}{dt} \Rightarrow \int\left(\frac{d\bar{f}}{dt}\cdot\bar{g}+\bar{f}\cdot\frac{d\bar{g}}{dt}\right)dt=\bar{f}\cdot\bar{g}+c$

15.4.8 ఉప సిద్ధాంతము: $\bar{f}$ సదిశా ప్రమేయమయితే $\int 2\bar{f}\cdot\frac{d\bar{f}}{dt}dt=\bar{f}^2+c$

ఉపపత్తి: సిద్ధాంతము 15.4.7లో $\bar{g}$కు బదులు $\bar{f}$ తీసుకుంటే వస్తుంది.

15.4.9: ఉప సిద్ధాంతము: $\bar{f}$ సదిశా ప్రమేయమయితే,

$$\int 2\frac{d\bar{f}}{dt}\cdot\frac{d^2\bar{f}}{dt^2}dt = \left(\frac{d\bar{f}}{dt}\right)^2 + c$$

ఉపపత్తి: సిద్ధాంతము 15.4.8లో $\bar{f}$ బదులు $\dfrac{d\bar{f}}{dt}$ తీసుకుంటే వస్తుంది.

15.4.10 సిద్ధాంతము: $\bar{f}$, $\bar{g}$ లు సదిశా ప్రమేయములయితే

$$\int\left(\frac{d\bar{f}}{dt}\times\bar{g}+\bar{f}\times\frac{d\bar{g}}{dt}\right)dt = \bar{f}\times g+\bar{c}$$

ఉపపత్తి: $\dfrac{d}{dt}\left(\bar{f}\times\bar{g}+\bar{c}\right)=\dfrac{d\bar{f}}{dt}\times\bar{g}+\bar{f}\times\dfrac{d\bar{g}}{dt}$

$$\Rightarrow \int\left(\frac{d\bar{f}}{dt}\times\bar{g}+\bar{f}\times\frac{d\bar{g}}{dt}\right)dt = \bar{f}\times\bar{g}+\bar{c}$$

15.4.11 ఉప సిద్ధాంతము: $\bar{a}$ స్థిర సదిశ, $\bar{f}$ సదిశా ప్రమేయమయితే

$$\int\left(\bar{a}\times\frac{d\bar{f}}{dt}\right)dt = \bar{a}\times\bar{f}+\bar{c}$$

ఉపపత్తి: $\dfrac{d}{dt}\left(\bar{a}\times\bar{f}+\bar{c}\right)=\bar{a}\times\dfrac{d\bar{f}}{dt}+\dfrac{d\bar{a}}{dt}\times\bar{f}+\bar{0}$

$$=\bar{a}\times\frac{d\bar{f}}{dt}$$

$$\Rightarrow \int\left(\bar{a}\times\frac{d\bar{f}}{dt}\right)dt = \bar{a}\times\bar{f}+\bar{c}$$

15.4.12 ఉప సిద్ధాంతము: $\bar{f}$ సదిశా ప్రమేయమయితే

$$\int\bar{f}\times\frac{d^2\bar{f}}{dt^2}dt = \bar{f}\times\frac{d\bar{f}}{dt}+\bar{c}$$

ఉపపత్తి: $\dfrac{d}{dt}\left(\bar{f}\times\dfrac{d\bar{f}}{dt}+\bar{c}\right)=\dfrac{d\bar{f}}{dt}\times\dfrac{d\bar{f}}{dt}+\bar{f}\times\dfrac{d^2\bar{f}}{dt^2}+\bar{0}$

$$= \overline{0} + \overline{f} \times \frac{d^2\overline{f}}{dt^2} + \overline{0} = \overline{f} \times \frac{d^2\overline{f}}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \int \left(\overline{f} \times \frac{d^2\overline{f}}{dt^2} \right) dt = \overline{f} \times \frac{d\overline{f}}{dt} + \overline{c}$$

సాధించిన సమస్యలు:

15.4.13: $\overline{f}(t) = t\overline{i} + (t^2 - 2t)\overline{j} + (3t^2 + 3t^3)\overline{k}$ అయితే $\int_0^1 \overline{f}(t)dt$ కనుక్కోండి.

సాధన: $\int_0^1 \overline{f}(t)dt = \overline{i}\int_0^1 tdt + \overline{j}\int_0^1 (t^2 - 2t)dt + \overline{k}\int_0^1 (3t^2 + 3t^3)dt$

$$= \overline{i}\left(\frac{t^2}{2}\right)_0^1 + \overline{j}\left(\frac{t^3}{3} - t^2\right)_0^1 + \overline{k}\left(t^3 + \frac{3}{4}t^4\right)_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\overline{i} - \frac{2}{3}\overline{j} + \frac{7}{4}\overline{k}$$

15.4.14: $\overline{f} = t\overline{i} - t^2\overline{j} + (t-1)\overline{k}$, $\overline{g} = 2t^2\overline{i} + 6t\overline{k}$ అయితే $\int_0^2 (\overline{f} \cdot \overline{g})dt, \int_0^2 (\overline{f} \times \overline{g})dt$ కనుక్కోండి.

సాధన: $\overline{f} \cdot \overline{g} = 2t^3 + 6t^2 - 6t$

$$\therefore \int_0^2 (\overline{f} \cdot \overline{g})dt = \int_0^2 (2t^3 + 6t^2 - 6t)dt = \left(\frac{t^4}{2} + 2t^3 - 3t^2\right)_0^2$$

$$= 8 + 16 - 12 = 12$$

$$\overline{f} \times \overline{g} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ t & -t^2 & t-1 \\ 2t^2 & 0 & 6t \end{vmatrix} = \overline{i}(-6t^3) - j(6t^2 - 2t^3 + 2t^2) + \overline{k}(+2t^4)$$

$$= -6t^3\overline{i} + (2t^3 - 8t^2)\overline{j} + 2t^4\overline{k}$$

$$\int_0^2 \bar{f}\times\bar{g}dt = -\bar{i}\int_0^2 6t^3dt + \bar{j}\int_0^2\left(2t^3-8t^2\right)dt + \bar{k}\int_0^2 2t^4dt$$

$$= -\bar{i}\left(\frac{3t^4}{2}\right)_0^2 + \bar{j}\left(\frac{t^4}{2}-\frac{8}{3}t^3\right)_0^2 + \bar{k}\left(\frac{2t^5}{5}\right)_0^2$$

$$= -24\bar{i} - \frac{40}{3}\bar{j} + \frac{64}{5}\bar{k}$$

15.4.15: $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -k^2\bar{r}$ అయితే $\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)^2 = -k^2\bar{r}^2 + c$ అని చూపండి.

సాధన: దత్తాంశం ప్రకారము $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -k^2\bar{r}$

$$\Rightarrow 2\frac{d\bar{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -k^2 2\bar{r}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt}$$

$$\therefore \int\left(2\frac{d\bar{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right)dt = -k^2\int 2\bar{r}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt}dt$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)^2 = -k^2\bar{r}^2 + c \quad \left(\because \frac{d}{dt}\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)^2 = 2\frac{d\bar{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right)$$

15.4.16: $\bar{f}(t) = 5t^2\bar{i} + t\bar{j} - t^3\bar{k}$ అయితే $\int_1^2\left(\bar{f}\times\frac{d^2\bar{f}}{dt^2}\right)dt$ కనుక్కోండి.

సాధన: $\frac{d\bar{f}}{dt} = 10t\bar{i} + \bar{j} - 3t^2\bar{k}$

$$\frac{d^2\bar{f}}{dt^2} = 10\bar{i} - 6t\bar{k}$$

$$\overline{f}\times\frac{d^2\overline{f}}{dt^2}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ t^2 & t & -t^3\\ 10 & 0 & -6t\end{vmatrix}=-6t^2\overline{i}+20t^3\overline{j}-10t\overline{k}$$

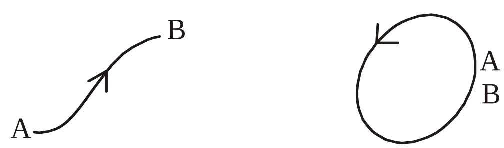
$$\therefore \int_1^2 \overline{f}\times\frac{d^2\overline{f}}{dt^2}\,dt=-\overline{i}\int_1^2 6t^2dt+\overline{j}\int_1^2 20t^3dt-\overline{k}\int_1^2 10t\,dt$$

$$=-2\overline{i}\left(t^3\right)_1^2+\overline{j}\left(5t^4\right)_1^2-\overline{k}\left(5t^2\right)_1^2$$

$$=-14\overline{i}+75\overline{j}-15\overline{k}$$

15.5 రేఖా సమాకలని:

15.5.1 నిర్వచనము: A తొలి బిందువు, B తుది బిందువు గల వక్రము C అనుకొనుము. C యొక్క దిశ A నుంచి Bకు ధనాత్మకముగా భావిస్తే B నుంచి Aకు ఋణాత్మకముగా భావిస్తాము. A, Bలు ఏకీభవిస్తే, Cను సంవృత వక్రము అంటాము.



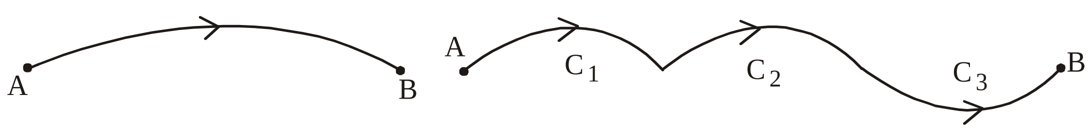
15.5.2 నిర్వచనము: C అను వక్రానికి $\overline{r}=\overline{f}(t)$, $a \le t \le b$ సమీకరణము అనుకోండి. ప్రతి t వద్ద $\overline{f}(t)$

(i) అవకలనీయము

(ii) $\overline{f}'(t) \neq \overline{0}$

(iii) $\overline{f}'(t)$ అవిచ్ఛిన్నమయితే Cను మృదు వక్రమని అంటాము.

15.5.3 నిర్వచనము: ఒక వక్రము Cలో పరిమిత సంఖ్యలో మృదు వక్ర భాగాలుంటే Cను ఖండిత మృదు వక్రము అంటాము.



15.5.4 **“sǫ# ɋeπ:** ఒక వక్రము పై సమాకలని విలువ కనుగొంటే, దాన్ని రేకా సమాకలని అంటాం.

$\overline{r}=\overline{f}(t)=x(t)\overline{i}+y(t)\overline{j}+z(t)\overline{k}$ అనేది A, B లను కలుపు C అను మృదు వక్రం అనుకొందాము. $d\overline{r}$ అనగా $\dfrac{d\overline{r}}{dt}dt=\left(\dfrac{d\overline{x}}{dt}\overline{i}+\dfrac{dy}{dt}\overline{j}+\dfrac{d^2\overline{k}}{dt}\right)dt$. దీన్ని $dx\overline{i}+dy\overline{j}+dz\overline{k}$ అని కూడా వ్రాస్తాం. C పై A అను స్థిర బిందువు నుంచి P అను బిందువు చాప దూరం s అయితే $\dfrac{d\overline{r}}{ds}=\overline{T}$ అనేది వక్రానికి $\overline{r}$ అను బిందువు వద్ద యూనిట్ స్పర్శ సదిశ. $\overline{r}$ వద్ద స్పర్శరేఖ $\overline{T}$ పై ఉంటుంది. C పై $\overline{F}(\overline{r})$ అవిచ్ఛిన్న సదిశా ప్రమేయము. స్పర్శరేఖ పై $\overline{F}$ యొక్క అంశం $\overline{F}\cdot\dfrac{d\overline{r}}{ds}$. C పై A నుంచి B కు $\overline{F}\cdot\dfrac{d\overline{r}}{ds}$ యొక్క సమాకలనిని $\int_A^B \overline{F}\cdot\dfrac{d\overline{r}}{ds}ds=\int_A^B \overline{F}\cdot d\overline{r}$ అని వ్రాస్తాము.

దీన్ని A నుంచి B కు C పై $\overline{F}$ యొక్క రేఖా సమాకలని అంటాము.

15.5.5 **నిర్వచనము:** C అనేది సరళ వక్రము అనుకొనుము (C అను వక్రం C ను ఖండించదు) $\oint_C \overline{F}\cdot d\overline{r}$ ను C పై $\overline{F}$ యొక్క సర్క్యులేషన్ (circulation) అంటాము.

15.5.6 **కార్టీజియన్ రూపము:** $\overline{F}=F_1\overline{i}+F_2\overline{j}+F_3\overline{k}$ అయితే

$$\overline{F}\cdot d\overline{r}=F_1dx+F_2dy+F_3dz$$

$$\int_C \overline{F}\cdot d\overline{r}=\int_C F_1dx+F_2dy+F_3dz$$

C యొక్క పరామితీయ సమీకరణాలు $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$, A వద్ద $t=t_1$, B వద్ద $t=t_2$ అయితే

$$\int_C \overline{F}\cdot d\overline{r}=\int_{t_1}^{t_2}\left(F_1\frac{dx}{dt}+F_2\frac{dy}{dt}+F_3\frac{dz}{dt}\right)dt$$

15.5.7 **బలముతో చేయబడిన పని:** ఒక కణము పై $\overline{F}$ అను బలము ప్రయోగించబడినదనుకొందాము. దీని వల్ల కణము C అను వక్రము పై స్థానభ్రంశము చెందినదనుకొందాము. C పై ఒక బిందువు స్థాన సదిశ అయితే $\dfrac{d\overline{r}}{ds}$ అనేది C పై $\overline{r}$ అను బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ పై s యొక్క ఆరోహరణ దిశలో యూనిట్ సదిశ. ఈ స్పర్శరేఖ పై $\overline{F}$ యొక్క అంశము $\overline{F}\cdot\dfrac{d\overline{r}}{ds}$, C పై ds అను స్థానభ్రంశము కలుగుటకు $\overline{F}$ చేయు పని $\overline{F}\cdot\dfrac{d\overline{r}}{ds}\,ds$ అనగా $\overline{F}\cdot d\overline{r}$ C పై స్థానభ్రంశానికి $\overline{F}$ చేయు మొత్తం పని $=\int_C \overline{F}\cdot d\overline{r}$.

సాధించిన సమస్యలు:

15.5.8 : $\bar{F} = xy\bar{i} + yz\bar{j} + zx\bar{k}$; C అను వక్రము $\bar{r} = t\bar{i} + t^2\bar{j} + t^3\bar{k};\ -1 \le t \le 1$ అయితే $\int_c \bar{F}\cdot d\bar{r}$ విలువ కనుక్కోండి.

సాధన: దత్తాంశం ప్రకారం $\bar{r} = t\,\bar{i} + t^2 j + t^3\bar{k},\ \Rightarrow x = t,\ y = t^2, z = t^3$

$$\Rightarrow \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{i} + 2t\bar{j} + 3t^2\bar{k}$$

$$\bar{F} = xy\,\bar{i} + yz\bar{j} + zx\bar{k} = t^3\bar{x} + t^5\bar{j} + t^4\bar{k}$$

$$\bar{F}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt} = t^3 + 2t^6 + 3t^6 = t^3 + 5t^6$$

$$\therefore \int_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_C \bar{F}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt}dt = \int_{-1}^{1}\left(t^3 + 5t^6\right)dt = \left(\frac{t^4}{4} + \frac{5}{7}t^7\right)_{-1} = \frac{10}{7}$$

15.5.9: C అనేది $y^2 = 4ax$ అను పరావలయము పై (0, 0) నుంచి $(a, 2a)$ వరకూ ఉన్న వక్రము అయితే $\int_C\left(x^2 + y^2\right)dx$ విలువ కనుక్కోండి.

సాధన: $$\int_C\left(x^2 + y^2\right)dx = \int_0^{2a}\left(x^2 + 4ax\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2ax^2\right)_0^{2a} = \frac{a^3}{3} + 2a^3 = \frac{7a^3}{3}$$

15.5.10: $\bar{F} = 3xy\bar{i} - 5z\bar{j} + 10x\bar{k}$, C అనేది $x = t^2 + 1,\ y = 2t^2,\ z = t^3$ అను వక్రము పై $t = 1$ నుంచి $t = 2$ ఉన్న భాగమయితే $\int_C \bar{F}\cdot d\bar{r}$ విలువ కనుక్కోండి.

సాధన: $\bar{F} = 3xy\bar{i} - 5z\bar{j} + 10x\bar{k}$,

$$= 3\left(t^2 + 1\right)2t^2\bar{i} - 5t^3\bar{j} + 10\left(t^2 + 1\right)\bar{k}$$

$$= \left(6t^4 + 6t^2\right)\bar{i} - 5t^3\bar{j} + 10\left(t^2 + 1\right)\bar{k}$$

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = \left(t^2 + 1\right)\bar{i} + 2t^2\bar{j} + t^3\bar{k}$$

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = 2t\,\bar{i} + 4t\bar{j} + 3t^2\bar{k}$$

$$\overline{F}\cdot\frac{d\overline{r}}{dt}=6t^2\left(t^2+1\right)2t-5t^3\cdot 4t+10\left(t^2+1\right)3t^2$$

$$=12t^5+12t^3-20t^4+30t^4+30t^2$$

$$=12t^4+12t^3+10t^4+30t^2$$

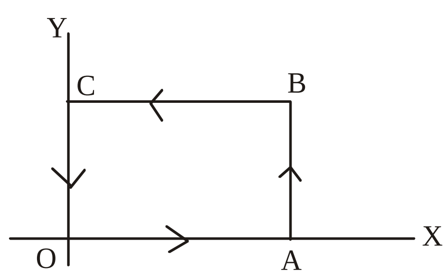
$$\therefore \int_C \overline{F}\cdot d\overline{r}=\int_1^2\left(\overline{F}\cdot\frac{d\overline{r}}{dt}\right)dt=\int_1^2\left(12t^5+10t^4+12t^3+30t^2\right)dt$$

$$=\left(2t^6+2t^5+3t^4+10z^3\right)_1^2=128+64+48+80-17=303$$

15.5.11: $\overline{F}=\left(x^2+y^2\right)\overline{i}-2xy\overline{j}$, C అనేది $XY-$ తలములో $y=0, x=a, y=b, x=0$ లతో పరిబద్ధమైన చతురస్రమయితే $\oint_C \overline{F}.d\overline{r}$ విలువ కనుక్కోండి.

సాధన: C, XY తలంలో ఉన్నది కాబట్టి $\oint_C \overline{F}.d\overline{r}=\oint_C F_1dx+F_2dy$

$$=\oint_C\left(x^2+y^2\right)dx-2xydy$$



(i) OA మీదుగా: $y=0, dy=0$; x విలువ 0 నుంచి a కు మారుతుంది.

$$\therefore \oint_{OA}\overline{F}\cdot d\overline{r}=\int_0^a x^2dx=\frac{a^3}{3}$$

(ii) AB మీదుగా: $x = a, dx = 0, y$ విలువ 0 నుంచి bకు మారుతుంది.

$$\therefore \oint_{AB} \bar{F}\cdot d\bar{r} = -\int_0^b 2ay\,dy = -a\left(y^2\right)_0^b = -ab^2$$

(iii) BC మీదుగా: $y = b, dy = 0$; x విలువ a నుంచి 0కు మారుతుంది.

$$\oint_{BC} \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_a^0 \left(x^2 + b^2\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} + b^2 x\right)_a^0 = \frac{-a^3}{3} - ab^2$$

(iv) CO మీదుగా: $x = 0, dx = 0$; y b నుంచి 0కు మారుతుంది.

$$\oint_{CO} \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_b^0 0\,dx + 0dy = 0$$

$$\therefore \oint_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = \frac{a^3}{3} - ab^2 - \frac{a^3}{3} - ab^2 = -2ab^2$$

15.5.12 : $\bar{F} = y\bar{i} + z\bar{j} + x\bar{k},\ x^2 + y^2 = 1,\ z = 0$ అను వృత్తము C పై $\int_c \bar{F}\cdot d\bar{r}$ విలువను కనుక్కోండి.

సాధన: C సమీకరణములు $x^2 + y^2 = 1, z = 0$

C యొక్క పరామితీయ సమీకరణములు $x = \cos\theta,\ y = \sin\theta,\ z = 0,\ 0 \le \theta \le 2\pi$

$$\therefore \oint_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = \oint_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \oint_C y dx + z dy = \int_C y dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin\theta(-\sin\theta)d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = -2\int_0^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta = -4\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\, d\theta$$

$$= -4\cdot\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = -\pi$$

15.6 (ఉపరి) తల సమాకలని:

15.6.1 నిర్వచనము: $\phi : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}$, $S = \left\{(x, y, z) \in \mathrm{R}^3 / \phi(x, y, z) = 0\right\}$ అను సమితిని (స్థాయి) (ఉపరి) తలము అంటాము. $\phi(x, y, z) = 0$ ను తల సమీకరణము అంటాము. ఇంకా $\left\{(x, y, z)/\phi(x, y, z) \le 0\right\}$ పరిబద్ధమైతే S ను సంవృత ఉపరి తలము అంటాము.

15.6.2 నిర్వచనము: ప్రథమ పరిమాణ అవిచ్ఛిన్న పాక్షిక అవకలజాలు ϕ కు ఉంటే $\phi(x, y, z) = 0$ ను మృదు తలము అంటాము. S ను పరిమిత సంఖ్యలో మృదు తలాలుగా విభజించగలిగితే S ను ఖండిత మృదు తలము అంటాము.

ఒక ఉపరితలము పై సమాకలని విలువను కనుగొనగలిగితే, ఆ సమాకలనిని తల సమాకలని అంటాము.

S అను మృదు తలము పై నిర్వచించబడిన అవిచ్ఛిన్న సదిశా ప్రమేయము $\overline{F}$ అనుకొందాము.

S ను $S_1, S_2, \cdots, S_n$ వైశాల్యముగా గల $\delta S_1, \delta S_2, \cdots, \delta S_n$ అను ఉపరి తలాలుగా విభజిద్దాము. S_i పై P_i ఒక బిందువు. P_i వద్ద S_i కు $\overline{N}_i$ అనేది యూనిట్ లంబ సదిశ అంటే $\delta S_i \overline{N}_i$ ను $\delta \overline{A}_i$ తో సూచిద్దాము. $I_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}(P_i) \cdot \overline{N}_i \delta S_i$ అయితే $\underset{n \to \infty}{\mathrm{Lt}}\, I_n$ వ్యవస్థితమైతే ఈ అవధిని S పై $\overline{F}$ యొక్క అభిలంబ తల సమాకలని అంటాము. దీన్ని $\int_S \overline{F} \cdot d\overline{A}$ లేక $\int_S \overline{F} \cdot \overline{N}\, dS$ అని సూచిస్తాము.

15.6.3 నిర్వచనము: S సంవృత తలము అనుకొందాము. $\int_S \overline{F} \cdot \overline{N}\, dS$ లేక $\int_S \overline{F} \cdot d\overline{A}$ ను S పై $\overline{F}$ యొక్క అభివాహము (Flux) అంటాము.

15.6.4 కార్టీజియన్ రూపము: S అను (ఉపరి) తలము పై P వద్ద బాహ్యముగా గీసిన యూనిట్ అభిలంబ సదిశ $\overline{N}$ అక్షాల ధనాత్మక దిశలతో α, β, γ కోణాలు చేయుననుకొందాము. $\overline{N}$ కు దిక్ కొసైన్‌లు ℓ, m, n లు అయితే $\overline{N} = \ell \overline{i} + m\overline{j} + n\overline{k}$. $\overline{F} = F_1 \overline{i} + F_2 \overline{j} + F_3 \overline{k}$, అయితే $\overline{F} \cdot \overline{N} = F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta + F_3 \cos\gamma$.

$$\therefore \int_S \overline{F} \cdot \overline{N}\, dS = \int_S (F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta + F_3 \cos\gamma)\, ds$$

15.6.5 నిర్వచనము (ఒక తలము పై S యొక్క విక్షేపము): S ఒక ఉపరితలము. π ఒక తలము అనుకొందాము. π పై ప్రతి బిందువు P నుంచి π కు లంబము గీస్తే P యొక్క లంబ పాదము P_1 అనుకొంటే, $\{P_1 / \exists P \in S \ni PP_1 \perp S\}$ ను π పై S యొక్క విక్షేపము అంటాము.

15.6.6 గమనిక: YZ తలము పై dS యొక్క విక్షేపము $dS\cos\alpha = dy\,dz\,(\because dy, dz$ లు Y, Z అక్షాల పై అవకలనములు)

$$\therefore \int_S \bar{F}\cdot\bar{N}\,dS = \int\int_S F_1 dy\,dz + F_2 d_2 dx + F_3 dx\,dy$$

15.6.7 గమనిక: R_1 అనేది YZ తలము పై S యొక్క విక్షేపమయితే

$$\int_S \bar{F}\cdot\bar{N}\,dS = \int\int_{R_1} \bar{F}\cdot\bar{N}\frac{dx\,dy}{\cos\gamma} = \int\int_{R_1} \bar{F}\cdot\bar{N}\frac{dx\ dy}{|\bar{N}\cdot\bar{k}|}$$

ఇదే విధముగా $\int_S \bar{F}\cdot\bar{N}\,dS = \int\int_{R_2} \bar{F}\cdot\bar{N}\frac{dy\,dz}{|\bar{N}\cdot\bar{i}|}$ మరియు $\int_S \bar{F}\cdot\bar{N}\,ds = \int\int_{R_3} \bar{F}\cdot\bar{N}\frac{dz\,dx}{|\bar{N}\cdot\bar{j}|}$

R_2, R_3 లు YZ, ZX తలముల పై S యొక్క విక్షేపములు.

15.6.8: $\bar{F} = (x^2 + y^2)\bar{i} - 2x\bar{j} + 2yz\bar{k}$ అయితే $\int_S \bar{F}\cdot\bar{N}\,ds$ విలువను ప్రథమాష్టమములో $2x + y + 2z = 6$ యొక్క ఉపరి తలము S పై కనుక్కోండి.

సాధన: $\phi = 2x + y + 2z - 6$ అనుకొందాము. $\therefore \nabla\phi = 2\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$ అనేది ఉపరితలానికి అభిలంబంగా ఉంటుంది.

$$\therefore \text{ యూనిట్ లంబము } \bar{N} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = \frac{2\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}}{3}$$

XY తలములో S యొక్క విక్షేపము R అనుకొందాము.

$\therefore\ 2x + y = 6, z = 0$ $X-$ అక్షము, $Y-$ అక్షములతో R ప్రపిబద్ధమవుతుంది.

$$\bar{F}\cdot\bar{N} = (x + y^2)\frac{2}{3} - 2x\frac{1}{3} + 2yz\frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\left[2x + 2y^2 - 2x + 4yz\right] = \frac{2}{3}\left(y^2 + 2yz\right)$$

$$\bar{N}\cdot\bar{k} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \int_S \overline{F}\cdot\overline{N}\,ds = \iint_S \overline{F}\cdot\overline{N}\frac{dx\,dy}{|\overline{N}\cdot\overline{k}|} = \iint_R \frac{2}{3}\left(y^2+2yz\right)\frac{dx\,dy}{2/3}$$

$$= \iint_R \left(y^2+2yz\right)dxdy = \int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{6-2x}\left[y^2+y\left(6-y-2x\right)\right]dxdy$$

$$= 2\int_0^3\int_{y=0}^{6-2x} y(3-x)\,dy\,dx = 2\int_0^3 (3-x)\left(\frac{y^2}{2}\right)_{y=0}^{6-2x} dx$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^3 (3-x)(6-2x)^2\,dx = 4\int_0^3 (3-x)^3\,dx$$

$$= -\left[(3-x)^4\right]_0^3 = -\left[0-3^4\right] = 81$$

15.6.9: $\overline{F} = yz\overline{i} + zx\overline{j} + xy\overline{k}$, S అనేది ప్రథమాష్టమములో $x^2+y^2+z^2=1$ అను గోళ భాగము అయితే, $\int_S \overline{F}\cdot\overline{N}ds$ విలువను కనుగొనుము.

సాధన: $\phi = x^2+y^2+z^2-1$ అనుకొందాము.

$$\therefore \nabla\phi = 2x\overline{i} + 2y\overline{j} + 2z\overline{k}$$

$\overline{N} = S$కు యూనిట్ అభిలంబ సదిశ $= \dfrac{2x\overline{i}+2y\overline{j}+2z\overline{k}}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$

$$\overline{F}\cdot\overline{N} = xyz+xyz+xyz = 3xyz$$

YZ తలములో S యొక్క విక్షేపము R అనుకొందాము.

$$\iint_S \bar{F}\cdot\bar{N}\,ds = \iint_R \bar{F}\cdot\bar{N}\frac{dy\,dz}{|\bar{N}\cdot\bar{i}|} = \iint_R 3xyz\frac{dydz}{x}$$

$$= 3\int_{z=0}^{1}\int_{y=0}^{\sqrt{1-z^2}} yz\,dy\,dz = 3\int_{z=0}^{1}\left(\frac{y^2}{2}\right)_0^{\sqrt{1-z^2}} z\,dz$$

$$= \frac{3}{2}\int_{z=0}^{1}\left(1-z^2\right)z\,dz = \frac{3}{2}\left(\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{4}\right)_0^1 = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right) = 3/8$$

15.7 ఘన సమాకలని:

15.7.1 నిర్వచనము (ఘన సమాకలని): S అను ఉపరి తలముతో పరిబద్ధమగు ప్రదేశమును V అనుకోండి. f అనేది V పై నిర్వచించబడిన అదిస ప్రమేయము అనుకోండి. V ను $V_1, V_2, \cdots, V_n$ అను భాగములుగా విభజించి, $V_1, \ldots\ldots\ldots, V_n$ ల ఘన పరిమాణములు $\delta V_1, \delta V_2, \cdots, \delta V_n$ అనుకొందాము. $\underset{n\to\infty}{Lt}\sum_{r=1}^{n} f(P_r)\delta V_r$ అను అవధి వ్యవస్థితమైతే, ఈ అవధిని V పై f యొక్క ఘన సమాకలని అంటాము. దీన్ని $\int_V f\,dv$ తో సూచిస్తాము. అక్షాలకు సమాంతరంగా రేఖలు గీసి V ను చిన్న చిన్న ఘనములుగా విభజిస్తే

$$dv = dx\,dy\,dz \Rightarrow \int_V f\,dv = \iiint_V f\,dx\,dy\,dz.$$

$\bar{F}$ సదిశ ప్రమేయమయితే $\int_V \bar{F}dv$ ను పై విధముగా నిర్వచించవచ్చు.

సాధించిన సమస్యలు:

15.7.2: $\bar{F} = \left(2x^2 - 3z\right)\bar{i} - 2xy\bar{j} - 4x\bar{k}$ అయితే $\iiint_V \nabla\cdot\bar{F}dv$, $\iiint_V \nabla\times\bar{F}dV$ విలువలను $x=0, y=0, z=0$, $2x+2y+z=4$ అను తలాలతో పరిబద్ధమైన ప్రదేశము V పై కనుక్కోండి.

సాధన: $\nabla\cdot\overline{F}=\frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2-32\right)+\frac{\partial}{\partial y}(-2xy)+\frac{\partial}{\partial z}(-4x)=4x-2x=2x$

$$\therefore \iiint_V \nabla\cdot\overline{F}\,dv=\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{2-x}\int_{z=0}^{4-2x-2y}2x\,dz\,dy\,dx=\int_{x=0}^{z}\int_{y=0}^{z-x}2x\,(z)_0^{4-2x-2y}\,dydx$$

$$=\int_{x=0}^{2}\left[4x\left(2-x^2\right)-2x(2-x)^2\right]dx=\int_0^2 2x\left(4+x^2-4x\right)dx$$

$$=\left(4x^2+\frac{x^4}{2}-\frac{8}{3}x^3\right)_0^2=16+8-\frac{64}{3}=\frac{8}{3}$$

$$\nabla\times\overline{F}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2x^2-3z & -2xy & -4x\end{vmatrix}=\overline{i}\,(0-0)-\overline{j}\,(-4+3)+\overline{k}\left(-2y\right)$$

$$=\overline{j}-2y\overline{k}$$

$$\iiint_V \nabla\times\overline{F}\,dv=\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{2-x}\int_{z=0}^{4-2x-2y}\left(\overline{j}-2y\overline{k}\right)dz\,dy\,dx$$

$$=\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{2-x}\left(\overline{j}-2y\overline{k}\right)\left(4-2x-2y\right)dy\,dx$$

$$=\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{2-x}\left(\overline{j}-2y\overline{k}\right)\left(4-2x-2y\right)dy\,dx$$

$$= \int_0^2 \left[\left(4y - 2xy - y^2\right)\bar{j} - \left(4y^2 - 2xy^2 - \frac{4}{3}y^3\right)\bar{k} \right]_{y=0}^{2-x} dx$$

$$= \int_0^2 \left[(2-x)^2\,\bar{j} - \frac{2}{3}(2-x)^3\,\bar{k} \right] dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}(2-x)^3\,\bar{j} - \frac{2}{3}\frac{(2-x)^4}{-4}\bar{k} \right]_0^2$$

$$= 0 - \left[\frac{-8}{3}\bar{j} + \frac{8}{3}\bar{k} \right] = \frac{8}{3}\left(\bar{j} - \bar{k}\right)$$

15.7.3: $\bar{F} = 2xz\,\bar{i} - x\bar{j} + y^2\bar{k}$ అయితే $x = 0,\ y = 0, y - 6,\ z = x^2,\ z = 4$ లతో పరిబద్ధమైన ప్రదేశము V పై $\int_v \bar{F}dv$ విలువను కనుక్కోండి.

సాధన: $$\int_v \bar{F}\,dv = \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{6} \int_{z=x^2}^{4} \left(2xz\,\bar{i} - x\bar{j} + y^2\bar{k}\right) dz\,dy\,dx$$

$$= \bar{i} \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{6} \left[xz^2\right]_{z=x^2}^{4} dy\,dx - \bar{j} \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{6} x\,(z)_{x^2}^{4}\,dy\,dx + \bar{k} \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{6} y^2\,[z]_{x^2}^{4}\,dy\,dx$$

$$= \bar{i}\int_0^2 x\left(16 - x^4\right)dy\,dx - \bar{j} \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{6} x\left(4 - x^2\right)dydx + \bar{k} \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{6} y^2\left(4 - x^2\right)dy\,dx$$

$$= \bar{i}\int_0^2 x\left(16-x^4\right)6dx - \bar{j}\int_0^2 x\left(4-x^2\right)6dx + \bar{k}\int_0^2 \left(4-x^2\right)\left(\frac{y^3}{3}\right)_0^6 dx$$

$$= \bar{i}\left(48x^2 - x^6\right)_0^2 - \bar{j}\left(12x^2 - \frac{3}{2}x^4\right)_0^2 + \bar{k}72\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)_0^2$$

$$= 128\bar{i} - 24\bar{j} + 384\bar{k}$$

15.7.4 SAQ: $\bar{F} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ అయితే $x=0, y=0, y=6, z=4, z=x^2$ లతో ఏర్పడిన ప్రదేశము V పై $\int_V \bar{F}dV$ విలువను కనుక్కోండి.

15.7.5 SAQ: $x = at^2$, $y = 2at, 0 \le t \le 2$ అను వక్రము మీదుగా $\int_C \frac{dx}{x+y}$ విలువను కనుక్కోండి.

15.7.6 SAQ: $\bar{F} = z\bar{i} + x\bar{j} - 3y^2z\bar{k}$ అయితే ప్రథమాష్టములో $Z=0, Z=5$ ల మధ్య $x^2+y^2=16$ యొక్క ఉపరితలము S పై $\int_S \bar{F}\cdot\bar{N}dS$ విలువను కనుక్కోండి.

15.8 SAQలకు సమాధానములు:

15.7.4 SAQ :

$$\int_V \bar{F}dv = \bar{i}\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=x^2}^{4} x\,dz\,dy\,dx + \bar{j}\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=x^2}^{4} z\,dz\,dy\,dx + \bar{k}\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=x^2}^{4} z\,dz\,dy\,dx$$

$$= \bar{i}\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6} x\left(4-x^2\right)dy\,dx + \bar{j}\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6} y\left(4-x^2\right)dy\,dx + \bar{k}\int_{0}^{2}\int_{y=0}^{6} \left(16-x^4\right)dydx$$

$$=\bar{i}\left(12x^2-\frac{3}{2}x^4\right)_0^2+\bar{j}18\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)_0^2+\frac{\bar{k}}{2}\cdot 6\left(16x-\frac{x^5}{5}\right)_0^2$$

$$=24\bar{i}+96\bar{j}+\frac{384}{5}\bar{k}$$

15.7.5 SAQ : $\int_C \frac{dx}{x+y}=\int_0^2\frac{2at\,dt}{at^2+2at}=2\int_0^2\frac{dt}{t+2}=2\left[\log(t+2)\right]_0^2$

$$=2(\log 4-\log 2)=2\log\frac{4}{2}=2\log 2$$

15.7.6 SAQ : $\phi=x^2+y^2-16$

$$\text{grad}\phi=2x\bar{i}+2y\bar{j}$$

$$\bar{N}=\frac{x\bar{i}+y\bar{j}}{4}\quad\therefore\bar{F}\cdot\bar{N}=\frac{x}{4}$$

YZ తలములో S యొక్క విక్షేపమును R అనుకొందాము.

Y విలువ 0 నుంచి 4కు మారుతుంది.

Z విలువ 0 నుంచి 5కు మారుతుంది.

$$\therefore\int_S\bar{F}\cdot\bar{N}\,ds=\iint_R\bar{F}\cdot\bar{N}\frac{dy\,dz}{|\bar{N}\cdot\bar{i}|}=\int_{y=0}^{4}\int_{z=0}^{5}\left(\frac{xz+xy}{4}\right)\frac{dy\,dz}{x/4}$$

$$=\int_{y=0}^{4}\int_{z=0}^{5}(z+y)\,dz\,dy=90$$

15.9 సారాంశము:

ఈ పాఠ్యభాగములో సదిశా ప్రమేయపు సమాకలనము, రేఖా సమాకలనులు, (ఉపరి) తల సమాకలనులు, ఘన సమాకలనులు వీటి పై కొన్ని ఫలితాలు, సమస్యలు చర్చించాము.

15.10 సాంకేతిక పదాలు:

సదిశా సమాకలనము, రేఖా సమాకలనము, (ఉపరి) తల సమాకలని, ఘన సమాకలని

15.11 అభ్యాసము:

15.11.1: $\int_0^1 \left(e^t \bar{i} + e^{-2t}\bar{j} + t\bar{k}\right)dt$ కనుక్కోండి.

15.11.2: $\frac{d\bar{f}}{dt} = 12\cos 2t\bar{i} - 8\sin 2t\bar{j} + 16t\bar{k}$, $\bar{f}(0) = \bar{0}$ అయితే $\bar{f}(t)$ విలువ కనుక్కోండి.

15.11.3: $\bar{a}$, $\bar{b}$ స్థిర సదిశలు $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{a}t + \bar{b}$ అయితే $\bar{r}$ విలువ కనుక్కోండి.

15.11.4: $\bar{F} = x^2 y^2 \bar{i} + y\bar{j}$ అయితే XY తలములో $(0,0)$ నుంచి $(4,4)$ వరకూ $y^2 = 4x$ యొక్క వక్ర భాగము C మీదుగా $\int_C \bar{F}\cdot d\bar{r}$ విలువను కనుక్కోండి.

15.11.5: $\bar{F} = \left(3x^2 + 6y\right)\bar{i} - 14yz\bar{j} + 20xz^2\bar{k}$ అయితే (0, 0, 0) నుంచి A (1, 0, 0)కు A నుంచి B (1, 1, 0) కు, B నుంచి (1, 1, 1) వరకూ సరళ రేఖా భాగము C పై $\int_C \bar{F}\cdot d\bar{r}$ వవిలువను కనుక్కోండి.

15.11.6: $\bar{F} = y\bar{i} + 2x\bar{j} - z\bar{k}$ అయితే ప్రథమాష్టమములో $2x + y = 6$ అను తలాన్ని $Z = 4$ ఖండించగా ఏర్పడు ప్రదేశము S పై $\int_S \bar{F}\cdot\bar{N}ds$ విలువను కనుక్కోండి.

15.11.7: $\bar{F} = 2xy\bar{i} + yz^2\bar{j} + xz\bar{k}$ అయితే $x = 0, y = 0, z = 0, x = 2, y = 1$ ఖఅఒ $z = 3$ లతో ఏర్పడిన సమాంతర ఫలకము S పై $\int_S \bar{F}\cdot\bar{N}dS$ విలువను కనుక్కోండి.

15.11.8: $\bar{F} = \left(2x^2 - 3z\right)\bar{i} - 2xy\bar{j} - 4x\bar{k}$ అయితే $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ లతో ఏర్పడిన ప్రదేశము V పై $\iiint_V \nabla\cdot\bar{F}dv$ విలువను కనుక్కోండి.

15.12 అభ్యాసమునకు సమాధానములు:

15.11.1 : $(e-1)\bar{i}+\frac{1}{2}\left(1-e^{-2}\right)\bar{j}+\frac{1}{2}\bar{k}$

15.11.2 : $6\sin 2t+(4\cos 2t-4)\bar{j}+t^2\bar{k}$

15.11.3 : $\bar{r}=\frac{1}{6}\bar{a}t^3+\frac{1}{2}\bar{b}t^2+\bar{c}t+\bar{d}$

15.11.4 : 264

15.11.5 : $\frac{23}{3}$

15.11.6 : 108

15.11.7 : 30

15.11.8 : $\frac{1}{12}$

15.13 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు

15.13.1: $\bar{F}=yz\bar{i}+zx\bar{j}+xy\bar{k}$ అయితే ప్రథమాష్టమములో $x^2+y^2+z^2=1$ అను గోళ ప్రదేశము S పై $\int_S \bar{F}\cdot\bar{N}\,dS$ విలువను కనుక్కోండి.

15.13.2: $\bar{F}=x^2y^2\bar{i}+y\bar{j}$ అయితే XY తలంలో (0, 0) నుంచి (1, 1) వరకు $y^2=4x$ యొక్క వక్ర భాగము C పై $\int_C \bar{F}.d\bar{r}$ విలువను కనుక్కోండి.

15.13.3: $\bar{F}=\left(2x^2-3z\right)\bar{i}-2xy\bar{j}-4x\bar{k}$, అయితే $x=0,\ y=0, z=0$, $2x+2y+z=4$లతో ఏర్పడిన ప్రదేశము V పై $\int\int\int_V \nabla\cdot\bar{F}\,dv$ విలువను కనుక్కోండి.

15.14 సంప్రదించవలసిన పుస్తకములు:

1. Murray R. Spiegel, Vector Analysis, Schaum Publishing Company, NewYork.
2. N. Saran and S.N. Nigam, Introduction to Vector Analysis, Pothishala Pvt. Ltd., Allahabad
3. Shanti Narayana, A Text Book of Vector Calculus, S. Chand&Co., New Delhi
4. Advanced Engg. Mathematics by Ervin Kreyszig, Published by John Wiley & Sons Inc.,

పాఠ్యభాగ రచయిత

శ్రీ ఆకెళ్ళ సత్యనారాయణ మూర్తి

పాఠ్యభాగము - 16

గౌస్ అపసరణ సిద్ధాంతము, గ్రీన్ సిద్ధాంతము, స్టోక్ సిద్ధాంతము

16.1 పాఠ్యభాగ లక్ష్యము:

ఈ పాఠ్య భాగములో గౌస్ అపసరణ సిద్ధాంతము, గ్రీన్ సిద్ధాంతము, స్టోక్ సిద్ధాంతములను నిరూపించి, వాటి పై ఫలితాలను, సమస్యలను చర్చిస్తాము.

16.2 పాఠ్యభాగ నిర్మాణము:

ఈ పాఠ్య భాగములో క్రింది భాగములుంటాయి.

16.3 **ఉపోద్ఘాతము**

16.4 **గౌస్ అపసరణ సిద్ధాంతము**

16.5 **గ్రీన్ సిద్ధాంతము**

16.6 **స్టోక్ సిద్ధాంతము**

16.7 S.A.Q.**లకు సమాధానములు**

16.8 **సారాంశము**

16.9 **సాంకేతిక పదాలు**

16.10 **అభ్యాసము**

16.11 **అభ్యాసమునకు సమాధానములు**

16.12 **మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు**

16.13 **సంప్రదించవలసిన పుస్తకములు**

16.3 ఉపోద్ఘాతము:

ఈ పాఠ్యభాగములో గౌస్ అపసరణ సిద్ధాంతము, గ్రీన్స్ సిద్ధాంతము, స్టోక్ సిద్ధాంతములను నిరూపించి, వాటి పై ఫలితాలను, సమస్యలను చర్చిస్తాము.

16.4 గౌస్ అపసరణ సిద్ధాంతము:

16.4.1 సిద్ధాంతము (గౌస్ అపసరణ సిద్ధాంతము): ఒక సంవృత ఉపరితలము S ను కలిగిన ప్రదేశములో $\overline{F}$ అనే సదిశా ప్రమేయము, అవిచ్ఛిన్నము, ప్రధమ తరగతి పాక్షిక అవకలజాలను కలిగి, S తో పరివృతమైన ప్రదేశము V అయితే,

$$\iiint_V \text{div}\,\overline{F}\,dv = \iint_S \overline{F}\cdot\overline{N}\,dS$$

($\overline{N}$ అనేది S యొక్క ఏదైనా బిందువు వద్ద బాహ్యముగా గీసిన యూనిట్ అభిలంబ సదిశ)

ఉపపత్తి: $\overline{F} = F_1\overline{i} + F_2\overline{j} + F_3\overline{k}$, అనుకొందాము. (F_1, F_2, F_3 అదిశా బిందు ప్రమేయములు)

$$\therefore \text{div}\,\overline{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

$$\therefore \iiint_V \text{div}\,\overline{F}\,dv = \iiint_V \frac{\partial F_1}{\partial x}\,dv + \iiint_V \frac{\partial F_2}{\partial y}\,dv + \iiint_V \frac{\partial F_3}{\partial z}\,dv$$

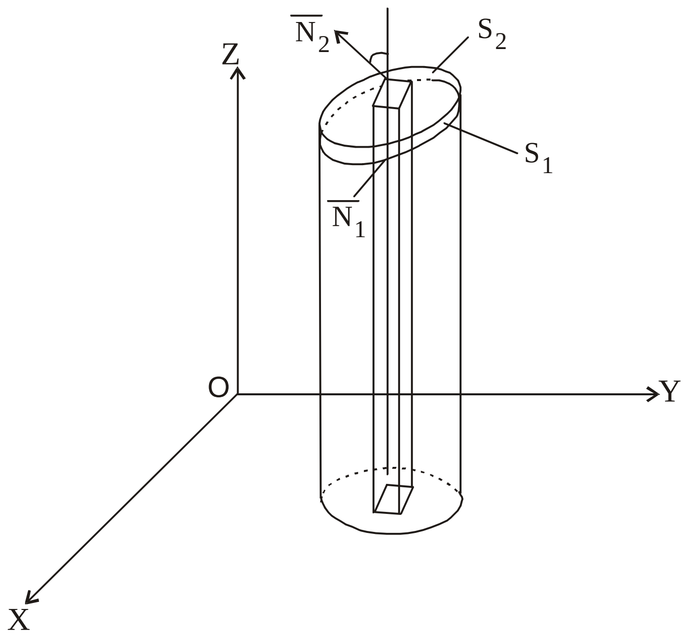
సందర్భము 1 :

S సంవృత ఉపరితలమనుకొందాము. అక్షాలకు సమాంతర రేఖలు S ను రెండు కన్నా ఎక్కువ బిందువులలో ఖండించదనుకొందాము. XY తలములో S యొక్క విక్షేపము R అనుకొందాము.

$z = f(x,y),\ z = g(x,y)$ లు $S_1,\ S_2$ లకు సమీకరణాలు అనుకొందాము. $f(x,y) \le z \le g(x,y)$.

$$\iiint_V \frac{\partial F_3}{\partial z}\,dv = \iiint_V \frac{\partial F_3}{\partial z}\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iint_R \left[\int_{z=f(x,y)}^{g(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z}\right] dx\,dy$$



$$= \iint_R \left[F_3(x, y, z) \right]_{z=f}^{g} dx\, dy$$

$$= \iint_R \left[F_3(x, y, g) - F_3(x, y, f) \right] dx\; dy$$

S_2 కు $dx\; dy = dS \cos\gamma = \overline{N} \cdot \overline{k}\; dS$ ($\because$ S_2 కు అభిలంబ రేఖ $\overline{k}$ తో γ కోణం చేస్తుంది).

$$\therefore \iint_R F_3(x, y, g)\, dx\, dy = \iint_{S_2} F_3\, \overline{N} \cdot \overline{k}\; dS$$

S_1కు $dx\; dy = -\cos\gamma\; ds = -\overline{N} \cdot \overline{k}\; dS$ ($\because$ S_1కు అభిలంబ రేఖ $\overline{k}$తో గురు కోణం γ చేస్తుంది)

$$\therefore \iint_R F_3(x, y, f)\, dx\, dy = -\iint_{S_1} F_3\, \overline{N} \cdot \overline{k}\, dS$$

$$\therefore -\iint_R F_3(x, y, f)\, dx\, dy = \iint_{S_1} F_3\, \overline{N} \cdot \overline{k}\, dS$$

$$\therefore \iiint_V \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dv = \iint_{S_2} F_3 \overline{N} \cdot \overline{k}\; ds + \iint_{S_1} F_3\, \overline{N} \cdot \overline{x}\, dS$$

$$= \int_S\int F_3\,\bar{K}\cdot\bar{N}\;dS$$

ఇదే విధముగా $\iiint_V \frac{\partial F_2}{\partial y}\,dv = \int_S\int F_2\,\bar{j}\cdot\bar{N}\;dS \quad \iiint_V \frac{\partial F_1}{\partial x}\,dV = \int_S\int F_1\,\bar{i}\cdot\bar{N}\;dS$

$$\therefore \iiint_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}\right)dv = \int_S\int F_1\bar{i}\cdot\bar{N}\,dS + \int_S\int F_2\,\bar{j}\cdot\bar{N}\,dS + \int_S\int F_3\,\bar{j}\cdot\bar{N}\,dS$$

$$= \int_S\int \left(F_1\bar{i}+F_2\bar{j}+F_3\bar{k}\right)\cdot\bar{N}\,dS$$

$$= \int_S\int \bar{F}\cdot\bar{N}\,ds$$

సందర్భము 2 :

అక్షాలకు సమాంతర రేఖలు S ను రెండు కన్నా ఎక్కువ బిందువులలో ఖండిస్తే, సందర్భము 1లో మాదిరిగా ఉండు ఉప ప్రదేశాలుగా S ను విభజించి, ప్రతి ఉప ప్రదేశమునకు సందర్భము 1ని ఉపయోగించి, వీటన్నిటిని కలుపగా S కు సిద్ధాంతము నిరూపితమవుతుంది.

16.4.2 గౌస్ అపసరణ సిద్ధాంతమునకు కార్టీజియన్ రూపము : $\bar{F}=F_1\bar{i}+F_2\bar{j}+F_3\bar{k}$ అనుకొందాము. అక్షాల ధన దిశలతో $\bar{N}$ చేయు కోణములు α,β,γ లు అయితే $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ లు $\bar{N}$ కు దిక్ కొసైన్‌లు అవుతాయి.

$$\bar{N}=\cos\alpha\cdot\bar{i}+\cos\beta\cdot\bar{j}+\cos\gamma\cdot\bar{k}.$$

$$\bar{F}\cdot\bar{N}=F_1\cos\alpha+F_2\cos\beta+F_3\cos\gamma$$

$\therefore$ గౌస్ అపసరణ సిద్ధాంతము ప్రకారము

$$\iiint_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}\right)dx\;dy\;dz = \int_S\int \left(F_1\cos\alpha+F_2\cos\beta+F_3\cos\gamma\right)ds$$

$$= \int_S\int F_1\;dy\;dz+F_2\,dz\,dx+F_3\,dx\,dy$$

16.4.3 సిద్ధాంతము: $\overline{F}$ అవకలనీయం అవుతూ ప్రథమ పరిమాణ అవిచ్ఛిన్న పాక్షిక అవకలజాలు గల సదిశా ప్రమేయము. V అను ప్రదేశమును ఆవరించిన ఉపరితలము S అయితే

$$\int_S \overline{N}\times\overline{F}\,ds = \int_V \nabla\times\overline{F}\,dv$$

ఉపపత్తి: $\overline{f} = \overline{a}\times\overline{F}$, అనుకొనుము. $\overline{a}$, ఏదైనా స్థిర సదిశ, గౌస్ అపసరణ సిద్ధాంతము ప్రకారము

$$\int_S \overline{f}\cdot\overline{N}\,dS = \int_V \nabla\cdot\overline{f}\,dv$$

$$\Rightarrow \int_S \overline{a}\times\overline{F}\cdot\overline{N}\,ds = \int_V \nabla\cdot\left(\overline{a}\times\overline{F}\right)dv$$

$$\Rightarrow \int_S \overline{a}\cdot\overline{F}\times\overline{N}\,ds = -\int_V \overline{a}\cdot\nabla\times\overline{F}\,dv$$

$$\Rightarrow \overline{a}\cdot\int_S \overline{F}\times\overline{N}\,ds = -\overline{a}\cdot\int_V \nabla\times\overline{F}\,dv$$

$$\Rightarrow \overline{a}\cdot\int_S \overline{F}\times\overline{N}\,ds + \overline{a}\int_V \nabla\times\overline{F}\,dv = 0$$

$$\Rightarrow \overline{a}\cdot\left(\int_S \overline{F}\times\overline{N}ds + \int_V \nabla\times\overline{F}\,dv\right) = 0$$

$\overline{a}$ ఏదైనా స్థిర సదిశ కాబట్టి $\overline{a}$ను శూన్యేతరము గాను

$\int_S \overline{F}\times\overline{N}\,ds + \int_V (\nabla\times\overline{F})dv$కు లంబంగా ఉండకుండా తీసుకోవచ్చు.

$$\therefore \int_S \overline{F}\times\overline{N}\,ds + \int_V \nabla\times\overline{F}\,dv = 0$$

$$\Rightarrow -\int_S \overline{F}\times\overline{N}\,ds = \int_V \nabla\times\overline{F}\,dv$$

$$\Rightarrow \int_S \overline{N}\times\overline{F}\,ds = \int_V \nabla\times\overline{F}\,dv$$

16.4.4 సిద్ధాంతము: ϕ అవిచ్ఛిన్న, అవకలనీయ అదిశా బిందు ప్రమేయము. V అను ప్రదేశమును ఆవరించు ఉపరితలము S అయితే

$$\int_S \overline{N}\phi\,ds = \int_V \nabla\phi\,dv$$

ఉపపత్తి: $\overline{f} = \overline{a}\phi$ ($\overline{a}$ ఏదైనా స్థిర సదిశ)

$\therefore$ గౌస్ అపసరణ సిద్ధాంతము ప్రకారము.

$$\int_S \overline{f} \cdot \overline{N}\, ds = \int_V \nabla \cdot \overline{f}\, dv \Rightarrow \int_S \overline{a}\,\phi \cdot \overline{N}\, dS = \int_V \nabla \cdot \overline{a}\,\phi\, dV$$

$$\Rightarrow \int_S \overline{a} \cdot \phi\, \overline{N} dS = \int_V \nabla\phi \cdot \overline{a}\, dV = \int_V \overline{a} \cdot \nabla\phi\, dV$$

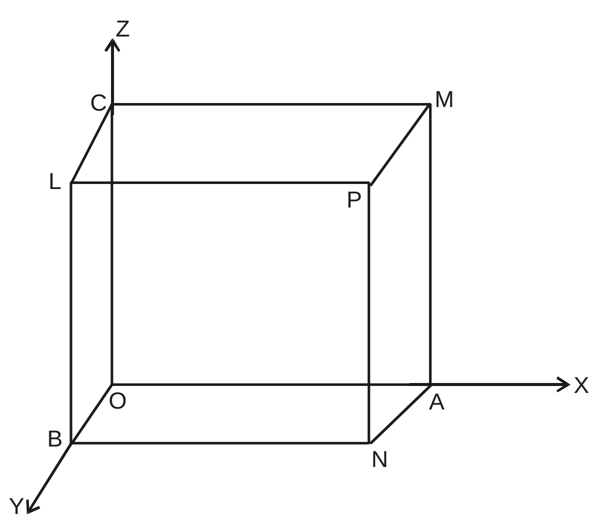
$$\Rightarrow \overline{a} \cdot \int_S \phi \overline{N}\, ds - \overline{a} \cdot \int_V \nabla\phi\, dv = 0$$

$$\Rightarrow \overline{a} \cdot \left(\int_S \phi \overline{N} ds - \int_V \nabla\phi\, dv \right) = 0$$

$\overline{a}$ ఏదైనా స్థిర సదిశ కాబట్టి $\int_S \phi \overline{N}\, dS = \int_V \nabla\phi\, dv$.

సాధించిన సమస్యలు:

16.4.5 : గౌస్ అపసరణ సిద్ధాంతమును $\int_S \left(\left(x^3 - yz\right)\overline{i} - 2x^2 y\overline{j} + z\overline{k} \right) \cdot \overline{N}\ dS$ కు నిరూపక తలములతోను $x = y = z = a$ అను తలములతోను ఏర్పడిన ప్రదేశము S పై సరిచూడండి.



సాధన: $\overline{F} = \left(x^3 - yz\right)\overline{i} - 2x^2y\overline{j} + z\overline{k}$

$$\therefore \operatorname{div}\overline{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 - yz\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-2x^2y\right) + \frac{\partial}{\partial z}(z)$$

$$= 3x^2 - 2x^2 + 1 = x^2 + 1$$

$\int\limits_V \operatorname{div}\overline{F}\,dv = \int\limits_S \overline{F}\cdot\overline{N}\,ds$ ను సరిచూడాలి.

$$\text{LHS} = \int\limits_V \operatorname{div}\overline{F}\,dv = \int_0^a\int_0^a\int_0^a \left(x^2+1\right)dx\,dy\,dz = \int_0^a\int_0^a \left(\frac{x^3}{3} + x\right)_0^a dy\,dz$$

$$= \int_0^a\int_0^a \left(\frac{a^3}{3} + a\right)dy\,dz = \left(\frac{a^3}{3} + a\right)\int_0^a \left(\frac{x^3}{3} + x\right)_0^a dy\,dz$$

$$= \int_0^a\int_0^a \left(\frac{a^3}{3} + a\right)dy\,dz = \left(\frac{a^3}{3} + a\right)\int_0^a (y)_0^a\,dx = \left(\frac{a^3}{3} + a\right)(x)_0^a = \frac{a^5}{3} + a^3$$

RHS :

(1) For S_1 : the face PMAN, $\overline{N} = \overline{i}$, $x = a$, $ds = dy\,dz$; $\overline{F}\cdot\overline{N} = x^3 - yz = a^3 - yz$

$$\int\limits_{S_1} \overline{F}\cdot\overline{N}\,ds = \int_{z=0}^{a}\int_{y=0}^{a}\left(a^3 - yz\right)dy\,dz = \int_0^a \left(a^3y - \frac{y^2}{2}z\right)_{y=0}^a dz = \int_0^a \left(a^4 - \frac{a^2z}{2}\right)dz$$

$$= \left(a^4z - \frac{a^2}{2}\frac{z^2}{2}\right)_0^a = a^5 - \frac{a^4}{4}$$

(2) For S_2 : the face OBLC : $\overline{N} = -\overline{i}, x = 0, ds = dy\,dz$

$\overline{F}\cdot\overline{N} = -\left(x^3 - yz\right) = yz$

$$\therefore \int_{S_2} \overline{F}\cdot N\ ds = \int_0^a\int_0^a yz\,dy\,dz = \int_0^a\left(\frac{y^2}{2}\right)z\,dz = \frac{a^2}{2}\left(\frac{z^2}{2}\right)_0^a = \frac{a^4}{4}$$

(3) For S_3 : Face PNBL; $\overline{N} = \overline{j}$, $y = a$, $\overline{F}\cdot\overline{N} = -2x^2y = -2ax^2$; $ds = dx\,dz$

$$\int_{S_3} \overline{F}\cdot\overline{N}\,ds = \int_0^a\int_0^a -2ax^2\,dx\,dz = -2a\int_0^a\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^a dz = -2a\cdot\frac{a^3}{3}\left(z\right)_0^a$$

$$= -\frac{2a^4}{3}\cdot a = -\frac{2a^5}{3}$$

(4) For S_4 : Face OAMC : $\overline{N} = -\overline{j}$, $y = 0$, $ds = dx\,dz$; $\overline{F}\cdot\overline{N} = 2x^2y = 0$

$$\therefore \int_{S_4} \overline{F}\cdot\overline{N}\,ds = 0$$

(5) For S_5 : Face PLCM : $\overline{N} = \overline{k}$, $z = a$, $ds = dx\,dy$, $\overline{F}\cdot\overline{N} = z = a$.

$$\int_{S_5} \overline{F}\cdot\overline{N}\,ds = \int_0^a\int_0^a a\ dx\ dy = a\int_0^a\left(x\right)_0^a dy = a\ a\int_0^a dy = a^2\left(y\right)_0^a = a^3$$

(6) For S_6 : Face OANB; $\overline{N} = -\overline{k}$, $ds = dx\,dy$, $z = 0$, $\overline{F}\cdot\overline{N} = -z = 0$ $\quad \therefore \int_{S_6} \overline{F}\cdot\overline{N}\ dS = 0$

$$\therefore \int_S \overline{F}\cdot\overline{N}\,ds = \int_{S_1} \overline{F}\cdot\overline{N}\,ds + \int_{S_2} \overline{F}\cdot\overline{N}\,ds + \int_{S_3} \overline{F}\cdot\overline{N}\,ds + \int_{S_4} \overline{F}\cdot\overline{N}\,ds + \int_{S_5} \overline{F}\cdot\overline{N}\,ds + \int_{S_6} \overline{F}\cdot\overline{N}\,ds$$

$$= a^5 - \frac{a^4}{4} + \frac{a^4}{4} - \frac{2a^5}{3} + 0 + a^3 + 0$$

$$= \frac{a^5}{3} + a^3$$

$\therefore$ LHS = RHS $\quad \therefore$ గౌస్ సిద్ధాంతము సరి చూడబడినది.

16.4.6 : $\int_S \left(ax^2 + by^2 + cz^2\right) ds$ విలువను $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ అను గోళ ఉపరితలము పై కనుక్కోండి.

సాధన: గౌస్ అపసరణ సిద్ధాంతము ప్రకారం $\int_S \overline{F} \cdot \overline{N}\, ds = \int \nabla \cdot \overline{F}\, dv$

ఇక్కడ $\overline{F} \cdot \overline{N} = ax^2 + by^2 + cz^2$

$\phi : x^2 + y^2 + z^2 - 1$ అనుకొందాము.

$$\nabla\phi = \sum \overline{i}\, \frac{\partial \phi}{\partial x} = 2x\,\overline{i} + 2y\overline{j} + 2z\overline{k}$$

$\overline{N} =$ బాహ్యముగా గీసిన యూనిట్ అభిలంబ రేఖ $= \dfrac{2x\,\overline{i} + 2y\overline{j} + 2z\overline{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} = x\,\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$

$\overline{F} \cdot \overline{N} = ax^2 + by^2 + cz^2$ కాబట్టి $\overline{F} = ax\,\overline{i} + by\overline{j} + cz\overline{k}$

$\nabla \cdot \overline{F} = a + b + c$

$\therefore$ గౌస్ అపసరణ సిద్ధాంతం ప్రకారం, $\int_S \overline{F} \cdot \overline{N}\, ds = \int_V \nabla \cdot \overline{F}\, dv = \int_V (a + b + c)\, dv$

$$= (a + b + c)V = \frac{4\pi}{3}(a + b + c), \quad (\because \text{ గోళ ఘన పరిమాణం } V = \frac{4\pi}{3})$$

16.4.7 SAQ : $\overline{N}$ అనేది ఏదైనా సంవృత ఉపరితలమునకు బాహ్య యూనిట్ అభిలంబ సదిశ అయితే $\int_V \text{div}\,\overline{N}\, dv = S'$ అని చూపుము. (S' అనేది S అను ప్రదేశపు ఉపరితల వైశాల్యం)

16.4.8 SAQ : గౌస్ అపసరణ సిద్ధాంతమునుపయోగించి $\int_S \overline{r} \cdot \overline{N}\, ds = 3V$ అని చూపండి. (V అనేది Sతో ఆవరించబడిన ప్రదేశపు ఘన పరిమాణం)

16.4.9 SAQ : $\int_S \left(ax\bar{i} + by\bar{j} + cz\bar{k}\right) \cdot \bar{N}\,ds = \frac{4\pi}{3}(a+b+c)$, అని చూపండి. ($S$ అనేది $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ అను గోళపు ఉపరితలము)

16.4.10: $\int \bar{f} \cdot \text{curl}\,\bar{g}\,dv = \int_S \bar{g} \times \bar{f} \cdot \bar{N}\,ds + \int_V \bar{g} \cdot \text{curl}\,\bar{f}\,dv$ అని చూపండి.

సాధన: గౌస్ అపసరణ సిద్ధాంతమును $\bar{g} \times \bar{f}$ కు ప్రయోగించగా,

$$\int_S \bar{g} \times \bar{f} \cdot \bar{N}\,ds = \int_V \text{div}\,\bar{g} \times \bar{f}\,dv$$

$$= \int_V \left(\bar{f} \cdot \text{curl}\,\bar{g} - \bar{g} \cdot \text{curl}\,\bar{f}\right) dv$$

$$= \int_V \bar{f} \cdot \text{curl}\,\bar{g}\,dv - \int_V \bar{g} \cdot \text{curl}\,\bar{f}\,dv$$

$$\therefore \int_V \bar{f} \cdot \text{curl}\,\bar{g}\,dv = \int_S \bar{g} \times \bar{f} \cdot \bar{N}\,ds + \int_V \bar{g} \cdot \text{curl}\,\bar{f}\,dv$$

16.4.11 SAQ: S అనేది సంవృత ఉపరితలమైతే $\int\int_S \bar{N}\,ds = 0$ అని చూపండి.

16.5 గ్రీన్ సిద్ధాంతము

16.5.1 సిద్ధాంతము (గ్రీన్ సిద్ధాంతము): XY తలములో C అను వక్రముతో పరివృతమైన సంవృత ప్రదేశము S. P, Q లు S లో x, y లలో అవకలనీయ ప్రమేయములయితే

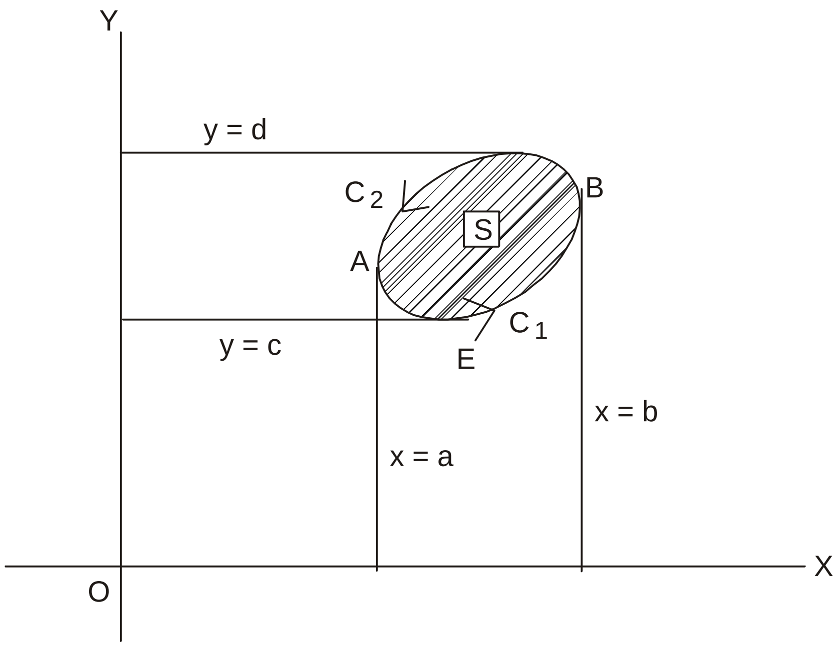
$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \int\int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

దీనిలో రేఖా సమాకలనము S యొక్క సరిహద్దు C అనేది ధనాత్మక దిశలో ఉండును. (C పై ఒక వ్యక్తి చలిస్తూ ఉంటే తనకు S ఎడమ వైపు ఉండాలి).

ఉపపత్తి:

సందర్భము 1:

అక్షాలకు సమాంతర రేఖలు S ను రెండు కన్నా ఎక్కువ బిందువులలో ఖండించదు.



$x = a, x = b$, $y = c$, and $y = d$ అను సరళ రేఖల మధ్య S ఉండుననుకొందాము.

$C_1(AEB)$ అను వక్రము సమీకరణము $y = f(x)$ అనీ

$C_2(ADB)$ అను వక్రము సమీకరణము $y = g(x)$ అనీ

$f(x) \le g(x)$ అనుకొందాము.

$$\therefore \int\int_S \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy = \int_{x=a}^{b} \int_{y=f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy\, dx$$

$$= \int_{x=a}^{b} \left[P(x,y)\right]_{y=f(x)}^{g(x)} dx = \int_a^b \left[P(x,g) - P(x,f)\right] dx$$

$$= \int_a^b P(x,g)\, dx - \int_a^b P(x,f)\, dx$$

$$= -\int_b^a P(x,y)\,dx - \int_a^b P(x,f)\,dx$$

$$= -\int_{C_2} P(x,y)\,dx - \int_{C_1} P(x,y)\,dx = -\oint_C P(x,y)\,dx$$

$$\therefore \oint_C P dx = -\int\int_S \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy \text{ -------------- (1)}$$

ఇదే విధముగా $\oint_C Q\,dy = \int\int_S \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$ ----------- (2) అని చూపవచ్చు.

(1), (2) లను కలుపగా $\oint_C P\,dx + Q\,dy = \int\int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$

సందర్భము 2 :

ఏదైనా అక్షానికి సమాంతర రేఖ Sను రెండు కన్నా ఎక్కువ బిందువులలో ఖండిస్తే సందర్భము 1లో మాదిరిగా ఉండు ఉప ప్రదేశములుగా Sను విభజించి, ప్రతి ఉప ప్రదేశమునకు సందర్భము 1ని ఉపయోగించి వీటన్నిటిని కలుపగా Sకు సిద్ధాంతము నిరూపితమవుతుంది.

16.5.2 సిద్ధాంతము (గ్రీన్ సమానతలు): f, gలు S అను ఉపరితలముతో పరివృతమైన ప్రదేశము S పై అవకలనీయమగు అదిశా బిందు ప్రమేయములు అయితే

(a) $\int_V \left(f\,\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g\right) dv = \int_S (f \nabla g) \cdot \bar{N}\,ds$

(b) $\int_V \left(f \nabla^2 g - g \nabla^2 f\right) dv = \int_S (f\,\nabla g - g \nabla f) \cdot \bar{N}\,ds$

ఉపపత్తి: (ఎ) $\bar{F} = f\,\nabla g$ అనుకొందాము.

$$\therefore \nabla \cdot \bar{F} = \nabla \cdot (f\,\nabla g)$$

$$= f\,(\nabla \cdot \nabla g) + \nabla f \cdot \nabla g = f\,\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g$$

$\therefore$ గౌస్ అపసరణ సిద్ధాంతము ప్రకారము, $\int_V \nabla \cdot \bar{F}\,dv = \int_S \bar{F} \cdot \bar{N}\,ds$

$$\int_V \left(f\,\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g\right) dv = \int_S \left(f\,\nabla g\right)\cdot \bar{N}\, ds \text{ -------------- (1)}$$

(బి) f, g లు తారుమారు చేస్తే

$$\int_V \left(g\nabla^2 f + \nabla g \cdot \nabla f\right) dv = \int_S \left(g\nabla f\right)\cdot \bar{N}\, ds \text{ ---------------------- (2)}$$

(1) నుండి (2)ను తీసివేయగా

$$\int_V \left(f\,\nabla^2 g - g\nabla^2 f\right) dv = \int_S \left(f\,\nabla g - g\nabla f\right)\cdot \bar{N}\, ds$$

16.5.3 గమనిక: సిద్ధాంతము **16.5.2**లో (ఎ)ను గ్రీన్ ప్రథమ సమానత అనీ, (బి)ను గ్రీన్ ద్వితీయ సమానత అనీ అంటాము.

16.5.4 నిర్వచనము: $\nabla^2\phi = 0$ అయితే ϕను హరాత్మక ప్రమేయమంటాము. $\nabla^2\phi = 0$ను హరాత్మక సమీకరణము అంటాము.

16.5.5 గమనిక: f, g లు హరాత్మక ప్రమేయములయితే

$$\int_S \left(f\,\nabla g - g\nabla f\right)\cdot \bar{N}\; dS = 0$$

ఇది గ్రీన్ ద్వితీయ సమానత నుంచి వచ్చును.

సాధించిన సమస్యలు:

16.5.6 : C అను సంవృత వక్రముతో పరిబద్ధమైన ప్రదేశపు వైశాల్యము $\frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$ అని చూపి, దీర్ఘ వృత్తము $x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$ యొక్క వైశాల్యమును కనుక్కోండి.

సాధన: గ్రీన్ సిద్ధాంతము ప్రకారం

$$\frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y dx = \frac{1}{2}\int_C (-y)\,dx + x\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int\!\!\int_S \left(\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y)\right) dx\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_S (1+1)\,dx\,dy=\iint_S 1\,dx\,dy$$

$= A,$ (S అను ప్రదేశ వైశాల్యము A)

దీర్ఘ వృత్త వైశాల్యము $=\frac{1}{2}\oint_C (x\,dy - y\,dx)$

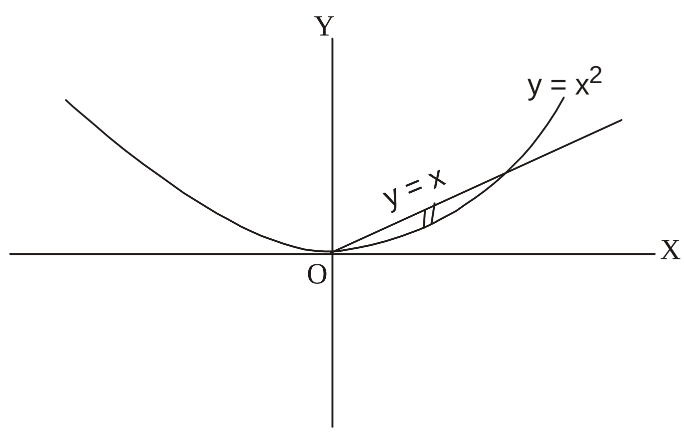
$$=\frac{1}{2}\oint_0^{2\pi}\left[a\cos\theta(b\cos\theta)-b\sin\theta(-a\sin\theta)\right]d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)d\theta$$

$=\frac{1}{2}\cdot ab\cdot(\theta)_0^{2\pi}=\frac{1}{2}ab\cdot 2\pi=\pi ab$ చదరపు యూనిట్లు

16.5.7 : గ్రీన్ సిద్ధాంతమును $\oint_C \left(x^2+y^2\right)dx + x^2dy$ కు $y=x$, $y=x^2$ లతో పరిబద్ధమన సంవృత వక్రము C పై సరి చూడండి.

సాధన: $\oint_C Pdx+Qdy=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$ అని సరిచూడాలి.



$P = xy + y^2,\ Q = x^2$

$$\therefore \frac{\partial P}{\partial y} = x + 2y; \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

$$\text{L.H.S.} = \int_{\substack{y=x^2\\ OBA}} (P\,dx + Q\,dy) + \int_{\substack{y=x\\ ACO}} (P\,dx + Q\,dy)$$

$$= \int_0^1 \left[x \cdot x^2 + x^4 + x^2 \cdot 2x\right] dx + \int_1^0 \left[\left(x \cdot x + x^2\right) + x^2\right] dx$$

$$= \int_0^1 \left(3x^3 + x^4\right) dx + \int_1^0 3x^2 dx$$

$$= \left(\frac{3}{4}x^4 + \frac{x^5}{5}\right)_0^1 + \left(x^3\right)_1^0 = \frac{3}{2} + \frac{1}{5} - 1 = \frac{15 + 4 - 20}{20} = -\frac{1}{20}$$

$$\text{R.H.S.} = \iint_S \left[2x - (x + 2y)\right] dx\,dy = \int_0^1 \int_{y=x^2}^{x} (x - 2y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} (x - 2y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left(xy - y^2\right)_{y=x^2}^{x} dx$$

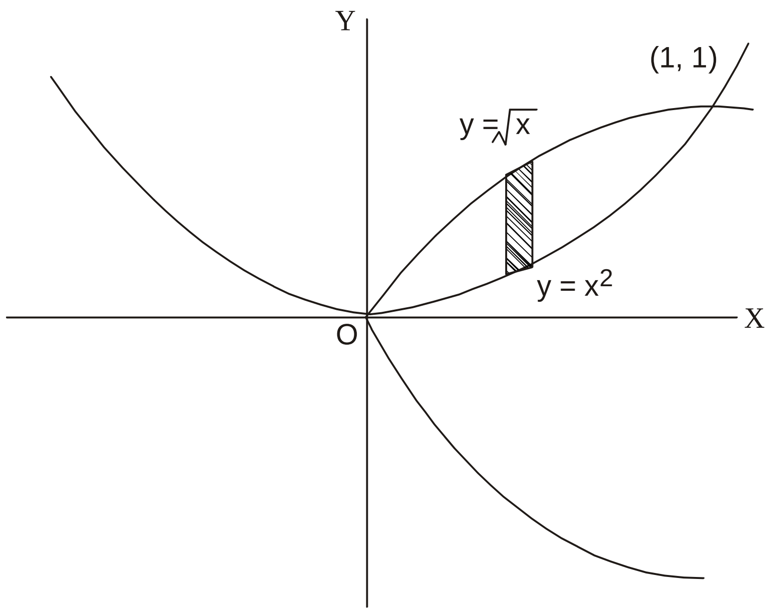
$$= \int_0^1 \left(\left(x^2 - x^2\right) - \left(x^3 - x^4\right)\right) dx = -\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right)_0^1 = -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{20}$$

$\therefore$ LHS = RHS

$\therefore$ గ్రీన్ సిద్ధాంతము సరిచూడబడినది.

16.5.8 : గ్రీన్ సిద్ధాంతమును $\oint_C \left(3x^2 - 8y^2\right) dx + \left(4y - 6xy\right) dy$ కు $y = \sqrt{x}$ ఖఅఎ $y = x^2$ లతో పరిబద్ధమైన వక్రము C పై సరిచూడండి.

సాధన: $\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$ అని సరిచూడాలి.



$$P = 3x^2 - 8y^2,\ Q = 4y - 6xy$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -16y,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = -6y$$

$$\oint_{C_1} P\,dx + Q\,dy = \int_0^1 \left(3x^2 - 8x^4\right) dx + \left(4x^2 - 6xx^2\right) 2x\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(3x^2 + 8x^3 - 20x^4\right) dx = \left(x^3 + 2x^4 - 4x^5\right)_0^1 \ = 1 + 2 - 4 = -1$$

$$\oint_{C_2} P\,dx + Q\,dy = \int_1^0 \left(3x^2 - 8x\right) dx + \left(4\sqrt{x} - 6x\sqrt{x}\right) \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \int_1^0 \left(3x^2 - 8x + 2 - 3x\right) dx = \int_1^0 \left(3x^2 - 11x + 2\right) dx = \left(x^3 - \frac{11x^2}{2} + 2x\right)_1^0$$

$$= -\left(1 - \frac{11}{2} + 2\right) = \frac{5}{2}$$

$$\therefore \oint_C Pdx + Qdy = -1 + \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{RHS} = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_0^1 \int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} (-6y + 16y)\, dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} 10\,y\ dy\ dx = \int_0^1 \left(5y^2\right)_{x^2}^{\sqrt{x}}\ dx$$

$$= \int_0^1 5\left(x - x^4\right) dx = 5\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)_0^1 = 5\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \text{LHS} = \text{RHS}$$

$\therefore$ గ్రీన్ సిద్ధాంతము సరిచూడబడినది.

16.5.9 : గ్రీన్ సిద్ధాంతమునుపయోగించి $\int_C \left(x^2 + y^2\right) dx + 3xy^2 dy$ విలువను $x^2 + y^2 = 4$ అను వృత్తము C పై కనుక్కోండి.

సాధన: గ్రీన్ సిద్ధాంతము ప్రకారం $\int_C Pdx + Qdy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$

ఇక్కడ $P = x^2 + y^2,\ Q = 3xy^2$

$$\therefore \frac{\partial P}{\partial y} = 2y,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 3y^2$$

$$\therefore \oint_C P\,dx + Q\,dy = \int_{x=-2}^{2} \int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(3y^2 - 2y\right) dy\,dx$$

$$= \int_{x=-2}^{2} \left(y^3 - y^2\right)_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx = 2\int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right)^{3/2} dx$$

$$= 4\int_0^2 \left(4 - x^2\right)^{3/2} dx \;\left|\; \begin{array}{l} \text{Put } \; x = 2\sin\theta \\ dx = 2\cos\theta\, d\theta \\ \theta \text{ విలువ } 0 \text{ నుంచి } \dfrac{\pi}{2} \text{ కు మారును} \end{array}\right.$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \left(4\cos^2\theta\right)^{3/2} 2\cos\theta\, d\theta$$

$$= 64\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta$$

$$= 64 \cdot \frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}$$

$$= 12\pi$$

16.6 స్టోక్ సిద్ధాంతము:

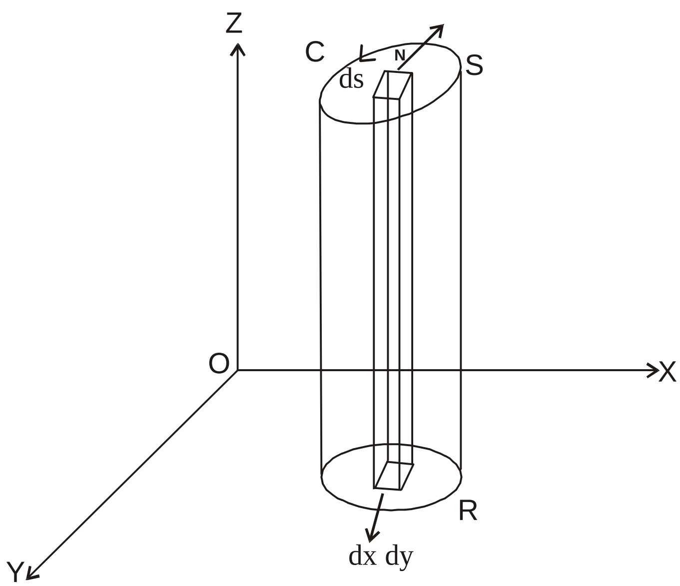
16.6.1 d¾ ‘ÆÔ áTT (k|¾ùd¾ ‘ÆÔ áTT): సంవృతం, ఖండించుకోని వక్రము C తో పరిబద్ధమైన ఉపరితలము S. $\overline{F}$ అవకలనీయ సదిశా బిందు ప్రమేయము అయితే $\oint_C \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int_S \text{curl}\,\overline{F} \cdot \overline{N}\, ds$ ($\overline{N}$ అనేది S కు బాహ్య యూనిట్ అభిలంబ సదిశ, C అనేది ధన దిశలో S యొక్క సరిహద్దు)

ఉపపత్తి: S అనే ఉపరితలాన్ని XY, YZ, ZX తలాలలో విక్షేపాలు సరళ సంవృత వక్రాలతో పరిబద్ధమైనవనుకొందాము. S కు సమీకరణాలు $z = f(x, y)$ లేక $x = g(y, z)$ లేక $y = h(z, x)$, f, g, h లు అవకలన ప్రమేయములు.

$\overline{F} = F_1\overline{i} + F_2\overline{j} + F_3\overline{k}$ అనుకొందాము. $\Rightarrow \text{curl}\,\overline{F} = \nabla \times \overline{F} = \nabla \times \left(F_1\overline{i} + F_2\overline{j} + F_3\overline{k}\right)$

$$\nabla \times F_1 i = \text{curl } F_1 \bar{i} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\partial F_1}{\partial z}\bar{j} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\bar{k}$$



సమీకరణము $z = f(x, y)$ అనుకొందాము. S పై ఏదైనా బిందువుకు

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = x\bar{i} + y\bar{j} + f(x, y)\bar{k}$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial y} = \bar{j} + \frac{\partial z}{\partial y}\bar{k}$$

S కు $\frac{\partial \bar{r}}{\partial y}$ స్పర్శ సదిశ కాబట్టి $\bar{N} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} = 0$

$$\overline{N}\cdot\overline{j}+\overline{N}\cdot\overline{k}\frac{\partial z}{\partial y}=0 \Rightarrow \overline{N}\cdot\overline{j}-\overline{N}\cdot\overline{k}\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\therefore\left(\nabla\times F_1\overline{i}\cdot\overline{N}\right)ds=-\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}+\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\overline{N}\cdot\overline{k}\,ds$$

$$=-\frac{\partial}{\partial y}F_1(x,y,z)\cos\gamma\,ds$$

$$=-\frac{\partial F_1}{\partial y}dx\,dy$$

S యొక్క విక్షేపము XY తలములో R అనీ, R యొక్క సరిహద్దును σ అని అనుకొందాము.

$$\therefore\int_S \nabla\times F_1\overline{i}\cdot\overline{N}\;ds=\iint_R\left(0-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_\sigma F_1dx+\sigma dy$$ (గ్రీన్ సిద్ధాంతము ప్రకారము)

C లో $F_1(x,y,z)$ σ లో $F_1(x,y,f(x,y))$ ఒకటే కాబట్టి

$$\int_\sigma F_1dx=\oint_C F_1dx$$

$$\therefore\int_S \nabla\times F_1\overline{i}\cdot\overline{N}\;ds=\int_C F_1\;dx$$

YZ, ZX తలాలలో విక్షేపములు తీసుకుంటే

$$\int_S \nabla\times F_2\overline{j}\cdot\overline{N}\,ds=\oint_C F_2dy\;,\;\int_S \nabla\times F_3\overline{k}\cdot\overline{N}\,ds=\oint_C F_3dz$$

వీటిని కలుపగా $\oint_S \nabla\times\left(F_1\overline{i}+F_2\overline{j}+F_3\overline{k}\right)\cdot\overline{N}\,ds=\oint_C F_1dx+F_2dy+F_3dz$

$$\therefore\oint_S \nabla\times\overline{F}\cdot\overline{N}\,ds=\oint_C \overline{F}\cdot dr$$

16.6.2 తలములో స్టోక్ సిద్ధాంతము: S అనే తలము XY తలములో ఉందనుకొందాము. $Z-$ అక్షము అభిలంబ సదిశ అవుతుంది. $\therefore\overline{N}=\overline{k},\;Z=0,\;dz=0$

$\overline{F}=F_1\overline{i}+F_2\overline{j};\;\overline{r}=x\overline{i}+y\overline{j};$ అనుకొందాము.

$$\therefore \oint_C \overline{F}\cdot d\overline{r} = \oint_C F_1 dx + F_2 dy;\ \text{curl}\,\overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{\partial F_2}{\partial z}\overline{i} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\overline{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\overline{k}$$

Curl $\overline{F}\cdot\overline{N} = \text{curl}\,\overline{F}\cdot\overline{k} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$

స్టోక్ సిద్ధాంతము ; $\int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int_S \text{curl}\,\overline{F}\cdot\overline{N}\,ds$

$$\Rightarrow \int_C F_1 dx + F_2 dy = \iint_S \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy$$

ఇదే గ్రీన్ సిద్ధాంతము.

16.6.3 గమనిక: తలములో స్టోక్ సిద్ధాంతము గ్రీన్ సిద్ధాంతము.

సాధించిన సమస్యలు:

16.6.4 : స్టోక్ సిద్ధాంతమును $\overline{A} = (2x-y)\overline{i} - yz^2\overline{j} - y^2 z\overline{k}$ కు S అనేది $x^2+y^2+z^2=1$ అను గోళపు పై ఉపరితలము, దాని సరిహద్దు C అయితే సరిచూడండి.

సాధన: S యొక్క సరిహద్దు C అనేది $x^2+y^2=1,\ z=0$ అనే వృత్తము అగును. దీని పరామితీయ సమీకరణములు

$x = \cos t,\ y = \sin t, z = 0,\ 0 \le t \le 2\pi$.

$$\therefore \int_C \overline{A}\cdot d\overline{r} = \int_C (2x-y)dx + 0dy + 0dz = \int_r^{2\pi} (2\cos t - \sin t)(-\sin t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin 2t\,dt + \int_0^{2\pi} \sin^2 t\,dt$$

$$= \left[\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{2\pi} + 4\cdot\frac{1}{2}\ \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\operatorname{curl}\bar{A}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2x-y & -yz^2 & -y^2z\end{vmatrix}=\bar{i}(-2yz+2yz)-j(0-0)+\bar{k}(0+1)=\bar{k}$$

$\int_S \operatorname{curl}\bar{A}\cdot\bar{N}\,ds=\int_S \bar{k}\cdot\bar{N}\,ds=\int_S \bar{k}\cdot\bar{k}\,ds=\int\int_R dx\,dy$, (XY తలములో S యొక్క విక్షేపము R)

$$=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx=4\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx$$

$$=4\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=4\left(\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\sin^{-1}x\right)_0^1=4\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$

$$\therefore \oint_C \bar{A}\cdot d\bar{r}=\int_S \operatorname{curl}\bar{A}\cdot\bar{N}\,ds$$

$\therefore$ స్టోక్ సిద్ధాంతము సరిచూడబడినది.

16.6.5 : స్టోక్ సిద్ధాంతమును $\bar{F}=-y^3\bar{i}+x^3\bar{j}$ కు $x^2+y^2\le 1,\ z=0$ అను ఉపరితలం S పై సరి చూడండి.

సాధన : $\bar{F}=-y^3\bar{i}+x^3\bar{j}$ (దత్తాంశం)

S యొక్క హద్దు XY తలములో $x^2+y^2=1,\ z=0$ అను వృత్తము $x=\cos t, y=\sin t, z=0,\ 0\le t\le 2\pi$ పరామితీయ సమీకరణాలను కలిగి ఉంటుంది.

$$\int_C \bar{F}\cdot d\bar{r}=\int_C -y^3dx+x^3dy=\int_0^{2\pi}\left(-\sin^3 t(-\sin t)+\cos^3 t\cos t\right)dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\cos^4 t+\sin^4 t\right)dt=4\int_0^{\pi/2}\left(\cos^4 t\,dt+\sin^4 t\right)dt$$

$$=4\left(\frac{3}{2}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}+\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{2}$$

$$\nabla\times\overline{F}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ -y^3 & x^3 & 0\end{vmatrix}=\overline{k}\left(3x^2+3y^2\right)$$

$\int_S \nabla\times\overline{F}\cdot\overline{N}\,ds=3\int_S\left(x^2+y^2\right)\overline{k}\cdot\overline{N}\,ds=3\int\int_R\left(x^2+y^2\right)dx\,dy$, ($\because \overline{N}=\overline{K}$, XY- తలములో S యొక్క విక్షేపము R)

$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,$ అనుకోండి. $\Rightarrow\ dx\,dy=r\,dr\,d\theta$

r విలువ 0 నుంచి 1కి మారుతుంది. θ విలువ 0 నుంచి 2π కు మారుతుంది.

$\because dxdy=J\ drd\theta$

$$J=\text{ జాకోబియాన్ }=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}=r$$

$$\therefore\int_S\nabla\times\overline{F}\cdot\overline{N}\,ds=3\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\,r\ dr\,d\theta=3\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^4}{4}\right)_0^1 d\theta$$

$$=\frac{3}{4}\cdot 2\pi=\frac{3\pi}{2}$$

$$\therefore\int_C\overline{F}\cdot d\overline{r}=\int_S \text{curl}\,\overline{F}\cdot\overline{N}\,dS.$$

$\therefore$ స్టోక్ సిద్ధాంతము సరిచూడబడింది.

16.7 S.A.Q.లకు సమాధానములు:

16.4.7 S.A.Q.: $\int_V \operatorname{div} \bar{N}\, dv = \int_S \bar{N} \cdot \bar{N}\, ds$ (గౌస్ అపసరణ సిద్ధాంతం ప్రకారం)

$$= \int_S 1\, ds = S',$$ (S' అనేది S అను ప్రదేశము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యం)

16.4.8 S.A.Q.: $\int_S \bar{r} \cdot \bar{N}\, ds = \int_V \operatorname{div} \bar{r}\, dv = \int_V 3dv = 3V$

(V అనేది S పై పరిబద్ధమైన ప్రదేశ ఘన పరిమాణము)

16.4.9 S.A.Q.: $\int_S \left(ax\bar{i} + by\bar{j} + cz\bar{k}\right) \cdot \bar{N}\, ds = \int_V \operatorname{div}\left(ax\bar{i} + by\bar{j} + cz\bar{k}\right) dv$

$$= \int_V (a+b+c)\, dv = (a+b+c)$$ (గోళ ఘన పరిమాణము)

$$= (a+b+c)\frac{4\pi}{3}$$

$$= \frac{4\pi}{3}(a+b+c)$$

16.4.11 S.A.Q.: $\int_S \bar{N}\, ds = \int_S \bar{N} 1\, ds = \int_V \nabla 1 dv = 0$

(సిద్ధాంతము **16.4.1**లో $\phi = 1$ గా తీసుకొనగా)

16.8 సారాంశము:

ఈ పాఠ్యభాగములో గౌస్ అపసరణ, గ్రీన్, స్టోక్ సిద్ధాంతములను నిరూపించి, వాటి పై కొన్ని ఫలితాలను, సమస్యలను చర్చించాము.

16.9 సాంకేతిక పదాలు:

గౌస్ అపసరణ సిద్ధాంతము, గ్రీన్ సిద్ధాంతము, స్టోక్ సిద్ధాంతము, గ్రీన్ సమానతలు.

16.10 అభ్యాసము:

16.10.1: $\bar{F} = \left(x^2 - yz\right)\bar{i} + \left(y^2 - zx\right)\bar{j} + \left(z^2 - xy\right)\bar{k}$ కు $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ 0 \le z \le c$ అను సమాంతర ఫలకము పై గౌస్ సిద్ధాంతమును సరి చూడండి.

16.10.2: $\int_S \overline{F}\cdot\overline{N}\,dS$ విలువను $\overline{F}=4x\overline{i}-2y^2\overline{j}+z^2\overline{k}$ అను ప్రమేయమునకు $x^2+y^2=4, z=0, z=3$ లతో పరిబద్ధమైన ప్రదేశము S పై కనుక్కోండి.

16.10.3: గ్రీన్ సిద్ధాంతమును $\oint_C\left(2xy-x^2\right)dx+\left(x^2+y^2\right)dy$ కు $y=x^2$, $y^2=x$ లతో పరిబద్ధమైన వక్రము C పై సరిచూడండి.

16.10.4: గ్రీన్ సిద్ధాంతమునుపయోగించి $\oint_c(3x+4y)dx+(2x-3y)dy$ విలువను $x^2+y^2=4$ అను వృత్తము C పై కనుక్కోండి.

16.10.5: స్టోక్ సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించి $\text{curl grad}\,\phi=\overline{0}$ అని చూపండి.

16.10.6: స్టోక్ సిద్ధాంతాన్ని $\overline{F}=2y\overline{i}+3x\overline{j}-z^2\overline{k}$ కు $x^2+y^2+z^2=9$ అను గోళపు ఊర్ధ్వ ఉపరితలము S పై సరిచూడండి.

16.11 అభ్యాసపు సమాధానములు:

16.10.2 : 84π

16.10.3 : 0

16.10.4 : -8π

16.12 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు:

16.12.1 : గౌస్ సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి, నిరూపించండి.

16.12.2 : గ్రీన్ సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి, నిరూపించండి.

16.12.3 : స్టోక్ సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి, నిరూపించండి.

16.12.4 : గౌస్ అపసరణ సిద్ధాంతాన్ని $\overline{F}=\left(x^3-yz\right)\overline{i}-2x^2y\overline{j}+z\overline{k}$ కు $x=y=z=a$ నిరూపతలాలతో పరివృతమైన ఉపరితలము పై సరి చూడండి.

16.12.5 : గ్రీన్ సిద్ధాంతాన్ని $\oint_C\left(x^2+y^2\right)dx+x^2dy$ కు $y=x$, $y=x^2$ లతో ఏర్పడిన సంవృత వక్రం C పై సరిచూడండి.

16.12.6 : స్టోక్ సిద్ధాంతాన్ని $\overline{F}=-y^3\overline{i}+x^3\overline{j}$ కు, $x^2+y^2\le 1, z=0$ అను ఉపరితలం S పై సరి చూడండి.

16.13 సంప్రదించవలసిన పుస్తకాలు:

1. Murray R. Spiegel, Vector Analysis Schaum's Publishing Company, Newyork.
2. N. Saran and S.N. Nigam, Introduction to Vector Analysis, Pothishala Pvt. Ltd., Allahabad
3. Shanti Narayan, A Text Book of Vector Calculus, S. Chand&Co., NewDelhi
4. Advanced Engg. Mathematics by Ervin Kreyszig, Published by John Wiley & Sons Inc.,

పాఠ్యభాగ రచయిత
శ్రీ ఆకెళ్ళ సత్యనారాయణ మూర్తి

ప్రయోగము - 1

యథార్థ అవకలన సమీకరణాలు

ఉద్దేశ్యం :-

యథార్థ అవకలన సమీకరణములు మరియు యథార్థ అవకలన సమీకరణముగా మార్చగలిగిన అవకలన సమీకరణములు సాధించుట.

నిర్వచనములు :-

(1) M, N లు x, y లలో వాస్తవ మూల్య ప్రమేయాలు. వాటి ప్రథమ పరిమాణ పాక్షిక అవకలజాలు అవిచ్ఛిన్నాలైతే, $Mdx + Ndy = 0$ యథార్థ అవకలన సమీకరణము కావటానికి $\frac{\delta\mu}{\delta x} = M, \frac{\delta\mu}{\delta y} = N$ అగునట్లుగా అవిచ్ఛిన్న ప్రథమ పరిమాణ పాక్షిక అవకలజాలు కలిగిన ప్రమేయము 'μ' వ్యవస్థితము కావలెను. అట్టే ప్రమేయము μ నకు $Mdx + Ndy = du$ అని రాయగలము. ఇక్కడ $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$.

(2) $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ యదార్థ అవకలన సమీకరణము కానపుడు x, y లలో $f(x,y) = f$ అనే ప్రమేయము $f[Mdx + Ndy] = 0$ యథార్థ అవకలన సమీకరణము అయ్యేటట్లు వ్యవస్థితమైతే, f ని $Mdx + Ndy = 0$ కి సమాకలన గుణకము అంటాము.

ఉపయోగించిన ఫలితములు (Results Used) :-

(1) $Mdx + Ndy = 0$ రూపములోని అవకలన సమీకరణము

యథార్థ అవకలన సమీకరణము $\Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

(2) $Mdx + Ndy = 0$ యథార్థ అవకలన సమీకరణము కానపుడు,

$Mdx + Ndy = 0$ సమ ఘాతీయ అవకలన సమీకరణము అయి,

$Mx + Ny \neq 0$ అయిన $\frac{1}{Mx + Ny}$ ఈ సమీకరణానికి ఒక సమాకలన గుణకము.

(3) $yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0$ అనే రూపములోని సమీకరణము యథార్థ అవకలన సమీకరణము కానపుడు, $Mx - Ny \neq 0$ అయిన ఈ సమీకరణానికి సమాకలన గుణకము $\frac{1}{Mx - Ny}$.

(4) $Mdx + Ndy = 0$ రూపములోని సమీకరణము యథార్థ అవకలన సమీకరణము కానపుడు, $f(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$ x లో మాత్రమే ప్రమేయము అయిన ఈ సమీకరణపు సమాకలన గుణకము $e^{\int f(x)dx}$.

(5) $Mdx + Ndy = 0$ రూపంలోని సమీకరణము యథార్థ అవకలన సమీకరణము కానపుడు $g(y) = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$, y లో మాత్రమే ప్రమేయం అయిన ఈ సమీకరణపు సమాకలన గుణకము $e^{\int g(y)dy}$.

సాధించే విధానము (Procedure) :-

దత్త అవకలన సమీకరణము $Mdx + Ndy = 0$ రూపములోనికి మార్చుకొని $\frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x}$ లు సమానమా, కాదా అని పరిశీలించవలెను.

ఒకటవ అంచె :-

(1) $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, అయిన $\int Mdx + \int\left(N - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy$ (ఇక్కడ $v = \int\limits_{y\ \text{constant}} Mdx$) పద్ధతి ద్వారా సాధారణ సాధనను సాధిస్తాము.

(2) $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, అయిన పైన వివరించిన పద్ధతుల ద్వారా $f(x, y)$ అనే సమాకలన గుణకాన్ని కనుగొంటాము.

(3) దత్త సమీకరణమును $f(x, y)$ తో గుణించగా అది $M_1dx + N_1dy = 0$ రూపములోనికి మారును. (ఇక్కడ $M_1 = Mf(x\ y),\ N_1 = Nf(x, y)$).

(4) $\frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial x}$ అని పరిశీలించవలెను.

(5) M స్థానంలో M_1, N స్థానంలో N_1 వ్రాయుచూ మొదటి అంచె ద్వారా సాధారణ సాధన కనుక్కుంటాము.

ఉదాహరణ 1 :- $(x^2y - 2xy^2)dx - (x^3 - 3x^2y)dy = 0$ ని సాధించుము.

సాధన :-

ఇక్కడ $M = x^2y - 2xy^2 \qquad N = -x^3 + 3x^2y$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = x^2 - 4xy, \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = -3x^2 + 6xy$$

$\therefore \dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$,

దత్త సమీకరణము సమ ఘాతీయము కావున సమాకలన గుణకము $\dfrac{1}{Mx+Ny}$.

$$\frac{1}{Mx+Ny} = \frac{1}{\left(x^2y-2xy^2\right)x+\left(-x^3+3x^2y\right)y} = \frac{1}{x^2\,y^2}$$

దత్త సమీకరణమును $\dfrac{1}{x^2y^2}$ తో గుణించగా,

$$\left(\frac{x^2y-2xy^2}{x^2y^2}\right)dx+\left(\frac{-x^3+3x^2y}{x^2y^2}\right)dy=0$$

ఇక్కడ $M_1 = \dfrac{x^2y-2xy^2}{x^2y^2}$ $\qquad N_1 = \dfrac{-x^3+3x^2y}{x^2y^2}$

$= \dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{x}$ $\qquad = -\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{3}{y}$

$\therefore \dfrac{\partial M_1}{\partial y} = -\dfrac{1}{y^2}$ $\qquad \dfrac{\partial N_1}{\partial n} = -\dfrac{1}{y^2}$

$\therefore \dfrac{\partial M_1}{\partial y} = \dfrac{\partial N_1}{\partial x}$

ఇప్పుడు దత్త సమీకరణము యథార్థ అవకలన సమీకరణము అని స్పష్టము.

ఇపుడు $V = \int_{Y\ \text{constant}} M_1\,dx = \int\left(\dfrac{1}{y}-{}^{2}\!/_{x}\right)dx = {}^{x}\!/_{y} - 2\log x$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$$

$$N_1 - \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}+\frac{3}{y}+\frac{x}{y^2} = \frac{3}{y}$$

ఇపుడు $\int\left(N_1-\frac{\partial V}{\partial y}\right)dy=\int\frac{3}{y}dy=3\log|y|$

$\therefore$ సాధారణ సాధన $\frac{x}{y}-2\log x+3\log|y|=C$

ఉదాహరణ 2 :- $y\left(xy+2x^2y^2\right)dx+x\left(xy-x^2y^2\right)dy=0$ ని సాధించుము.

సాధన :-

ఇది $f(x,y)dx+xg(x,y)dy$ అనే రూపములో ఉన్నది.

ఇక్కడ, $M=y\left(xy+2x^2y^2\right)$ $\qquad N=x\left(xy-x^2y^2\right)$

$=xy^2+2x^2y^3$ $\qquad =x^2y-x^3y^2$

$\therefore\frac{\partial M}{\partial y}=2xy+6x^2y^2$ $\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=2xy-3x^2y^2$

$\therefore\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$

సమాకలన గుణకము $=\frac{1}{Mx-Ny}=\frac{1}{\left(xy^2+2x^2y^3\right)x-\left(x^2y-x^3y^2\right)y}$

$=\frac{1}{3x^3y^3}$

దత్త సమీకరణమును $\frac{1}{3x^3y^3}$ చే గుణించగా

$$\left(\frac{xy^2+2x^2y^3}{3x^3y^3}\right)dx+\left(\frac{x^2y-x^3y^2}{3x^3y^3}\right)dy=0$$

ఇపుడు $M_1=\frac{1}{3x^2y}+\frac{2}{3x}$ $\qquad N_1=\frac{1}{3xy^2}-\frac{1}{3y}$

$\Rightarrow\frac{\partial M_1}{\partial y}=-\frac{1}{3x^2y^2}$ $\qquad \Rightarrow\frac{\partial N_1}{\partial x}=-\frac{1}{3x^2y^2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial x}.$$

ఇపుడు దత్త సమీకరణము యథార్థ అవకలన సమీకరణము అని స్పష్టము.

$$V = \int_{y\ \text{స్థిరము}} M_1 dx = \int \frac{1}{3x^2y} + \frac{2}{3x} dx = \frac{-1}{3xy} + \frac{2}{3}\log|x|$$

$$\therefore \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{3xy^2}$$

$$N_1 - \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{3xy^2} - \frac{1}{3y} - \frac{1}{3xy^2} = -\frac{1}{3y}$$

ఇపుడు $\int\left(N_1 - \frac{\partial V}{\partial y}\right)dy = \int \frac{-1}{3y}dy = -\frac{1}{3}\log|y|$

సాధారణ సాధన $\frac{-1}{3xy} + \frac{2}{3}\log|x| - \frac{1}{3}\log|y| = C$

ఉదాహరణ 3 :- $\left(3xy - 2ay^2\right)dx + \left(x^2 - 2axy\right)dy = 0$ అని సాధించుము.

సాధన :- ఇక్కడ $M = 3xy - 2ay^2$ $\qquad N = x^2 - 2axy$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 3x - 4ay \qquad \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 2x - 2ay$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

ఇపుడు $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{x^2 - 2axy}(3x - 4ay - 2x + 2ay)$

$$= \frac{x - 2ay}{x(x - 2ay)} = \frac{1}{x} = f(x)$$

ఇది x లో మాత్రమే ప్రమేయము కావున సమాకలన గుణకము $= e^{\int f(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\log x} = x$

దత్త సమీకరణమును 'x'చే గుణించగా,

$$\left(3x^2y - 2axy^2\right)dx + \left(x^3 - 2ax^2y\right)dy = 0$$

ఇక్కడ $M_1 = 3x^2y - 2axy^2$ $\qquad N_1 = x^3 - 2ax^2y$

$$\Rightarrow \frac{\partial M_1}{\partial y} = 3x^2 - 4axy \qquad \Rightarrow \frac{\partial N_1}{\partial x} = 3x^2 - 4axy$$

$$\therefore \frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial x}\cdot$$

ఇపుడు దత్త సమీకరణము యథార్థ అవకలన సమీకరణము అని స్పష్టము.

ఇపుడు $V = \underset{y\ \text{స్థిరము}}{\int M_1 dx} = \int\left(3x^2y - 2axy^2\right)dx$

$$= x^3y - ax^2y^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = x^3 - 2ax^2y$$

$$\therefore N_1 - \frac{\partial V}{\partial y} = \left(x^3 - 2ax^2y\right) - \left(x^3 - 2ax^2y\right) = 0$$

$$\therefore \int\left(N_1 - \frac{\partial V}{\partial y}\right)dy = \int 0\, dy = 0$$

సాధారణ సాధన $x^3y - ax^2y^2 = C$.

ఉదాహరణ 4 :- $\left(xy^3 + y\right)dx + 2\left(x^2y^2 + x + y^4\right)dy = 0$ ని సాధించుము.

సాధన :- ఇక్కడ $M = xy^3 + y \qquad N = 2x^2y^2 + 2x + 2y^4$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 3xy^2 + 1 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 4xy^2 + 2$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x},$$

ఇపుడు $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{1}{xy^3 + y}\left(4xy^2 + 2 - 3xy^2 - 1\right)$

$$= \frac{1}{y\left(xy^2 + 1\right)}\left(xy^2 + 1\right) = \frac{1}{y} = g(y)$$

ఇది y లో మాత్రమే ప్రమేయమని స్పష్టము.

సమాకలన గుణకము $= e^{\int g(y)dy}$

$$= e^{\int \frac{1}{y}dy} = e^{\log|y|} = |y|$$

దత్త సమీకరణమును y చే గుణించగా

$$\left(xy^4+y^2\right)dx+\left(2x^2y^3+2xy+2y^5\right)dy=0$$

ఇక్కడ $M_1=xy^4+y^2 \qquad N_1=2x^2y^3+2xy+2y^5$

$$\Rightarrow \frac{\partial M_1}{\partial y}=4xy^3+2y,\ \frac{\partial N_1}{\partial x}=4xy^3+2y$$

$$\therefore \frac{\partial M_1}{\partial y}=\frac{\partial N_1}{\partial x}$$

$\therefore$ ఇపుడు దత్త సమీకరణము యథార్థ అవకలన సమీకరణము అని స్పష్టము.

ఇపుడు $V=\int\limits_{y\ \text{స్థిరము}} M_1dx=\int\left(xy^4+y^2\right)dx=\frac{x^2y^4}{2}+y^2x$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial y}=2x^2y^3+2xy$$

$$\therefore N_1-\frac{\partial V}{\partial y}=2x^2y^3+2xy+2y^5-2x^2y^3-2xy=2y^5$$

ఇపుడు $\int\left(N_1-\frac{\partial V}{\partial y}\right)dy=\int 2y^5dy=\frac{y^6}{3}$

సాధారణ సాధన $\frac{x^2y^4}{2}+xy^2+\frac{y^6}{3}=C$

సూచనా సమస్యలు :-

ఈ క్రింది అవకలన సమీకరణాలను సాధించుము.

(1) $y^2dx+\left(x^2-xy-y^2\right)dy=0$

(2) $x^2ydx-\left(x^3+y^3\right)dy=0$

(3) $\left(x^2y^2+xy+1\right)ydx+\left(x^2y^2-xy+1\right)x\,dy=0$

(4) $\left(xy\sin xy+\cos xy\right)ydx+\left(xy\sin xy-\cos xy\right)x\,dy=0$

(5) $2xydy-\left(x^2+y^2+1\right)dx=0$

(6) $\left(x^2+y^2+x\right)dx+xydy=0$

(7) $\left(y^4+2y\right)dx+\left(xy^3+2y^4-4x\right)dy=0$

(8) $\left(y+y^2\right)dx+xydy=0$

ప్రయోగము - 2

సరళ అవకలన సమీకరణములు

ఉద్దేశ్యము :-

సరళ అవకలన సమీకరణములను లేదా సరళ అవకలన సమీకరణములుగా మార్చగలిగిన అవకలన సమీకరణములను సాధించుట.

నిర్వచనములు :-

(1) $P(x), Q(x)$లు xలో ప్రమేయాలయిన, $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ రూపములోని అవకలన సమీకరణము, yలో ప్రథమ పరిమాణ సరళ అవకలన సమీకరణము అంటారు.

(2) $P(y), Q(y)$లు yలో ప్రమేయాలయిన, $\frac{dx}{dy}+P(y)x=Q(y)$ రూపములోని అవకలన సమీకరణమును, xలో ప్రథమ పరిమాణ సరళ అవకలన సమీకరణము అంటారు.

(3) P ,Qలు xలో మాత్రమే ప్రమేయాలయిన $\frac{dy}{dx}+Py=Qy^n$ రూపములోని సమీకరణమును బెర్నోలి అవకలన సమీకరణము అంటారు.

ఉపయోగించిన ఫలితములు (Results Used) :-

(1) సరళ అవకలన సమీకరణము $\frac{dy}{dx}+P\cdot y=Q$ యొక్క సాధారణ సాధన $ye^{\int Pdx}=\int Q\, e^{\int Pdx}\,dx+c$

(2) సరళ అవకలన సమీకరణము $\frac{dx}{dx}+P\cdot x=Q$ యొక్క సాధారణ సాధన $x\cdot e^{\int Pdy}=\int Q\cdot e^{\int Pdy}dy+c$

విధానము (Procedure) **(సాధించే పద్ధతి) :-**

ఒకటవ అంచె :- దత్త సమీకరణమును $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ లేదా $\frac{dx}{dy}+P(y)x=Q(y)$ రూపములోనికి మార్చవలెను.

రెండవ అంచె :- సమాకలన గుణకము $e^{\int Pdx}$ కాని $e^{\int Pdy}$ కనుగొందాము.

మూడవ అంచె :- దత్త సమీకరణము యొక్క సాధారణ సాధన

$$y\cdot e^{\int Pdx}=\int Q\cdot e^{\int Pdx}dx+c \text{ లేదా } x\cdot e^{\int Pdy}=\int Qe^{\int Pdy}dy+c$$

అనే ఫలితము ద్వారా కనుక్కుంటాము.

ఉదాహరణ 1 :- $x^3\dfrac{dy}{dx}+\left(2-3x^2\right)y=x^3$ ని సాధించుము.

సాధన :- దత్త సమీకరణము, $x^3\dfrac{dy}{dx}+\left(2-3x^2\right)y=x^3$

దత్త సమీకరణమును x^3 చే భాగించగా

$$\frac{dy}{dx}+\left(\frac{2-3x^2}{x^3}\right)y=1$$

ఇక్కడ $P=\dfrac{2-3x^2}{x^3},\ \ Q=1$

$$=\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x}$$

ఇపుడు $e^{\int P dx}=e^{\int \frac{2}{x^3}-\frac{3}{x}dx}$

$$=e^{2\cdot\frac{-1}{2x^2}-3\log x}$$

$$=e^{-\frac{1}{x^2}-\log x^3}$$

$$=e^{-\frac{1}{x^2}+\log x^{-3}}$$

$$=e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot e^{\log x^{-3}}$$

$$=e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{1}{x^3}$$

సాధారణ సాధన $y\cdot e^{\int P dx}=\int Q e^{\int P dx}\,dx$

$$=\frac{1}{2}\int e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{2}{x^3}dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{x^2}} + C \quad \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{x^2} = t \\ \Rightarrow \frac{2}{x^3} dn = dt \end{array} \right.$$ అనుకొనుము

ఉదాహరణ 2 :- $\left(x + 2y^3\right)\frac{dy}{dx} = y$ ని సాధించుము.

సాధన :- దత్త అవకలన సమీకరణము $\left(x + 2y^3\right)\frac{dy}{dx} = y$

$$\Rightarrow x + 2y^3 = y\frac{dx}{dy}$$

$$\Rightarrow y\frac{dx}{dy} - x = 2y^3$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = 2y^2 \text{ .... (1)}$$

(1) x లో సరళ అవకలన సమీకరణము.

ఇక్కడ $P = -\frac{1}{y}$ $\qquad Q = 2y^2$

$$\therefore e^{\int P dy} = e^{\int -\frac{1}{y} dy} = e^{-\log y} = e^{\log \frac{1}{y}} = \frac{1}{y}$$

సాధారణ సాధన $x \cdot e^{\int P dy} = \int Q \cdot e^{\int P dy} dy$

$$\Rightarrow x \cdot \frac{1}{y} = \int 2y^2 \cdot \frac{1}{y} dy$$

$$= y^2 + c$$

సాధారణ సాధన $\frac{x}{y} = y^2 + c$ లేదా $x = y^3 + cy$

ఉదాహరణ 3 :- $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x-1}=xy^{\frac{1}{3}}$ ని సాధించుము.

సాధన :-

దత్త సమీకరణము $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x-1}=xy^{\frac{1}{3}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^{\frac{1}{3}}}\frac{dy}{dx}+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x-1}=x \text{ ----------- (1)}$$

$y^{\frac{2}{3}}=u$ అనుకొందాము ------- (2)

x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^{\frac{1}{3}}}\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}\frac{du}{dx} \text{ ------ (3)}$$

(2) మరియు (3)లను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\frac{3}{2}\frac{du}{dx}+\frac{u}{x-1}=x$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx}+\frac{2}{3}\frac{u}{(x-1)}=\frac{2}{3}x$$

ఇది 'u'లో సరళ అవకలన సమీకరణము

ఇక్కడ $P=\frac{2}{3(x-1)}$ $\qquad Q=\frac{2}{3}x$

$$e^{\int Pdx}=e^{\int\frac{2}{3(x-1)}dx}=e^{\frac{2}{3}\log|x-1|}=e^{\log(x-1)^{\frac{2}{3}}}=(x-1)^{\frac{2}{3}}$$

సాధారణ సాధన $u\cdot(x-1)^{\frac{2}{3}}=\int\frac{2}{3}x(x-1)^{\frac{2}{3}}\,dx$

$$=\frac{2}{3}x\int(x-1)^{\frac{2}{3}}\,dx-\int\left(\frac{2}{3}\int(x-1)^{2/3}\,dx\right)dx+c$$

$$=\frac{2}{3}x\frac{(x-1)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}-\frac{2}{3}\int\frac{(x-1)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}dx+c$$

$$=\frac{2}{5}x(x-1)^{\frac{5}{3}}-\frac{2}{5}\cdot\frac{(x-1)^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}}+C$$

$$=\frac{2}{5}x(x-1)^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{20}(x-1)^{\frac{8}{3}}+C$$

$\therefore$ సాధారణ సాధన $\quad y^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{5}x(x-1)^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{20}(x-1)^{\frac{8}{3}}+C$

ఉదాహరణ 4 :- $\frac{dy}{dx}-y\tan x=\frac{\sin x\cos^2 x}{y^2}$ ని సాధించుము.

సాధన :- దత్త అవకలన సమీకరణము $\frac{dy}{dx}-y\tan x=\frac{\sin x\cos^2 x}{y^2}$ దత్త సమీకరణము బెర్నోలి రూపములో యున్నది.

దత్త సమీకరణము y^2 చే గుణించగా,

$$y^2\frac{dy}{dx}-y^3\tan x=\sin x\cos^2 x \text{ --------- (1)}$$

$y^3=u$ అనుకొనుము ------- (2)

x దృష్ట్యా అవకలనము చేయుగా

$$3y^2\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow y^2\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}\frac{du}{dx} \text{ --------- (3)}$$

(2), (3)లను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా,

$$\frac{1}{3}\frac{du}{dx}-u\text{Tan}x=\sin x\cos^2 x$$

$\Rightarrow\frac{du}{dx}-3u\,\text{Tan}x=3\sin x\cos^2 x$, ఇది uలో సరళ అవకలన సమీకరణము.

ఇక్కడ $P=-3\text{Tan}x \qquad Q=3\sin x\cos^2 x$

$$e^{\int P dx} = e^{\int -3\,\mathrm{Tan}\,x dx} = e^{-3\log\cos x} = e^{\log\frac{1}{\sec^3 x}}$$

$$= \frac{1}{\sec^3 x} = \cos^3 x$$

సాధారణ సాధన $u \cdot \cos^3 x = \int 3\sin x \cos^2 x \cdot \cos^3 x\, dx$

$$\Rightarrow y^3 \cos^3 x = \int 3\sin x \cos^5 x\, dx$$

$$= -\int 3\cos^5 x \sin x\, dx$$

$$= \frac{-3\cos^6 x}{6} + c \qquad [\text{Put} \cos x = t \Rightarrow \sin x\, dx = dt]$$

$$= \frac{\cos^6 x}{2} + c$$

సాధారణ సాధన $y^3 \cos^3 x = \dfrac{\cos^6 x}{2} + c$

సూచనా సమస్యలు :-

ఈ క్రింది అవకలన సమీకరణాలను సాధించండి.

(1) $x(x-1)\dfrac{dy}{dx} - (x-2)y = x^3(2x-1)$

(2) $x(1-x^2)\dfrac{dy}{dx} + (2x^2-1)y = ax^2$

(3) $\left(y - e^{\sin^{-1}x}\right)\dfrac{dx}{dy} + \sqrt{1-x^2} = 0, |x| < 1$

(4) $(1+y^2) + \left(x - e^{\mathrm{Tan}^{-1}y}\right)\dfrac{dy}{dx} = 0$

(5) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2}{x}y = 3x^2 y^{\frac{4}{3}}$

(6) $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{x}{1-x^2} = xy^{-\frac{1}{2}}$

(7) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{\tan y}{1+x} = (1+x)e^x \sec y$

(8) $\dfrac{dy}{dx} = e^{x-y}\left(e^x - e^y\right)$

ప్రయోగము - 3

సంపూర్ణ అవకలన సమీకరణాలు

ఉద్దేశ్యము :- సంపూర్ణ అవకలన సమీకరణ సరణిను సాధించుట.

నిర్వచనములు :-

(1) P, Q, R లు x, y, z లలో ప్రమేయాలవుతూ, $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ రూపంలోని సమీకరణాన్ని సంపూర్ణ అవకలన సమీకరణము అంటారు.

(2) $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ రూపంలోని సమీకరణాలను సంపూర్ణ అవకలన సమీకరణ సరణి అంటారు.

విధానము A:- దత్త సమీకరణాల సరణి $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ -------- (1)

ఒకటవ అంచె :- పై మూడు సమీకరణాల సమితులు

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q},\ \frac{dx}{P} = \frac{dz}{R},\ \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \text{ ------------ (2)}$$

రెండవ అంచె :- (2)లోని ఏవైనా రెండు సమీకరణాలు సమాకలనీయమైతే చలరాశుల విభజన పద్ధతి ద్వారా వాటిని సాధించగా ఏర్పడే సాధనాల జత కలసి (1)కు సాధారణ సాధన అవుతుంది.

మూడవ అంచె : (2)లోని ఏదో ఒక్క సమీకరణమే సమాకలనీయమైతే చలరాశుల విభజన పద్ధతి ద్వారా దానిని సాధించగా వచ్చే సాధనను వేరొక సమీకరణంలో ఉపయోగించిన దానిని సాధించవచ్చు. ఈ సాధనల జత కలసి (1)కు సాధారణ సాధన అవుతుంది.

విధానము : సాధనా పద్ధతి (Procedure) - B **గుణకాల పద్ధతి :-**

(2)లోని ఏ ఒక్క సమీకరణం సమాకలనం కాకపోతే (1)ను ఇలా వ్రాయవచ్చు.

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{\ell_1 dx + m_1 dy + n_1 dz}{\ell_1 P + m_1 Q + n_1 R} = \frac{\ell_2 dx + m_2 dy + n_2 dz}{\ell_2 P + m_2 Q + n_2 R}$$

(ℓ_1, m_1, n_1 మరియు ℓ_2, m_2, n_2 లను గుణకాలు అంటారు).

నాల్గవ అంచె :- $\ell_1 P + m_1 Q + n_1 R = 0$, $\ell_2 P + m_2 Q + n_2 R = 0$ అయ్యే విధంగా ℓ_1, m_1, n_1, ℓ_2, m_2, n_2 లను ఎన్నుకొంటే అపుడు

$\ell_1 dx + m_1 dy + n_1 dz = 0$ మరియు $\ell_2 dx + m_2 dy + n_2 dz = 0$ అవుతుంది.

వీటిని సమాకలనం చేయగా వచ్చే సాధనలు కలసి (1)కు సాధారణ సాధన అవుతుంది.

ఐదవ అంచె :- $\ell_1P + m_1Q + n_1R \neq 0, \dfrac{\ell_1dx + m_1dy + n_1dz}{\ell_1P + m_1Q + n_1R} = d\phi$ మరియు

$\ell_2P + m_2Q + n_2R \neq 0, \dfrac{\ell_2dx + m_2dy + n_2dz}{\ell_1P + m_2Q + n_2R} = d\psi$ అయ్యే

విధంగా ℓ_1, m_1, n_1 , ℓ_2, m_2, n_2 ఎన్నుకొంటే

$\phi(x, y, z) = C_1, \psi(x, y, z) = C_2$ కలసి (1)కు సాధారణ సాధన అవుతుంది.

ఉదాహరణ 1 :- $\dfrac{x\,dx}{y^2Z} = \dfrac{dy}{x^2z} = \dfrac{dz}{y^2}$ సమీకరణాల సరణిను సాధించండి.

$\dfrac{xdx}{y^2z} = \dfrac{dy}{x^2z}$ ను తీసుకొనగా

$\Rightarrow x^3dx = y^2dy$

సమాకలనం చేయగా

$$\int x^3dx = \int y^2dy \Rightarrow \frac{x^4}{4} = \frac{y^3}{3} + C_1$$

$$\Rightarrow 3x^4 - 4y^3 = C_1 \text{----------} (1)$$

మరియు $\dfrac{xdx}{y^2z} = \dfrac{dz}{y^2}$ ను తీసుకొనగా

$$\Rightarrow xdx = zdz$$

సమాకలనం చేయగా

$$\int xdx = \int zdz$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{z^2}{2} + \frac{C_2}{2} \Rightarrow x^2 - z^2 = C_2 \text{-------------} (2)$$

$\therefore$ $3x^4 - 4y^3 = C_1;\ x^2 - z^2 = C_2$ అనే రెండు సమీకరణాలు దత్త సరణికు సాధారణ సాధన C_1, C_2 లు యాధృచ్ఛిక స్థిరరాశులు.

ఉదాహరణ 2 :- $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{-2}=\frac{dz}{3x^2\sin(y+2x)}$ సమీకరణాల సరణిను సాధించండి.

$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{-2}$ ను తీసుకొనగా,

సమాకలనం చేయగా

$-2\int dx=\int dy$

$\Rightarrow y+2x=C_1$ ----------- (1)

ఇపుడు $\frac{dx}{1}=\frac{dz}{3x^2\sin(y+2x)}$ తీసుకొందాము.

$\Rightarrow dx=\frac{dz}{3x^2\sin C_1}$ ((1) నుండి)

$\Rightarrow 3x^2\sin C_1\ dx=dz$

ఇరువైపులా సమాకలనం చేయగా

$3\sin C_1\int x^2dx=\int dz\Rightarrow 3\sin C_1\frac{x^3}{3}=z+C_2$

$\Rightarrow x^3\sin(y+2x)-z=C_2$ --------- (2)

$\therefore$ దత్త సరణికి సాధారణ సాధన, $y+2x=C_1,\ x^3\sin(y+2x)-z=C_2$

ఉదాహరణ 3 :- $\frac{dx}{x(y-z)}=\frac{dy}{y(z-x)}=\frac{dz}{z(x-y)}$ సరణి సాధించండి.

రెండవ పద్ధతిని ఉపయోగించి

1,1,1లను గుణకాలుగా తీసుకొనగా

ప్రతిభిన్నం $=\frac{dx+dy+dz}{x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)}$

$=\frac{dx+dy+dz}{0}$

$$\Rightarrow dx + dy + dz = 0$$

సమాకలనం చేయగా $x + y + z = C_1$ ------- (1)

$\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$ లను గుణకాలుగా తీసుకొనగా

$$\text{ప్రతిభిన్నం} = \frac{\frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy + \frac{1}{z}dz}{\frac{1}{x}x(y-z) + \frac{1}{y}(z-x) + \frac{1}{z}z(x-y)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy + \frac{1}{z}dz = 0$$

సమాకలనం చేయగా

$$\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{y}dy + \int \frac{1}{z}dz = \int 0$$

$$\Rightarrow \log x + \log y + \log z = \log C_2 \quad \Rightarrow \log xyz = \log C_2$$

$$\Rightarrow xyz = C_2 \text{ -------- (2)}$$

$\therefore$ (1), (2) కలసి దత్త సరణికు సాధారణ సాధన అవుతుంది.

సూచన సమస్య.లు :-

ఈ క్రింది సరణులను సాధించండి.

1) $\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{x^2} = \frac{dz}{x^2y^2z^2}$

2) $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z}$

3) $\frac{dx}{-y^2 - z^2} = \frac{dy}{xy} = \frac{dz}{zx}$

4) $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{2x - 3y}$

5) $\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$

6) $\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{(x+y)z}$

ప్రయోగము - 4

ప్రథమ పరిమాణ ఏకాధిక ఘాత అవకలన సమీకరణాలు

ఉద్దేశ్యం :- ప్రథమ పరిమాణ ఏకాధిక ఘాత అవకలన సమీకరణమునకు సాధారణ సాధన కనుగొనుట.

నిర్వచనములు :-

(1) $f(x,y,p)=0$ రూపంలోని సమీకరణాన్ని ప్రథమ పరిమాణ ఏకాధిక ఘాత అవకలన సమీకరణం అంటారు. ఇచ్చుట $P=\frac{dy}{dx}$ మరియు 'p' ప్రథమ ఘాతంలో ఉండనవసరం లేదు.

(2) $y=px+\phi(p)$ రూపంలోని సమీకరణాన్ని క్లేరో సమీకరణం అంటారు.

విధానం :- దత్త సమీకరణం $f(x,y,p)=0$ ---------- (1)

ఒకటవ అంచె :- (1) ను 'P'లలో n ఏకఘాత కారణాంకాల లబ్ధంగా వ్రాస్తే ప్రతి కారణాంకానికి చలరాశుల విభజన పద్ధతి ద్వారా వచ్చే సాధనలు

$F_1(x,y,c_1)=0, F_2(x,y,c_2)=0,\cdots\cdots,F_n(x,y,c_n)=0$ అనుకుంటే

$F_1(x,y,c)\cdot F_2(x,y,c)\cdots\cdots,F_n(x,y,c)=0$, (1)కు సాధారణ సాధన అవుతుంది.

అక్కడ $c_1=c_2=\cdots\cdots c_n=c$ యాధృచ్ఛిక స్థిరరాశి.

రెండవ అంచె :- (1)ను 'P'లలో ఏక ఘాత కారణాంకాల లబ్ధంగా వ్రాయలేనపుడు మరియు (1)ను $y=F(x,p)$ రూపంలో వ్రాయగలిగితే దీనిని x దృష్ట్యా అవకలనం చేయాలి. అపుడు ఏర్పడే సమీకరణం $P=\phi\left(x,P,\frac{dP}{dx}\right)$ రూపంలో ఉంటుంది. దీనిని సాధించగా వచ్చే సాధన నుండి, (1) సహాయంతో 'P'ను తొలగించగా ఏర్పడే సమీకరణమే (1)కు సాధారణ సాధన అవుతుంది.

మూడవ అంచె :- (1)ను $x=F(y,P)$ రూపంలో వ్రాయగలిగితే దానిని 'y' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా $\frac{1}{p}=\phi\left(y,p,\frac{dp}{dy}\right)$ రూపంలో సమీకరణం ఏర్పడుతుంది. దీనిని సాధించి వచ్చే సాధన నుండి (1) సహాయంతో 'P'ను తొలగిస్తే వచ్చే సమీకరణమే (1)కు సాధారణ సాధన అవుతుంది.

నాల్గవ అంచె :- (1)ను $y=Px+\phi(P)$ (క్లేరో రూపం) రూపంలో వ్రాయగలిగితే ఈ సమీకరణం నుండి 'P'కి బదులు 'C' వ్రాస్తే (1)కి సాధారణ సాధన అవుతుంది.

గమనిక :- $x^2 = X,\ y^2 = Y$ ప్రతిక్షేపణల ద్వారా దత్త సమీకరణాన్ని "క్లేరో" రూపంలో వ్రాయవచ్చు.

ఉదాహరణ 1 :- $x^2p^2 + 3xyp + 2y^2 = 0$ ను సాధించండి.

సాధన :- దత్త అవకలన సమీకరణం $x^2p^2 + 3xyp + 2y^2 = 0$ -------- (1)

$$\Rightarrow x^2p^2 + 2xyp + xyp + 2y^2 = 0$$

$$\Rightarrow xp(xp + 2y) + y(xp + 2y) = 0$$

$$\Rightarrow (xp + y)(xp + 2y) = 0$$

$xp + 2y = 0$ $xp + y = 0$

$\Rightarrow x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$ $\Rightarrow x\dfrac{dy}{dx} = -y$

$\Rightarrow x\dfrac{dy}{dx} = -2y$ $\Rightarrow \dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{x}$

సమాకలనం చేయగా   సమాకలనం చేయగా

$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = -2\int \frac{dx}{x}$ $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$

$\log y = -2\log x + \log c$ $\Rightarrow \log y + \log x = \log c$

$\Rightarrow yx^2 = c \Rightarrow x^2y - c = 0$ $\Rightarrow xy = c$

$$\Rightarrow xy - c = 0$$

$\therefore$ (1)కు సాధారణ సాధన $\left(x^2y - c\right)(xy - c) = 0$

ఉదాహరణ 2 :- $x^3p^2 + x^2yp + 4 = 0$ ను సాధించుము.

సాధన :- దత్త సమీకరణం $x^3p^2 + x^2yp + 4 = 0$ --------- (1)

$$\Rightarrow y = \frac{-4 - x^3p^2}{x^2p}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-4}{x^2p} - xP$$

$y = f(x, p)$ రూపం కావున 'y' కోసం సాధించాలి

$\therefore$ 'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$p = \frac{4}{\left(x^2 p\right)^2}\left[2xp + x^2\frac{dp}{dx}\right] - \left[p + x\frac{dp}{dx}\right]$$

$$\Rightarrow 2p + x\frac{dp}{dx} = \frac{4\left(2p + x\frac{dp}{dx}\right)x}{x^4 p^2}$$

$$\Rightarrow \left(2p + x\frac{dp}{dx}\right)\left(1 - \frac{4}{x^3 p^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 2p + x\frac{dp}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{p} + 2\frac{dx}{x} = 0$$

సమాకలనం చేయగా

$$\int\frac{dp}{p} + 2\int\frac{dx}{x} = \int 0$$

$$\Rightarrow \log p + 2\log x = \log c$$

$$\Rightarrow px^2 = c \text{ ---------- (2)}$$

(1), (2)ల నుండి 'P'ను తొలగించగా $x^3\left(\frac{c^2}{x^4}\right) + x^2 y\left(\frac{c}{x^2}\right) + 4 = 0$

$\therefore$ (1) కు సాధారణ సాధన $c^2 + cxy + 4x = 0$

ఉదాహరణ (3) :- $y^2 \log y = xpy + p^2$ ను సాధించండి.

సాధన :- దత్త సమీకరణం $y^2 \log y = xpy + p^2$ --------- (1)

$$\Rightarrow x=\frac{y^2\log y-p^2}{py}=\frac{y\log y}{p}-\frac{p}{y}$$

$x=f(y,p)$ రూపం కావున 'x' కోసం సాధించాలి.

'y' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{1}{p}=\frac{\left[\log y+y\frac{1}{y}\right]p-y\log y\frac{dp}{dy}}{p^2}-\frac{\left[y\frac{dp}{dy}-p\right]}{y^2}$$

p^2y^2 తో గుణించగా

$$py^2=(1+\log y)py^2-y^3\log y\frac{dp}{dy}-p^2\left(y\frac{dp}{dy}-p\right)$$

$$\Rightarrow y\frac{dp}{dy}\left(y^2\log y+p^2\right)=p\left(y^2\log y+p^2\right)$$

$$\Rightarrow y\frac{dp}{dy}=p$$ $\left(\left(y^2\log y+p^2\right)\right.$ కారణాంకాన్ని వదలివేయగా)

$$\Rightarrow\frac{dp}{p}=\frac{dy}{y}$$

ఇరువైపులా సమాకలనం చేయగా

$$\log p=\log y+\log c$$

$$\Rightarrow p=cy \text{ --------- (2)}$$

(1), (2)ల నుండి p ను తొలగించగా $y^2\log y=x(cy)y+(cy)^2$

$\log y-cx-c^2=0$ (1)కు సాధారణ సాధన అవుతుంది.

ఉదాహరణ 4 :- $x^2(y-px)=yp^2$ ను క్లేరో రూపంలోకి మార్చి సాధించండి.

సాధన :- దత్త సమీకరణం $x^2(y-px)=yp^2$ -------- (1)

$$\Rightarrow y-px=\frac{yp^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow y^2 - pxy = \left(\frac{yp}{x}\right)^2 \text{ ---------- (2)}$$ (y తో గుణించగా)

$x^2 = X$, $y^2 = y$ ప్రతిక్షేపించగా

$$2xdx = dX,\ 2ydy = dY$$

$\frac{dy}{dx} = p$ $\qquad$ $\frac{dY}{dX} = P$ అనుకొనుము.

$$\therefore \frac{dY}{dX} = \frac{2ydy}{2xdx} \Rightarrow P = \frac{yp}{x}$$

$$\Rightarrow Px^2 = pxy \Rightarrow PX = pxy$$

వీటిని (2)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$Y - PX = P^2$$

$\Rightarrow Y = PX + P^2$ ఇది క్లేరో రూపం

$\therefore$ (1)కు సాధారణ సాధన $Y = CX + C^2$

$\Rightarrow y^2 = cx^2 + c^2$ c యాధృచ్ఛిక స్థిరరాశి

సూచన సమస్యలు :-

ఈ క్రింది సమీకరణాలను సాధించండి.

1) $xy\left(p^2+1\right) = \left(x^2+y^2\right)p$

2) $p^3 + \left(2x - y^2\right)p^2 = 2xy^2p$

3) $px + y - p^2x^4 = 0$

4) $xp^3 - 2yp^2 + 4x^2 = 0$

5) $p^3 - 4xyp + 8y^2 = 0$

6) $4xp^2 + 4yp - y^4 = 0$

7) $(px - y)(py + x) = 2p$ ను క్లేరో రూపంలోకి మార్చి సాధించండి.

8) $y = 2px + p^2y$ ను క్లేరో రూపంలోకి మార్చి సాధించండి.

ప్రయోగము - 5

అశూన్య సమానక సమీకరణములు - I

ఉద్దేశ్యము :- x లో శూన్యేతర బహుపది $Q(x)$ అయినపుడు ఒక అశూన్య సమానక ఋజు అవకలన సమీకరణము $f(D)y = Q(x)$ ను సాధించుట.

సూత్రములు :- (1) $\frac{1}{D}x^m = \frac{x^{m+1}}{m+1}$

(2) $(1+D)^{-1} = 1 - D + D^2 - D^3 + D^4 - \cdots\cdots$

(3) $(1-D)^{-1} = 1 + D + D^2 + D^3 + D^4 + \cdots\cdots$

(4) $(1+D)^{-2} = 1 - 2D + 3D^2 - 4D^3 + \cdots\cdots$

(5) $(1-D)^2 = 1 + 2D + 3D^2 - 4D^3 + \cdots\cdots$

విధానము :-

Step (1) : సహాయక సమీకరణం $f(m) = 0$ ను వ్రాయుము.

Step (2) : $f(m) = 0$ యొక్క మూలములు కనుగొనుము.

Step (3) : (C.F.) పూరక ప్రమేయమును వ్రాయుము.

Step (4) : $f(D) = CD^m(1+\psi(D))^n$ గా $f(D)$ ని వ్రాయుము.

Step (5) : సరియగు సూత్రమునుపయోగించి $(1+\psi(D))^{-n}$ ను విస్తరించుము.

Step (6) : $Q(x)$ లోని ప్రతి పదమునకు $CD^{-m}(1+\psi(D))^{-n}$ పరికర్తను ఉపయోగించుము.

Step (7) : Step (6) లో రాబట్టిన పదాల మొత్తమును ప్రత్యేక సమాకలని (P.I.) గా వ్రాయుము.

Step (8) : సాధారణ సాధన $y = C.F. + P.I.$ ను వ్రాయుము.

ఉదాహరణ 1 :- $(D-1)y = x^3$

సహాయక సమీకరణము A.E. $m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$

$$\therefore C.F. = y_c = c_1 e^x$$

$$P.I. = y_p = \frac{1}{D-1}x^3 = \frac{-1}{1-D}x^3 = -(1-D)^{-1}x^3$$

$$= -\left(1 + D + D^2 + D^3 + D^4 + \cdots\right)x^3$$

$$= -\left(x^3 + 3x^2 + 6x + 6\right)$$

$\therefore$ సాధారణ సాధన $y = y_c + y_p$

$$y = c_1 e^x - \left(x^3 + 3x^2 + 6x + 6\right)$$

ఉదాహరణ 2 :- $\left(D^2 + D + 1\right)y = x^2$

సహాయక సమీకరణము $m^2 + m + 1 = 0 \Rightarrow m = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$

C.F.= $y_c = e^{-\frac{x}{2}}\left[c_1 \cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right]$

P.I. $= y_p = \dfrac{1}{D^2 + D + 1}x^2$

$$= \frac{1}{1 + \left(D^2 + D\right)}x^2$$

$$= \left[1 + \left(D^2 + D\right)\right]^{-1} x^2$$

$$= \left[1 - \left(D^2 + D\right) + \left(D^2 + D\right)^2 + \cdots\cdots\right]x^2$$

$$= x^2 - (2x + 2) + \left(D^4 + 2D^3 + D^2\right)\left(x^2\right)$$

$$= x^2 - (2x + 2) + 2 = x^2 - 2x$$

సాధారణ సాధన $y = y_c + y_p$

$$y = e^{\frac{-x}{2}}\left[c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right] + x^2 - 2x$$

ఉదాహరణ 3 :- $\left(D^4 - 2D^3 + D^2\right)y = 3x$

సహాయక సమీకరణము A.E. $m^4 - 2m^3 + m^2 = 0$

$$m^2\left(m^2 - 2m + 1\right) = 0$$

$$m^2(m-1)^2 = 0 \Rightarrow m = 0,0,1,1$$

$$\text{C.F.} = y_c = c_1 + c_2x + (c_3 + c_4x)e^x$$

$$\text{P.I.} = y_p = \frac{1}{D^4 - 2D^3 + D^2}\, 3x$$

$$= 3\frac{1}{D^2(1-D)^2}(x)$$

$$= 3\cdot\frac{1}{D^2}(1-D)^{-2}(x)$$

$$= 3\cdot\frac{1}{D^2}\left[1 + 2D + 3D^2 + \cdots\right](x)$$

$$= 3\frac{1}{D^2}(x+2)$$

$$= 3\frac{1}{D}\left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)$$

$$= \frac{x^3}{2} + 3x^2$$

$\therefore$ సాధారణ సాధన $y = y_c + y_p$

$$y = c_1 + c_2x + (c_3 + c_4x)e^x + \frac{x^3}{2} + 3x^2$$

ముగింపు : ఇచ్చిన సమస్యలకు సాధారణ సాధన.

ఉదాహరణ (1)కి $y = c_1e^x - \left(x^3 + 3x^2 + 6x\right) + 6$

ఉదాహరణ (2)కి $y = e^{\frac{-x}{2}}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + x^2 - 2x$

ఉదాహరణ (3)కి $y = c_1 + c_2x + (c_3 + c_4x)e^x + \frac{3}{2} + 3x^2$

విద్యార్థులకు సూచించిన సమస్యలు :-

(i) $\left(D^3 + 2D^2 + D\right) y = x^2 + x$ ను సాధించుము.

(ii) $(D - 1)^2 y = x$ ను సాధించుము.

(iii) $\left(D^3 - 2D + 4\right) y = x^4 + 3x^2 - 5x + 2$ ను సాధించుము.

రచయిత
డా॥ బి. రామిరెడ్డి

ప్రయోగము - 6

అశూన్య సమానక సమీకరణములు - II

ఉద్దేశ్యము :- $Q_j(x) = b_j e^{a_j x}$ అయినపుడు $f(D)y = Q_1(x) + Q_2(x) + \cdots + Q_k(x)$ అనే స్థిర గుణకాలు గల అశూన్య సమానక ఋజు అవకలన సమీకరణమును సాధించుట.

సూత్రము :- (1) $\dfrac{1}{f(D)} b\, e^{ax} = \dfrac{be^{ax}}{f(a)} \quad f(a) \neq 0$

(2) $\dfrac{1}{(D-a)^r} b\, e^{ax} = b \dfrac{x^r}{r!} e^{ax}$

విధానము :-

Step (1) : సహాయక సమీకరణం $f(m) = 0$ ను వ్రాసి దాని యొక్క మూలములు కనుగొనుము.

Step (2) : C.F. పూరక ప్రమేయమును వ్రాయుము.

Step (3) : ప్రతి $j, 1 \le j \le k$ కు $f(D)y = Q_j(x)$ యొక్క ప్రత్యేక సమాకలనిని కనుగొనుము.

Step (4) : $f(a_j) \neq 0$ అయితే ప్రత్యేక సమాకలనిని వ్రాయుట.

$$j = 1, 2, \cdots, k \text{ కు } \quad P \cdot I_j = \frac{be^{a_j x}}{f(a_j)}$$

Step (5) : $f(a_j) = 0$ అయితే $f(D)$ ను $f(D) = (D - a_j)^r\, \psi(D)$గా వ్రాయుము. ఇక్కడ

$$\psi(a_j) \neq 0 \;. \quad j = 1, 2, \cdots, k \text{ కు } \; P.I_j = b \cdot \frac{x^r}{r!} \frac{e^{a_j x}}{\psi(a_j)} \;.$$

Step (6) : $f(D) = Q(x)$ యొక్క P.I.ను క్రింది విధముగా వ్రాయుము.

$$P \cdot I = P \cdot I_1 + P \cdot I_2 + \cdots + P \cdot I_k$$

Step (7) : సాధారణ సాధనను $y = C.F. + P \cdot I$ గా వ్రాయుము.

ఉదాహరణ 1 : $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = e^x$ ను సాధించుము.

సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణము పరిక్రియ రూపములో $\left(D^2-2D+1\right)y=e^x$ అగును.

A.E. $m^2-2m+1=0 \Rightarrow (m-1)^2=0 \Rightarrow m=1,1$

C.F. $y_c=\left(c_1+c_2x\right)e^x$

$$\text{P.I.}=y_p=\frac{1}{D^2-2D+1}e^x=\frac{1}{(D-1)^2}e^x=\frac{x^2}{2!}e^x$$

$\therefore$ సాధారణ సాధన

$$y=y_c+y_p$$

$$y=\left(c_1+c_2x\right)e^x+\frac{x^2}{2!}e^x$$

ఉదాహరణ 2 :- $\left(D^3-5D^2+7D-3\right)y=e^{2x}\cosh x$ సాధించుము.

సాధన :- A.E. $m^3-5m^2+7m-3=0$

$$\Rightarrow (m-1)\left(m^2-4m+3\right)=0$$

$$\Rightarrow (m-1)(m-1)(m-3)=0$$

$$\Rightarrow m=1,1,3$$

C.F. $y_c=\left(c_1+c_2x\right)e^x+c_3e^{3x}$

$$\text{P.I.}=y_p=\frac{1}{D^3-5D^2+7D-3}\,e^{2x}\cosh x$$

$$=\frac{1}{(D-1)^2(D-3)}\cdot e^{2x}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{(D-1)^2(D-3)}\,\frac{1}{2}e^{3x}+\frac{1}{(D-1)^2(D-3)}\,\frac{1}{2}e^x$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{1}{(3-1)^2}\left(\frac{1}{D-3}e^{3x}\right)+\frac{1}{2}\,\frac{1}{(1-3)}\cdot\left(\frac{1}{(D-1)^2}e^x\right)$$

$$=\frac{1}{8}\,\frac{x}{1!}e^{3x}-\frac{1}{4}\,\frac{x^2}{2!}e^x$$

$$= \frac{xe^{3x}}{8} - \frac{x^2e^x}{8}$$

$\therefore$ సాధారణ సాధన

$$y = y_c + y_p$$

$$y = (c_1 + c_2x)e^x + c_3e^{3x} + \frac{xe^{3x}}{8} - \frac{x^2e^x}{8}$$

ఉదాహరణ 3 :- $(4D^2 + 16D + 15)y = 4e^{-\frac{3}{2}x}$ మరియు $x = 0$ వద్ద $Dy = -\frac{11}{2}$, $y = 3$ ను సాధించుము.

సాధన : A.E. $4m^2 + 16m + 15 = 0$

$$\Rightarrow (2m + 3)(2m + 5) = 0$$

$$\Rightarrow m = -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}$$

$$\text{C.F.} = y_c = c_1e^{\frac{-3x}{2}} + c_2e^{-\frac{5x}{2}}$$

$$\text{P.I.} = \frac{1}{4D^2 + 16D + 15} 4\, e^{-\frac{3x}{2}}$$

$$= \frac{4}{(2D + 3)(2D + 5)} e^{-\frac{3}{2}x}$$

$$= \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}} \frac{1}{\left(D + \frac{3}{2}\right)\left(D + \frac{5}{2}\right)} e^{\frac{-3}{2}x}$$

$$= \frac{1}{\left(-\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right)} \cdot \left(\frac{1}{D + \frac{3}{2}} e^{-\frac{3}{2}x}\right)$$

$$= 1 \frac{x}{1!} e^{\frac{-3}{2}x} = xe^{\frac{-3}{2}x}$$

సాధారణ సాధన

$$y = c_1 e^{\frac{-3}{2}x} + c_2 e^{-\frac{5}{2}x} + x e^{\frac{-3}{2}x} \text{ -------------- } (1)$$

$x = 0$ వద్ద $y = 3$ ఇవ్వబడినది.

$$\therefore 3 = c_1 + c_2 \text{ ------------ } (2)$$

$$Dy = -\frac{3}{2} c_1 e^{-\frac{3}{2}x} - \frac{5}{2} c_2 e^{-\frac{5}{2}x} + e^{-\frac{3}{2}x} - \frac{3}{2} x e^{-\frac{3}{2}x}$$

$x = 0$ వద్ద $Dy = -\frac{11}{2}$ ఇవ్వబడినది.

$$\therefore -\frac{11}{2} = -\frac{3}{2} c_1 - \frac{5}{2} c_2 + 1$$

i.e. $3c_1 + 5c_2 = 13$ ----------- (3)

(2) మరియు (3)లను సాధించగా

$$c_1 = 1,\ c_2 = 2$$

$\therefore$ సాధన

$$y = e^{-\frac{3x}{2}} + 2e^{-\frac{5x}{2}} + x e^{-\frac{3x}{2}}$$

$$= (1 + x) e^{-\frac{3}{2}x} + 2e^{-\frac{5}{2}x}$$

ముగింపు :- ఇచ్చిన సమస్యలకు సాధారణ సాధనలు

ఉదాహరణ 1 $(c_1 + c_2 x)e^x + \frac{x^2}{2!} e^x$

ఉదాహరణ 2 $(c_1 + c_2 x)e^x + c_3 e^{3x} + \frac{x e^{3x}}{2} - \frac{x^2 e^x}{8}$

ఉదాహరణ 3 $(1 + x)e^{-\frac{3}{2}x} + 2e^{-\frac{5}{2}x}$

విద్యార్థులకు సూచించిన సమస్యలు :-

(1) $(D^3 - D)y = \cosh x$ ను సాధించుము.

(2) $D^2 y - 2Dy + y = 7e^x$ ను సాధించుము.

(3) $t = 0$ అయినపుడు $x = 0$, మరియు $t = \log_e^2$ అయినపుడు $x = 2(1 + 2t)$ అగునట్లు $(D^2 - 3D + 2)x = e^{2t}$ ను సాధించుము.

రచయిత

డా॥ బి. రామిరెడ్డి

ప్రయోగము - 7

అశూన్య సమానక సమీకరణములు - III

ఉద్దేశ్యము :-

(A) $f(D)y = b\sin ax$ లేక $b\cos ax$ రూపంలో ఉన్న అశూన్య సమానక ఋజు అవకలన సమీకరణమును సాధించుట.

(B) x లో అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయము V అయినపుడు $f(D)y = e^{ax}\cdot V$, రూపములో ఉన్న అశూన్య ఋజు అవకలన సమీకరణమును సాధించుట.

(C) x లో అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయము V అయినపుడు $f(D)y = x\cdot V$ రూపములో ఉన్న అశూన్య ఋజు అవకలన సమీకరణమును సాధించుట.

సూత్రములు :- $\phi(D)$ అనే ఋజు అవకలన పరికర్తకు

(i) $\phi\left(-a^2\right) \neq 0$ అయితే $\dfrac{1}{\phi\left(D^2\right)} b\sin ax = \dfrac{b}{\phi\left(-a^2\right)}$

(ii) $\phi\left(-a^2\right) \neq 0$ అయితే $\dfrac{1}{\phi\left(D^2\right)} b\cos ax = \dfrac{b}{\phi\left(-a^2\right)}$

(iii) $\dfrac{1}{D^2+a^2}\sin ax = -\dfrac{x}{2a}\cos ax$

(iv) $\dfrac{1}{D^2+a^2}\cos ax = \dfrac{x}{2a}\sin ax$

(v) $\dfrac{1}{\phi(D)}\left(e^{ax}V\right) = e^{ax}\cdot\dfrac{1}{\phi(D+a)}V$

(vi) $\dfrac{1}{\phi(D)}(x\cdot V) = x\cdot\dfrac{1}{\phi(D)}V - \dfrac{\phi'(D)}{\left[\phi(D)\right]^2}V$

విధానము :-

Step (1) : ఇచ్చిన అవకలన సమీకరణమునకు C.F. కనుగొనుము.

Step (2) : $(A), (B), (C)$ ల యొక్క P.I. లు ఈ క్రింది విధముగా కనుగొనుము.

(A)**కు పద్ధతి :-** $Q(x)=b\sin ax$ లేక $b\cos ax$ అనుకొనుము.

(i) D లో సరి ప్రమేయము $f(D)$ అయితే $f(D)$ ను $\phi(D^2)$గా వ్రాయుము.

(D^2+a^2), $\phi(D^2)$ యొక్క కారణాంకముగా r సార్లు పునరావృతమైతే

$\phi(D^2)$ ను ఈ విధముగా వ్రాయవచ్చును.

$$\phi(D^2)=(D^2+a^2)^r\,F(D^2),\quad F(-a^2)\neq 0$$

$$\text{P.I.}=\frac{1}{f(D)}Q(x)=\frac{1}{F(-a^2)}\,\frac{1}{(D^2+a^2)^r}\,Q(x)$$ ని ఉపయోగించి ప్రత్యేక సమాకలనిని కనుగొనుము.

$\frac{1}{(D^2+a^2)^r}Q(x)$ ను గణించుటలో (iii) లేక (iv) సూత్రమును ఉపయోగించుము.

(ii) $f(D)$లో యొక్క బేసి ఘాతాలు గల పదాలు ఉంటే $f(D)$ ను $p+qD$, $P=\phi(D^2)$, $q=\phi_2(D^2)$గా వ్రాయుము.

$$\frac{1}{f(D)}Q(x)=\frac{(p-qD)}{p^2+a^2q^2}Q(x)$$ ను గణించుము.

B కు పద్ధతి :-

(i) ఇచ్చిన సమీకరణము $f(D)y=e^{ax}\cdot V$ అనుకొనుము.

(ii) $\text{P.I.}=\frac{1}{f(D)}(e^{ax}\cdot V)$ ను కనుగొనుటకు ముందు e^{ax} ను బయటకు తీసి D స్థానంలో (D+a) ను వ్రాసి,

V పై $\frac{1}{f(D+a)}$ పరికర్తను ఉపయోగించుము.

(iii) $$\text{P.I.}=\frac{1}{f(D)}(e^{ax}\cdot V)=e^{ax}\cdot\frac{1}{f(D+a)}V$$

C కు పద్ధతి :-

(i) ఇచ్చిన సమీకరణము $f(D)y=x\cdot V$ అనుకొనుము.

(ii) $f(D)$ యొక్క అవకలనము $f'(D)$ ని కనుగొనుటకు $f(D)$ని D దృష్ట్యా అవకలనము చేయుము.

(iii) $\text{P.I.} = \frac{1}{f(D)}(x \cdot V) = x \cdot \frac{1}{f(D)}V - \frac{f'(D)}{[f(D)]^2}V$ గా P.I. ను గణించుము.

Step (3) : $y = C \cdot F \cdot + P \cdot I \cdot$ గా సాధారణ సాధనను వ్రాయుము.

ఉదాహరణ 1 :- $(D^2 + 9)y = \cos^3 x$ ను సాధించుము.

సాధన :- A.E. $m^2 + 9 = 0 \Rightarrow (m + 3i)(m - 3i) = 0$

$$\Rightarrow m = \pm 3i$$

$$\therefore \text{C.F.} = y_c = (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$$

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 9}\cos^3 x = \frac{1}{D^2 + 9}\left(\frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{2 \cdot 3}\sin 3x + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{-1 + 9}\cos x$$

$$= \frac{x}{24}\cos 3x + \frac{3}{32}\cos x$$

$\therefore$ ఇచ్చిన అవకలన సమీకరణమునకు సాధారణ సాధన

$$y = y_c + y_p = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \frac{x}{24}\cos 3x + \frac{3}{32}\cos x$$

ఉదాహరణ 2 :- $(D^4 + 3D^2 - 4)y = \cos^2 x - \cosh x$ **----------- (1)** ను సాధించుము.

సాధన :- A.E. $m^4 + 3m^2 - 4 = 0 \Rightarrow (m^2 + 4)(m^2 - 1) = 0$

$\Rightarrow m^2 = -4$ లేదా $m^2 = 1$

$$\Rightarrow m = \pm 2i, \pm 1$$

$$\therefore \text{C.F. } y_c = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + c_3 e^x + c_4 e^{-x}$$

$$\text{P.I.} = y_p = \frac{1}{D^4 + 3D^2 - 4}\cos^2 x - \cosh x = \frac{1}{(D^2 + 4)(D^2 - 1)}\left(\frac{1 + \cos 2x}{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(D^2+4)(D^2-1)}\,e^{0x}+\frac{1}{(D^2+4)(D^2-1)}\cos 2x-\frac{1}{(D^2+4)(D^2-1)}e^{x}-\frac{1}{(D^2+4)(D^2-1)}e^{-x}\right]$$

ఇపుడు $\frac{1}{(D^2+4)(D^2-1)}e^{0x}=\frac{1}{(0+4)(0-1)}=-\frac{1}{4}$ ------------- (2)

$$\frac{1}{(D^2+4)(D^2-1)}\cos 2x=\frac{1}{-4-1}\cdot\left(\frac{1}{D^2+2^2}\cos 2x\right)=\frac{-1}{5}\cdot\frac{x}{2\cdot 2}\sin 2x$$

$$=-\frac{x}{20}\sin 2x \text{ -------- (3)}$$

$$\frac{1}{(D^2+4)(D^2-1)}e^{x}=\frac{1}{(D^2+4)(D+1)(D-1)}e^{x}=\frac{1}{(1+9)(1+1)}\left(\frac{1}{D-1}e^{x}\right)=\frac{x}{10}e^{x} \text{ --------- (4)}$$

$$\frac{1}{(D^2+4)(D^2-1)}e^{-x}=\frac{1}{(D^2+4)(D-1)(D+1)}e^{-x}=\frac{1}{((-1)^2+4)(-1-1)}\frac{1}{D+1}e^{-x}=-\frac{x}{10}e^{x} \text{ --(5)}$$

(2), (3), (4) & (5)లను y_p లో ప్రతిక్షేపించగా

$$y_p=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}-\frac{x}{20}\sin 2x+\frac{x}{10}e^{x}-\frac{x}{10}e^{-x}\right]$$

$$=\frac{1}{40}\left[-5-x\sin 2x+2x\left(e^{x}-e^{-x}\right)\right]$$

$\therefore$ (1) యొక్క సాధారణ సాధన

$$y=y_c+y_p$$

$$=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+c_3e^{x}+c_4e^{-x}+\frac{1}{40}\left[-5-x\sin 2x+2x\left(e^{x}-e^{-x}\right)\right]$$

ఉదాహరణ 3 :- $(D^2-2D+1)y=x^2e^{3x}$ ను సాధించుము.

సాధన :- A.E. $m^2-2m+1=0\Rightarrow(m-1)^2=0\Rightarrow m=1,\ 1$

$\therefore$ C.F.$=y_c=(c_1+c_2x)e^{x}$

$$PI=y_p=\frac{1}{(D-1)^2}\,x^2e^{3x}=e^{3x}\cdot\frac{1}{(D+3-1)^2}x^2=e^{3x}\frac{1}{(D+2)^2}x^2$$

$$= e^{3x}\frac{1}{4\left(1+\frac{D}{2}\right)^2}x^2 = \frac{e^{3x}}{4}\left(1+\frac{D}{2}\right)^{-2}x^2$$

$$= \frac{e^{3x}}{4}\left(1-\cancel{2}\cdot\frac{D}{\cancel{2}}+3\frac{D^2}{4}-\cdots\cdots\right)x^2$$

$$= \frac{e^{3x}}{4}\left(x^2 - Dx^2 + \frac{3}{4}D^2x^2\right)$$

$$= \frac{e^{3x}}{4}\left(x^2 - 2x + \frac{3}{4}\cdot 2\right)$$

$$= \frac{e^{3x}}{4}\left(x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{e^{3x}}{8}\left(2x^2 - 4x + 3\right)$$

$\therefore\ y = y_c + y_p$ సాధారణ సాధన

$$y = (c_1 + c_2x)e^x + \frac{e^{3x}}{8}\left(2x^2 - 4x + 3\right)$$

ఉదాహరణ 4 :- $\left(D^2 + 3D + 2\right)y = xe^x \sin x$ ను సాధించుము.

A.E. $m^2 + 3m + 2 = 0 \Rightarrow (m+1)(m+2) = 0$

$$\Rightarrow m = -1, -2$$

$\therefore$ C.F. $= y_c = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}$

P.I. $= y_p = \dfrac{1}{D^2+3D+2}x\,e^x \sin x = e^x \cdot \dfrac{1}{(D+1)^2 + 3(D+1) + 2}(x\sin x)$

$$= e^x \cdot \frac{1}{D^2+5D+6}(x\sin x) = e^x\left[x\frac{1}{D^2+5D+6}\sin x - \frac{2D+5}{\left(D^2+5D+6\right)^2}\sin x\right]$$

$$= e^x \cdot x\left[\frac{1}{-1^2+5D+6} - \frac{2D+5}{\left(-1^2+5D+6\right)^2}\sin x\right]$$

$$= e^x\left[\frac{x}{5}\cdot\frac{(D-1)}{D^2-1}\sin x - \frac{1}{25}\frac{2D+5}{D^2+2D+1}\sin x\right]$$

$$= e^x \left[\frac{x}{5} \left(\frac{D-1}{-1^2-1} \right) \sin x - \frac{1}{25} \frac{2D+5}{-1^2+2D+1} \sin x \right]$$

$$= e^x \left[-\frac{x}{10} (\cos x - \sin x) - \frac{1}{25} \frac{(2D+5)}{2D} \sin x \right]$$

$$= e^x \left[-\frac{x}{10} (\cos x - \sin x) - \frac{1}{25} \sin x - \frac{5}{25(2)} \left(\frac{1}{D} \sin x \right) \right]$$

$$= e^x \left[-\frac{x}{10} (\cos x - \sin x) - \frac{1}{25} \sin x + \frac{1}{10} \cos x \right]$$

$\therefore\ y = y_c + y_p$ సాధారణ సాధన

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + e^x \left[\frac{-x}{10} (\cos x - \sin x) - \frac{1}{25} \sin x + \frac{1}{10} \cos x \right]$$

ముగింపు :- ఇచ్చిన సమస్యలకు సాధన

(i) $c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \frac{x}{24} \cos 3x + \frac{3}{32} \cos x$

(ii) $c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + c_3 e^x + c_4 e^{-x} + \frac{1}{40} \left[-5 - x \sin 2x + 2x \left(e^x - e^{-x} \right) \right]$

(iii) $y = \left(c_1 + c_2 x \right) e^x + \frac{e^{3x}}{8} \left[2x^2 - 4x + 3 \right]$

(iv) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + e^x \left[-\frac{x}{10} (\cos x - \sin x) - \frac{1}{25} \sin x + \frac{1}{10} \cos x \right]$

సూచించిన సమస్యలు :-

(1) $\left(D^4 + 2D^2 + 1 \right) y = x^2 \cos x$

(2) $\left(D^2 - 1 \right) y = x^2 \sin 3x$

(3) $\left(D^2 - 4 \right) y = x \sinh x$

(4) $\left(D^2 - 2D + 4 \right) y = e^x \sin \frac{x}{2}$

రచయిత

డా॥ బి. రామిరెడ్డి

ప్రయోగము - 8

అశూన్య సమానక సమీకరణములు - IV

ఉద్దేశ్యము :- K తరగతి గల బహుపది $P(x)$ అయినపుడు $f(D)y = P(x)e^{ax}$ అను అశూన్య సమానక ఋజు అవకలన సమీకరణమును సాధించుట.

సూత్రములు :- A.E. $f(m)=0$కు r సార్లు పునరావృతమైన మూలకము a అయితే ప్రత్యేక సమాకలని,

$$\text{P.I.} = x^r\left(C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_kx^k\right)e^{ax}, \quad C_0, C_1, \cdots, C_k$$

లను P.I. ను అవకలన సమీకరణములో y బదులు ప్రతిక్షేపణ ద్వారా నిర్ధారింపబడతాయి.

విధానము :-

Step (1) : ఇచ్చిన అవకలన సమీకరణమునకు C.F. వ్రాయుము.

Step (2) : A.E. యొక్క మూలముగా a యొక్క పునరావృతి r ను నిర్ణయించుము. A.E. కు a మూలము కాకపోతే $r=0$ అగును.

Step (3) : P.I. = $\left(C_0x^r + C_1x^{r+1} + \cdots + C_kx^{r+k}\right)e^{ax}$ గా P.I. ని వ్రాయుము.

Step (4) : ఇచ్చిన అవకలన సమీకరణములో y బదులు P.I. ని ప్రతిక్షేపించి $C_0, C_1, \cdots, C_k$ ల విలువలు కనుగొనుము.

Step (5) : $y = \text{C.F} + \text{P.I}$ గా సాధారణ సాధన వ్రాయుము.

గమనిక :-

(1) $\sin ax$ ను $\dfrac{e^{iax}}{2i} - \dfrac{e^{-iax}}{2i}$ గా వ్రాయవచ్చును.

(2) $\cos ax$ ను $\dfrac{e^{iax}}{2} + \dfrac{e^{-iax}}{2}$ గా వ్రాయవచ్చును.

(3) $P_1(x), P_2(x), \cdots, P_k(x)$ లు బహుపదులు,

సమీకరణము $f(D)y = Q(x) = P_1(x)e^{a_1x} + P_2(x)e^{a_2x} + \cdots + P_k(x)e^{a_kx}$,

రూపములో ఉన్నప్పుడు $j = 1, 2, \ldots\ldots, k$ కు $f(D)y = P_j(x)e^{a_jx}$ యొక్క ప్రత్యేక సమాకలని P.I_j ను కనుగొనుము.

ఈ P.I_j లను సంకలనము చేయగా $f(D)y = Q(x)$ యొక్క P.I. వచ్చును.

ఉదాహరణ 1 :- $(D^2-2D+3)y = x^3+\sin x$ ---------- (1) ను సాధించుము.

$$\text{A.E. is } m^2-2m+3=0 \Rightarrow m=\frac{2\pm\sqrt{4-12}}{2}=1\pm i\sqrt{2}$$

$$\therefore y_c = e^x\left[c_1\cos\sqrt{2}x + c_2\sin\sqrt{2}x\right]$$

ఇచ్చుట $Q(x)=x^3+\sin x \;\; = x^3+\frac{e^{ix}}{2i}-\frac{e^{-ix}}{2i}$

దాని P.I.

$$y_p = c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4\frac{e^{ix}}{2i}+c_5\frac{e^{-ix}}{2i}$$

$c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ లు నిర్ణయింపబడవలసినవి.

$$y_p' = c_1+2c_2x+3c_3x^2+c_4\frac{e^{ix}}{2}-c_5\frac{e^{-ix}}{2}$$

$$y_p'' = 2c_2+6c_3x+ic_4\frac{e^{ix}}{2}+ic_5\frac{e^{-ix}}{2}$$

y_p, y_p', y_p'' ఈ విలువలను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\left(2c_2+6c_3x+ic_4\frac{e^{ix}}{2}+ic_5\frac{e^{-ix}}{2}\right)-2\left(c_1+2c_2x+3c_3x^2+c_4\frac{e^{ix}}{2}-c_5-\frac{e^{-ix}}{2}\right)$$

$$+3\left(c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4\frac{e^{ix}}{2i}+c_5\frac{e^{-ix}}{2i}\right) = x^3+\frac{e^{ix}}{2i}-\frac{e^{-ix}}{2i}$$

$$\Rightarrow (2c_2-2c_1+3c_0)+(6c_3-4c_2+3c_1)x+(-6c_3+3c_2)x^2+\left(3c_3x^3\right)$$

$$+\frac{e^{ix}}{2}\left(ic_4-2c_4+\frac{3c_4}{i}\right)+\frac{e^{-ix}}{2}\left(ic_5+2c_5+\frac{3c_5}{i}\right) = x^3+\frac{e^{ix}}{2i}-\frac{e^{-ix}}{2i}$$

ఇరువాపులా ఏకరీతి పదాలను పోల్చగా

$$3c_3=1 \Rightarrow c_3=\frac{1}{3}$$

$$-6c_3 + 3c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{2}{3}$$

$$6c_3 - 4c_2 + 3c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{2}{9}$$

$$2c_2 - 2c_1 + 3c_0 = 0 \Rightarrow c_0 = \frac{-8}{27}$$

$$c_4\left(i - 2 + \frac{3}{i}\right) = \frac{1}{i} \Rightarrow c_4(-2-2i) = -i \qquad \left(\because \frac{1}{i} = -i\right)$$

$$\Rightarrow c_4 = \frac{i(1-i)}{4}$$

$$c_5(i + 2 - 3i) = \frac{-1}{i} = i \Rightarrow c_5 = \frac{i}{2(1-i)} = \frac{i(1+i)}{4}$$

$$\therefore y_p = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{8}{27} + \frac{i(1-i)}{4}\,\frac{e^{ix}}{2i} + \frac{i(1+i)}{4}\,\frac{e^{-ix}}{2i}$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{8}{27} + \frac{1}{4}\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{8}{27} + \frac{1}{4}(\sin x + \cos x)$$

$\therefore$(1) యొక్క సాధారణ సాధన

$$y = y_c + y_p$$

$$y = e^x\left(c_1 \cos\sqrt{2}x + c_2 \sin\sqrt{2}x\right) + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{8}{27} + \frac{1}{4}(\sin x + \cos x)$$

ఉదాహరణ 2 :- $\left(D^2 - 3D + 2\right)y = 2x^2 + 3e^{2x}$ --------- (1)ను సాధించుము.

సాధన :- A.E. $m^2 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow (m-1)(m-2) = 0 \Rightarrow m = 1, 2$

$$\therefore y_c = c_1e^x + c_2e^{2x}$$

$$y_p = \left(c_0 + c_1x + c_2x^2\right) + c_3xe^{2x}$$

c_0, c_1, c_2, c_3 లు కనుగొనవలసిన సిద్ధాంతాలు.

$$\Rightarrow y_p' = c_1 + 2c_2x + 2c_3\, x\, e^{2x} + c_3e^{2x}$$

$$y_p'' = 2c_2 + 4c_3xe^{2x} + 4c_3e^{2x}$$

(1)లో y_p, y_p', y_p'' లను ప్రతిక్షేపించగా

$$\left(2c_2 + 4c_3xe^{2x} + 4c_3e^{2x}\right) - 3\left(c_1 + 2c_2x + 2c_3xe^{2x} + c_3e^{2x}\right)$$

$$+2\left(c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3xe^{2x}\right) = 2x^2 + 3e^{2x}$$

$$\Rightarrow (2c_2 - 3c_1 + 2c_0) + (-6c_2 + 2c_1)x + 2c_2x^2 + (-6c_3 + 2c_3)xe^{2x} + c_3e^{2x} = 2x^2 + 3e^{2x}$$

ఇరువైపులా ఏకరీతి పదాలను పోల్చగా

$2c_2 = 2 \Rightarrow c_2 = 1$

$-6c_2 + 2c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 3$

$2c_2 - 3c_1 + 2c_0 = 0 \Rightarrow c_0 = \dfrac{2}{7}$

$c_3 = 3$

$\therefore y_p = x^2 + 3x + \dfrac{7}{2} + 3x\, e^{2x}$

$\therefore$ (1) యొక్క సాధారణ సాధన $y = y_c + y_p$

$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + x^2 + 3x + \dfrac{7}{2} + 3xe^{2x}$

ఉదాహరణ (3) :- $\left(D^2 + 4D + 4\right)y = 3x\, e^{-2x}$ ---------- (1)ను సాధించుము.

సాధన :- A.E. $m^2 + 4m + 4 = 0 \Rightarrow (m+2)^2 = 0 \Rightarrow m = -2, -2$

$\therefore y_c = (c_1 + c_2x)e^{-2x}$

$m = -2$ అనునది **2** సార్లు పునరావృతమైనది.

$\therefore$ P.I. యొక్క రూపము

$$y_p = x^2(Ax + B)e^{-2x}$$

$$y_p = Ax^3e^{-2x} + Bx^2e^{-2x}$$

$$\Rightarrow y_p' = 3Ax^2e^{-2x} - 2Ax^3e^{-2x} + 2Bxe^{-2x} - 2Bx^2e^{-2x}$$

$$y_p'' = (3A-2B)\left(2x\,e^{-2x} - 2x^2\,e^{-2x}\right) - 6Ax^2\;e^{-2x} + 4Ax^3e^{-2x} + 2Be^{-2x} - 4Bx\,e^{-2x}$$

(1)లో y_p, y_p', y_p'' విలువలను ప్రతిక్షేపించగా

$$6Ax\,e^{-2x} + 2Be^{-2x} = 3x\,e^{-2x}$$

ఇరువైపులా ఏకరీతి పదాలను పోల్చగా

$$6A = 3 \Rightarrow A = \frac{1}{2},\; B = 0$$

$$\therefore\; y_p = \frac{1}{2}x^3\,e^{-2x}$$

(1) యొక్క సాధారణ సాధన $y = y_c + y_p$

$$y = (c_1 + c_2x)e^{-2x} + \frac{1}{2}x^3e^{-2x}$$

ముగింపు :- ఇచ్చిన సమస్యలకు సాధారణ సాధన

(i) $y = e^x\left(c_1\cos\sqrt{2}x + c_2\sin\sqrt{2}x\right) + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{2}{9}x - \dfrac{8}{27} + \dfrac{1}{4}(\sin x + \cos x)$

(ii) $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + x^2 + 3x + \dfrac{7}{2} + 3x\,e^{2x}$

(iii) $y = (c_1 + c_2x)e^{-2x} + \dfrac{1}{2}x^3e^{2x}$

సూచించిన సమస్యలు :

1. $(D^2 - 2D + 1)y = xe^x$ ను సాధించుము.
2. $(D^2 - 3D + 2)y = xe^{2x} + \sin x$ ను సాధించుము.
3. $(D^2 - 2D)y = e^x\sin x$ ను సాధించుము.

రచయిత

డా॥ బి. రామిరెడ్డి

ప్రయోగము - 9

సమశేషకతలు మరియు రేఖీయ సమశేషకతలు

ఉద్దేశ్యము :-

రేఖీయ సమశేషకత $ax \equiv b \pmod{m}$ను సాధించుట మరియు సమశేషకతల లోని ఫలితాలను m^n ను k చే భాగించినపుడు వచ్చే శేషాన్ని కనుగొనుటకు ఉపయోగించుట.

వాడిన ఫలితాలు :-

(a) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^k \equiv b^k \pmod{m},\ k \geq 1,\ k \in Z$

(b) $a \equiv b \pmod{m},\ b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$

(c) $a \equiv b \pmod{m},\ c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow a + c \equiv b + d \pmod{m},\ ac \equiv bd \pmod{m}$

(d) $ac \equiv bc \pmod{m},\ (c, m) = 1 \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$

(e) $ac \equiv bc \pmod{m},\ c \mid m \Rightarrow a \equiv b\left(\bmod \dfrac{m}{c}\right)$

(f) $d = \text{g.c.d.}\{a, m\} = (a, m)$ అనుకొనుము. రేఖీయ సమశేషకత $ax \equiv b \pmod{m}$కు సాధన ఉండడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $d \mid b$. ఈ సందర్భంలో $ax \equiv b \pmod{m}$కు d అసమశేషక సాధనలుంటాయి.

$ax \equiv b(\text{mod } m)$ కు సాధన కనుగొను పద్ధతి :-

Step (1) : $d = \text{g.c.d. } \{a, m\} = (a, m)$ను కనుగొనుము.

Step (2) : bను d భాగిస్తుందో లేదో చూడుము.

Step (3) : $d \nmid b$ అయితే $ax \equiv b \pmod{m}$ కు సాధన లేదు.

Step (4) : $d = 1$ అయితే $ax \equiv b \pmod{m}$ కు ఏకైక అసమశేషక సాధన ఉంటుంది. వాడిన ఫలితాలలో తగు దానినుపయోగించి, సాధన కనుగొనుము.

Step (5) : $d \neq 1$ అయితే $ax \equiv b \pmod{m}$కు ఖచ్చితంగా d అసమ శేషక సాధనలుంటాయి.

Step (6) : వాడిన ఫలితాలలో తగు దానినుపయోగించి, ఒక సాధన x_0 ను కనుగొనుము.

Step (7) : తక్కిన అసమశేషక సాధనలు $x_1, x_2, \cdots, x_{d-1}$లను $x_k = x_0 + k\left(\frac{m}{d}\right)$, $k = 1, 2, \cdots\cdots, d-1$ సూత్రం ద్వారా కనుగొనుము.

ఉదాహరణ 1 :- $15x \equiv 6(\text{mod } 21)$ ను సాధింపుము.

సాధన :- ఇచ్చిన సమసేషకత $15x \equiv 6(\text{mod } 21)$ ------------- **(1).** దీనిని $ax \equiv b(\text{mod } m)$తో పోల్చగా $a = 15,\ b = 6,\ m = 21.$

$d = (a, m) = (15, 21) = 3.$ **6**ను **3** భాగిస్తుంది. కనుక

ఇచ్చిన సమశేషకతకు **3** అసమశేషక సాధనలుంటాయి.

$15x = 3 \times 5x \equiv 3 \times 2(\text{mod } 3 \times 7)$

$$\therefore 5x \equiv 2(\text{mod } 7)$$

ఇంకా $\quad 0 \equiv 28(\text{mod } 7)$

కూడగా $\quad 5x \equiv 30(\text{mod } 7)$

$\therefore x \equiv 6(\text{mod } 7)$

కనుక $\quad x_0 = 6$

$$x_1 = x_0 + 1 \cdot \frac{m}{d} = 6 + 7 = 13$$

$$x_2 = x_0 + 2 \cdot \frac{m}{d} = 6 + 2 \times 7 = 20$$

$\therefore 15x \equiv 6\ (\text{mod } 21)$కు అసమశేషక సాధనలు **6,13,20.**

ఉదాహరణ 2 :- $15x \equiv 12(\text{mod } 36)$ ను సాధించుము.

సాధన :- యిచ్చిన సమ శేషకత $15x \equiv 12(\text{mod } 36)$ ----------- **(1)**

దీనిని $ax \equiv b(\text{mod } m)$ తో పోల్చగా $a = 15,\ b = 12,\ m = 36$

$d = (a, m) = (15, 36) = 3$, **12**ను భాగిస్తుంది. కనుక యిచ్చిన సమశేషకతకు **3** అసమషేకత సాధనలు ఉంటాయి.

$15x = 3 \times 5x \equiv 3 \times 4(\text{mod } 3 \times 12)$

$\Rightarrow 5x \equiv 4\ (\text{mod} 12)$ ----------- **(2)** $\qquad (\because 3 | 36)$

యింకా $\quad \underline{0 \equiv 36(\text{mod} 12)}$

కూడగా $5x \equiv 40 \pmod{12}$

$$\Rightarrow x \equiv 8 \pmod{12}$$

$\therefore$ (2)కు $n_0 = 8$ ఒక సాధన. తద్వారా (1)కి సాధన అవుతుంది.

యిచ్చిన సమశేషకతకు అసమ శేషక సాధనాలు

$$x_k = x_0 + k\frac{m}{d}, \quad k = 0,1,2,\ldots\ldots\ldots,d-1$$ సూత్రం ద్వారా గణించాలి.

కనుక $x_k = 8 + 12k,\ k = 0,1,2,\ldots\ldots\ldots$

$\therefore$ ఇచ్చిన సమశేషకతకు అసమ శేషక సాధనలు 8,20,32 అవుతాయి.

ఉదాహరణ 3 :- $259x \equiv 5 \pmod{11}$ ను సాధింపుము.

సాధన :- ఇచ్చిన సమశేషకత $259x \equiv 5 \pmod{11}$ ---------- (1)

$$259 \equiv 6 \pmod{11} \qquad (\because 259 = 23 \times 11 + 6)$$

$$\Rightarrow 259x \equiv 6x \pmod{11} \text{ -------- (2)}$$

(1), (2)ల నుండి $6x \equiv 5 \pmod{11}$ ---------- (3)

(3)ను $ax \equiv b \pmod{m}$తో పోల్చగా $a = 6,\ b = 5,\ m = 11$

$d = (a,m) = (6,11) = 1$, 5ను భాగిస్తుంది.

$\therefore$ కనుక సమశేషకత (3)కు అందువలన సమశేషకత (1)కి ఏకైక అసమశేషక సాధన ఉంటుంది.

$$\begin{array}{ll} & 6x \equiv 5 \pmod{11} \\ \text{ఇంకా} & \underline{0 \equiv 55 \pmod{11}} \\ \text{కూడగా} & 6x \equiv 60 \pmod{11} \end{array}$$

$$\Rightarrow x \equiv 10 \pmod{11}$$

కనుక సమశేషకత (3)కు, తద్వారా (1)కి ఏకైక అసమశేషక సాధన 10 అవుతుంది.

ఉదాహరణ 4 :- 3^{40} ను 23 చే భాగించగా వచ్చే శేషాన్ని కనుగొనుము.

సాధన :- $3^1 \equiv 3 \pmod{23}$ అని మనకు తెలుసు.

$\therefore \quad 3^2 \equiv 9 \pmod{23}$

$\Rightarrow 3^4 \equiv 81 \pmod{23} \Rightarrow 3^4 \equiv 12 \pmod{23}$ ----------- (1)

$$3^3 \equiv 4 \pmod{23} \Rightarrow (3^3)^3 \equiv 4^3 \pmod{23}$$

$$\Rightarrow 3^9 \equiv 64 \pmod{23}$$

$$\Rightarrow 3^9 \equiv -5 \pmod{23} \qquad (\because 64 \equiv -5 \pmod{23})$$

$$\Rightarrow (3^9)^4 \equiv (-5)^4 \pmod{23}$$

$$\Rightarrow 3^{36} \equiv 625 \pmod{23}$$

$$\Rightarrow 3^{36} \equiv 4 \pmod{23} \text{ ---------- (2)} \qquad (\because 625 \equiv 4 \pmod{23})$$

(1), (2)ల నుండి $3^{36} \times 3^4 \equiv 12 \times 4 \pmod{23}$

$$\Rightarrow 3^{40} \equiv 48 \pmod{23}$$

$$\Rightarrow 3^{40} \equiv 2 \pmod{23} \qquad (\because 48 \equiv 2 \pmod{23})$$

కనుక 3^{40} ను 23 చే భాగించగా వచ్చు శేషము 2.

గమనిక :- ప్రయోగ పరీక్ష వరకు రేఖీయ సమశేషకతా సాధనాల పై 3 ప్రశ్నలు, శేషాన్ని కనుగొనుట పై 1 ప్రశ్నను యివ్వవలెను.

కొన్ని సూచించబడిన సమస్యలు :-

1. క్రింది సమశేషకతలను సాధింపుము.

   (i) $36x \equiv 27 \pmod{45}$

   (ii) $342x \equiv 5 \pmod{13}$

   (iii) $13x \equiv 9 \pmod{25}$

2. 2^{20} ను 7 చే భాగించగా వచ్చు శేషాన్ని కనుగొనుము.

పాఠ్య రచయిత

N. **రజని**

ప్రయోగము - 10

ఏకాంతర సమూహము A_4

ఉద్దేశ్యము :- నాలుగు సంకేతాల పైని ఏకాంతర సమూహము A_4 యొక్క గుణకార పట్టికను వ్రాయడం.

నిర్వచనాలు :-

(a) సమితి A పై ప్రస్తారం σ అనుకొందాం. A లో n మూలకాలు $a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots, a_n$ లు ప్రతి $a \in A$ కు

$$a\sigma = \begin{cases} a_{i+1} & \text{if } a = a_i,\ i < n \text{ కు} \\ a_1 & \text{if } a = a_n \text{ కు} \\ a & \text{if } a \notin \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \text{ కు} \end{cases}$$

అయ్యేటట్లుగా ఉంటే σను n పొడవు గల ఆవృత్తము అంటాము.

(b) 2 పొడవు గల ఆ వృత్తాని వ్యత్యయము అంటాము.

(c) పరిమిత సమితి $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ పై ప్రస్తారం σను సరి (బేసి) సంఖ్యలో గల వ్యత్యయాల లబ్ధంగా వ్రాస్తే σను సరి (బేసి) ప్రస్తారము అంటాము.

(d) $\{1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots, n\}$ సమితి పైని ప్రస్తారాల సమూహాన్ని S_nతో సూచిస్తాము. S_nను n సంకేతాల పై లేక n వ తరగతి సౌష్ఠవ సమూహము అంటాము. n లోని అన్ని సరి ప్రస్తారాల సమితి A_n, S_n కు అభిలంబ ఉప సమూహమవుతుంది. A_nను n సంకేతాల పై లేక n వ తరగతి ఏకాంతర సమూహమంటాము.

వాడిన ఫలితాలు :-

1. పరిమిత సమితి A పై ప్రతి ప్రస్తారము వియుక్త ఆవృత్తాల లబ్ధమవుతుంది.
2. పరిమిత సమితి పై ప్రతి ఆవృత్తము తద్వారా ప్రతి ప్రస్తారము వ్యత్యయాల లబ్ధమవుతుంది.

పద్ధతి :-

Step 1 : S_4లోని 24 ప్రస్తారాలను వ్రాయండి.

Step 2 : S_4లోని ప్రతి σను, σ క్రింద కక్ష్యలు $\theta_\sigma(a)$లను కనుగొని కనీసము రెండు మూలకాలున్న కక్ష్యలకు సంబంధించి ఆవృత్తాలను వ్రాసి, వియుక్త ఆవృత్తాల లబ్ధంగా వ్రాయండి.

Step 3 : σ యొక్క ప్రతి ఆవృత్తాన్ని,
$(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (a_1, a_2)(a_1, a_3)\cdots(a_1, a_n)$ నియమాన్ని ఉపయోగించి, వ్యత్యయాల లబ్ధంగా వ్రాస్తూ σను వ్యత్యయాల లబ్ధంగా వ్రాయండి.

Step 4 : S_4 లోని అన్ని సరి ప్రస్తారాలను కనుగొనండి. ఈ సరి ప్రస్తారాల సమితి A_4.

Step 5 : A_4 యొక్క గుణకార పట్టికను వ్రాయండి.
$\sigma_1, \sigma_2 \in A_n$ కు σ_1, σ_2 ను
$a(\sigma_1 \sigma_2) = (a\sigma_1)\sigma_2 \ \forall \ a \in \{1, 2, 3, 4\}$ నియమం ద్వారా గణిస్తాము.

ఉదాహరణలు :-

(a) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\theta_{\sigma_1}(1) = \{1,2,3,4\}$

$\therefore \sigma_1 = (1,2,3,4) = (1,2)(1,3)(1,4)$

σ_1 బేసి ప్రస్తారము

$\sigma_1 \notin A_4$

(b) $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\theta_{\sigma_2}(1) = \{1\}$

$\therefore \sigma_2 = (2,4,3) = (2,4)(2,3)$

σ_2 సరి ప్రస్తారము

$\sigma \in A_4$

(c) $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\theta_{\sigma_3}(1) = \{1,3\}$

$\theta_{\sigma_3}(2) = \{2,4\}$

$\sigma_3 = (1,3)(2,4)$

σ_3 సరి ప్రస్తారము

$\sigma_3 \in A_4$

(d) $\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$\theta_{\sigma_4}(1) = \{1\}$, $\theta_{\sigma_4}(2) = \{2\}$

$\theta_{\sigma_4}(3) = \{3,4\}$

$\therefore \sigma_4 = (3, 4)$ బేసి ప్రస్తారము

$\sigma_4 \notin A_4$

S_4 లోని అన్ని ప్రస్తారాలను వ్రాసి, అవి సరి ప్రస్తారాలో, బేసి ప్రస్తారాలో నిర్ధారించండి. A_4 యొక్క గుణకార పట్టికను వ్రాయండి.

పాఠ్య రచయిత

N. రజని

ప్రయోగము - 11

ప్రస్తారాలు

ఉద్దేశ్యము :-

(a) n సంకేతాల పైని సౌష్ఠవ సమూహము S_n లో తత్సమం కాని ప్రస్తారం σ యొక్క తరగతిని కనుగొనుట.

(b) $n = 5, 6$ లతో n పొడవు గల ఆవృత్తం σ కు, σ^r ఆవృత్తం కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమం $g.c.d.\{r, n\} = 1$ కావడం, అని సరిచూచుట.

నిర్వచనాలు :-

1. $\sigma \in S_n$ అనుకొనుము. S_n లోని తత్సమ ప్రస్తారము I అనుకొనుము. $\sigma^r = I$ అయ్యేటట్లు వుండే కనిష్ఠ ధన పూర్ణాంకము r ను σ యొక్క తరగతి అంటాము.

2. A అశూన్య సమితి, $\sigma \in S_A$ అనుకొనుము. A లో $a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, a_n$ లు ప్రతి $a \in A$ కు

$$a\sigma = \begin{cases} a_{i+1} \text{ if } a = a_i, i < n \text{ కు} \\ a_1 \quad \text{if } a = a_n \text{ కు} \\ a \text{ if } a \notin \{a_1, \cdots, a_n\} \text{ కు} \end{cases}$$

అయ్యేటట్లుగా ఉంటే σ ను n పొడవు గల ఆవృత్తము అంటాము.

ఉపయోగించిన ఫలితాలు :-

1. S_n లోని ప్రతి σ ను వియుక్త ఆవృత్తాల లబ్ధంగా వ్రాయవచ్చు.
2. ప్రతి ఆవృత్తము యొక్క తరగతి దాని పొడవుకు సమానమవుతుంది.
3. వియుక్త ఆవృత్తాలు వినిమయం చెందుతాయి.
4. $\sigma \in S_n$ యొక్క తరగతి దాని వియుక్త ఆవృత్త విఘటనంలోని ఆవృత్తాల యొక్క క.సా.గు. అవుతుంది.

పద్ధతి :-

(a) S_n లో ఇచ్చిన σ ను తీసుకొనుము.

σ ను $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k$, $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k$ లు $r_1, r_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, r_k$ $(r_i > 1)$ $(i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, k)$ పొడవు గల ఆవృత్తాల లబ్ధంగా విఘటనం చేయండి. అపుడు σ యొక్క తరగతి $=$ క.సా.గు. $\{r, r_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, r_k\}$

ఉదాహరణలు :-

1. $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\sigma = (1, 3, 5)(2, 4, 6)$

$\sigma_1 = (1,3,5), \sigma_2 = (2,4,6)$ అనుకొనుము.

అపుడు $\sigma = \sigma_1 \sigma_2$

$r_1 = \sigma_1$ యొక్క తరగతి $= 3$

$r_2 = \sigma_2$ యొక్క తరగతి $= 3$

క.సా.గు. $\{r_1, r_2\} = 3$

$\therefore \sigma$ యొక్క తరగతి $= 3$

సరిచూచుట :-

(1) $\sigma^2 = (\sigma_1 \sigma_2)^2 = \sigma_1^2\ \sigma_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\sigma^3 = (\sigma_1 \sigma_2)^3 = \sigma_1^3\ \sigma_2^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$0(\sigma) = 3 =$ క.సా.గు. $\{r_1, r_2\}$

(2) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

$\sigma = (1,2)\ (3,4,5) = \sigma_1\ \sigma_2$ అక్కడ

$\sigma_1 = (1,2), \quad \sigma_2 = (3,4,5)$

$r_1 = o(\sigma_1) = 2,\ r_2 = o(\sigma_2) = 3$

$\therefore 0(\sigma) =$ క.సా.గు. $\{r_1, r_2\} =$ క.సా.గు. $\{2,3\} = 6$

సరి చూచుట :- $\sigma_1^2 = I,\ \sigma_2^3 = I$

$\sigma^2 = \sigma_1^2\, \sigma_2^2 = (3,5,4)$

$\sigma^3 = (\sigma_1\ \sigma_2)^3 = \sigma_1^3\ \sigma_2^3 = (1, 2)$

$\sigma^4 = (\sigma_1 \sigma_2)^4 = \sigma_1^4 \sigma_2^4 = (\sigma_1^2)^2\ (\sigma_2^3)\sigma_2 = \sigma_2$

$\sigma^5 = (\sigma_1 \sigma_2)^5 = \sigma_1^5\, \sigma_2^5 = \sigma_1^4\, \sigma_1 \sigma_2^3\, \sigma_2^2 = \sigma_1\ \sigma_2^2$

$= (1,2)\ (3,5,4)$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\sigma^6 = (\sigma_1 \sigma_2)^6 = \sigma_1^6 \sigma_2^6 = (\sigma_1^2)^3\ (\sigma_2^3)^2 = I^3 I^2 = I$

$0(\sigma) = 6 -$ క.సా.గు. $\{r_1, r_2\}$

ఉదాహరణ 1 :- $n=5$, $\sigma=(1,3,4,2,5)\in S_6$

$n=\sigma$ యొక్క పొడవు $=5$

గ.సా.భా. $\{2,5\}=1$, $\sigma^2=(1,4,5,3,2)$ ఒక ఆవృత్తము.

గ.సా.భా. $\{3,5\}=1$, $\sigma^3=(1,2,3,5,4)$ ఒక ఆవృత్తము.

గ.సా.భా. $\{4,5\}=1$, $\sigma^4=(1,5,2,4,3)$ ఒక ఆవృత్తము.

$0<t<5$కు, σ^t ఆవృత్తము $\Leftrightarrow$ గ.సా.భా. $\{t,5\}=1$

$\sigma^r\neq I$ అనుకొనుము.

$\exists\, q,t\in Z \ni r=5q+t,\ 0\le t<5$,

$\sigma^r\neq I\Rightarrow 0<t<5$.

ఇపుడు గ.సా.భా. $\{t,5\}=$ గ.సా.భా. $\{r,5\}$

$\therefore \sigma^r=\sigma^t$ ఒక ఆవృత్తము $\Leftrightarrow$ గ.సా.భా. $\{t,5\}=$ గ.సా.భా. $\{r,5\}=1$

ఉదాహరణ 2 : $n=6$

$\sigma=(1,3,5,2,4,6)$

గ.సా.భా. $\{2,6\}=2$, $\sigma^2=(1,5,4)\,(3,2,6)$ ఆవృత్తము కాదు.

గ.సా.భా. $\{3,6\}=3$, $\sigma^3=(1,2)\,(3,4)(5,6)$ ఆవృత్తము కాదు.

గ.సా.భా. $\{4,6\}=2$, $\sigma^4=(1,4,5)\,(3,6,2)$ ఆవృత్తము కాదు.

గ.సా.భా. $\{5,6\}=1$, $\sigma^5=(1,6,4,2,5,3)$ ఒక ఆవృత్తము.

$$\sigma^6=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix}=I$$

$0<t<6$,కు σ^t ఒక ఆవృత్తము $\Leftrightarrow$ $(t,6)=1$.

$\sigma^r\neq I$ అనుకొనుము.

$\exists\, q,\ t\in Z\ni r=6q+t$,

$\text{g.c.d.}\{r,6\}=\text{g.c.d}\{t,6\},\ 0<t<6$

$\sigma^r=\sigma^t$ ఒక ఆవృత్తము $\Leftrightarrow$ $(t,6)=1\Leftrightarrow(r,6)=1$

గమనిక :- ప్రయోగ పరీక్షలో (a) క్రింద 2 ప్రశ్నలకు, (b) క్రింద 2 ప్రశ్నలను యివ్వవలెను.

రచయిత

N. **రజని**

ప్రయోగము - 12

పరిమిత చక్రీయ సమూహాలు

ఉద్దేశ్యము :-

(a) ఒక పరిమిత చక్రీయ సమూహము, దానిలో ఒక మూలకం x యిచ్చినపుడు x చే జనితమైన ఉప సమూహము యొక్క తరగతిని కనుగొనుట.

(b) యిచ్చిన పరిమిత చక్రీయ సమూహానికి అన్ని జనక మూలకాలను కనుగొనుట.

(c) యిచ్చిన పరిమిత చక్రీయ సమూహానికి జనక మూలకాల సంఖ్యను కనుగొనుట.

నిర్వచనాలు :-

1. సమూహము G లో $G=\left\{a^n \middle/ n\in Z\right\}$ అయ్యేటట్లుగా ఒక మూలకం a ఉంటే, Gను చక్రీయ సమూహము అంటాము. a ను G కి ఒక జనక మూలకం అంటాము. సమూహంలోని పరిక్రియను సంకలనంగా తీసుకుంటే a^n కు బదులుగా na అని వ్రాస్తాము.
2. ఒక చక్రీయ సమూహం G లోని మూలకాల సంఖ్య పరిమితమైతే G ని పరిమిత చక్రీయ సమూహం అంటాము.
3. ఒక పరిమిత సమూహం యొక్క ఉప సమూహం H యొక్క తరగతిని H లోని మూలకాల సంఖ్యగా నిర్వచిస్తాము.

ఉపయోగించిన ఫలితాలు :-

1. a చే జనితమైన n మూలకాలు కలిగిన చక్రీయ సమూహం G అనుకొనుము. అపుడు a^s తో జనితమైన G యొక్క ఉప సమూహం యొక్క తరగతి $\dfrac{n}{\text{g.c.d.}(n,s)}$.
2. G ఒక n వ తరగతి చక్రీయ సమూహమనుకొనుము. G కు a జనక మూలకము అనుకొనుము. అపుడు $x=a^s$, G కు జనక మూలకమవడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము గ.సా.భా. $\{s,n\}=1$.
3. ఆయిలర్ ప్రమేయం ϕ అయితే n వ తరగతి చక్రీయ సమూహానికి జనక మూలకాల సంఖ్య $\phi(n)$ అవుతుంది. ($\phi(1)=1$, $n>1$ కు $\phi(n)$ అంటే n కు సాపేక్ష ప్రధానాలై, n కంటే తక్కువైన ధన పూర్ణాంకాల సంఖ్య.
4. $p_1, p_2, \ldots\ldots\ldots, p_k$ లు ప్రధానాంకాలు, $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots\cdots p_k^{\alpha_k}$ అయితే

$$\phi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

5. ఏ n వ తరగతి చక్రీయ సమూహమైనా n మాపంగా గల పూర్ణాంకాల సంకలన సమూహం $(Z_n, +_n)$కు తుల్యరూపమవుతుంది.

పద్ధతి :-

ఏ n వ తరగతి పరిమిత చక్రీయ సమూహమైనా n మాపంగా గల సంకలన సమూహం $(Z_n, +_n)$కు తుల్యరూపంగా ఉంటుంది. కనుక $(Z_n, +_n)$ను పరిగణనలోకి తీసుకుంటే సరిపోతుంది. $(Z_n, +_n)$ 1 చే జనితం.

(a) యిచ్చిన ధనపూర్ణాంకము n అనుకొనుము. $Z_n = \{0, 1, \cdots\cdots, n-1\}$లో యిచ్చిన మూలకం s అనుకొనుము. $d =$ గ.సా.భా. $\{s, n\}$ ను కనుగొనుము. అపుడు s చే జనితమైన ఉపసమూహం యొక్క తరగతి $\frac{n}{d}$ అవుతుంది. సరి చూడడం కోసం s చే జనితమైన ఉపసమూహంలోని అన్ని మూలకాలను వ్రాసి వాటిని లెక్కించి పై ఫలితంతో పోల్చి చూడండి.

(b) యిచ్చిన ధన పూర్ణాంకము n అనుకొనుము. ప్రతి $s \in Z_n$ కు గ.సా.భా. $\{s, n\}$ ను కనుగొనుము. అపుడు Z_nకు s జనక మూలకం $\Leftrightarrow$ గ.సా.భా. $\{s, n\} = 1$. Zn యొక్క అన్ని జనకమూలకాలను వ్రాసి అవి Zn ను జనింప చేస్తున్నాయో లేదో సరి చూడండి.

(c) యిచ్చిన ధన పూర్ణాంకము n అనుకొనుము. n ను $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots\cdots p_k^{\alpha_n}$, $p_1, \cdots\cdots, p_k$ లు ప్రధానాంకాలుగా వ్రాయుము.

$\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\cdots\left(1 - \frac{1}{p_K}\right)$ను గణింపుము. $(Z_n, +_n)$ యొక్క జనక మూలకాల సంఖ్య $\phi(n)$ అవుతుంది. ఈ ఫలితాన్ని జనక మూలకాలను కనుగొని సరిచూడండి.

ఉదాహరణ :-

(a) (i) $(Z_8, +_8)$లో 3చే జనితమైన ఉపసమూహం యొక్క తరగతిని కనుగొనండి.

ఇక్కడ $n = 8, s = 3$

$d =$ గ.సా.భా. $\{n, s\} =$ గ.సా.భా. $\{3, 8\} = 1$

కనుక 3చే జనితమైన ఉప సమూహం యొక్క తరగతి $\frac{n}{d} = \frac{8}{1} = 8$

సరిచూచుట : Z_8లో 3చే జనితమైన ఉప సమూహం $\{3, 6, 1, 4, 7, 2, 5, 0\} = Z_8$. కనుక 3చే జనితమైన Z_8 యొక్క ఉప సమూహం యొక్క తరగతి 8.

(ii) Z_{15}లో 12చే జనితమైన ఉప సమూహం యొక్క తరగతిని కనుగొనండి.

ఇక్కడ $n = 15, s = 12$, $d =$ గ.సా.భా. $\{12, 15\} = 3$

$\frac{n}{d} = 5$ కనుక Z_{15}లో 12చే జనితమైన ఉప సమూహం యొక్క తరగతి 5.

సరిచూచుట : Z_{15}లో 12చే జనితమైన ఉప సమూహం $\{12,9,6,3,0\}$. ఈ ఉపసమూహం యొక్క తరగతి 5.

(b). Z_{20} యొక్క జనక మూలకాలను కనుగొనుము.

యిక్కడ $n = 20$

జనక మూలకాల సమితి $= \left\{ {}^{s}\!/_{s \in Z_{20}} \text{ గ.సా.భా. } [s,20] = 1 \right\}$

$= \{1,3,7,9,11,13,17,19\}$

సంరిచూచుట : $\langle 1 \rangle = Z_8$

$\langle 3 \rangle = \{3,6,9,12,15,18,1,4,7,10,13,16,19,25,8,11,14,17,0\} = Z_{20}$

$\langle 7 \rangle = \{7,14,1,8,15,2,9,16,3,10,17,4,11,18,5,12,19,6,13,0\} = Z_{20}$

$\langle 9 \rangle = \{9,18,7,16,5,14,3,12,1,10,19,8,17,6,15,4,13,2,11,0\} = Z_{20}$

$\langle 11 \rangle = \{11,2,13,4,15,6,17,8,19,10,1,12,3,14,5,16,7,18,19,0\} = Z_{20}$

$\langle 13 \rangle = \{13,6,19,12,5,18,11,4,17,10,3,16,9,2,15,8,1,14,7,0\} = Z_{20}$

$\langle 17 \rangle = \{17,14,11,8,5,2,19,16,13,10,7,4,1,18,15,12,9,6,3,0\} = Z_{20}$

$\langle 19 \rangle = \{19,18,17,16,15,14,13,12,11,10,9,8,7,6,5,4,3,2,1,0\} = Z_{20}$

(c) Z_{50} యొక్క జనక మూలకాల సంఖ్యను కనుగొనుము.

$n = 50 = 5 \times 2 \times 5 = 5^2 \times 2$

Z_{20} యొక్క జనక మూలకాల సంఖ్య $= \phi(n)$

$$= n\left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{50}{10}(4)(1) = 20$$

సరిచూచుట : జనక మూలకాల సమితి $= \{s \in Z_{50} \mid (s,50) = 1\}$

$= \{1,3,7,9,11,13,17,19,21,23,27,29,31,33,37,39,41,43,47,49\}$

దీని నుండి కూడ జనక మూలకాల సంఖ్య 20 అని తెలుస్తున్నది.

గమనిక : ప్రయోగ పరీక్షలో (a) క్రింద 2 ప్రశ్నలు, (b) క్రింద 1 ప్రశ్న, (c) క్రింద 1 ప్రశ్న ఈయవలెను.

పాఠ్య రచయిత

N.**రజని**

ప్రయోగము - 13

సదిశా అవకలన పరికర్తలు

ఉద్దేశ్యము :

A) $\phi(x,y,z)$ అను అదిశా ప్రమేయమునకు ఉత్ప్రలం కనుగొనుట.

B) $\overline{f}(x,y,z)$ అను సదిశా ప్రమేయమునకు అపసరణము కనుగొనుట.

C) $\overline{f}(x,y,z)$ అను సదిశా ప్రమేయమునకు అలక కనుగొనుట.

నిర్వచనములు :

(1) ఉత్ప్రలం : $\phi(x,y,z)$ అను ప్రమేయమునకు ఉత్ప్రలం

$$\text{grad } \phi = \overline{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \overline{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \overline{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}$$ అని నిర్వచిస్తాము

grad ϕ ను $\nabla\phi$ అని కూడా వ్రాస్తాము.

(2) అపసరణము (Divergence): $\overline{f}(x,y,z)$ అను సదిశ ప్రమేయమునకు అపసరణము

$$\text{div } \overline{f} = \overline{i}\cdot\frac{\partial\overline{f}}{\partial x} + \overline{j}\cdot\frac{\partial\overline{f}}{\partial y} + \overline{k}\cdot\frac{\partial\overline{f}}{\partial z}$$ అని నిర్వచిస్తాము.

div $\overline{f}$ ను $\nabla\cdot\overline{f}$ అని కూడా వ్రాస్తాము.

(3) అలక (Curl): $f(x,y,z)$ అను సదిశ ప్రమేయమునకు

అలక $$Curl\ \overline{f} = \overline{i}\times\frac{\partial\overline{f}}{\partial x} + \overline{j}\times\frac{\partial\overline{f}}{\partial y} + \overline{k}\times\frac{\partial\overline{f}}{\partial z}$$

అని నిర్వచిస్తాము.

$Curl\ \overline{f}$ ను $\nabla\cdot\overline{f}$ అని కూడా వ్రాస్తాము.

ఉపయోగించు సూత్రాలు

1. $\overline{f} = f_1\overline{i} + f_2\overline{j} + f_3\overline{k}$ అయితే $\text{div } \overline{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$

2. $\overline{f} = f_1\overline{i} + f_2\overline{j} + f_3\overline{k}$, అయితే $Curl\ \overline{f} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$

పద్ధతి :

(A) దత్త సదిశా ప్రమేయము $\phi(x,y,z)$ ను తీసుకొందాము.

1వ అంచ : $\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}$ కనుగొనుము

2వ అంచ : $\nabla\phi$ ను $\nabla\phi = \overline{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \overline{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \overline{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}$ అని వ్రాయుము.

(B) దత్త సదిశా ప్రమేయము $\overline{f}(x,y,z) = f_1(x,y,z)\overline{i} + f_2(x,y,z)\overline{j} + f_3(x,y,z)\overline{k}$ ను తీసుకొందాము.

1వ అంచ : $\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{\partial f_3}{\partial z}$ లను కనుగొందాము.

2వ అంచ : $\operatorname{div}\overline{f}$ ను $\operatorname{div}\overline{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$ అని వ్రాద్దాము

(C) దత్త సదిశా ప్రమేయము $\overline{f}(x,y,z) = f_1(x,y,z)\overline{i} + f_2(x,y,z)\overline{j} + f_3(x,y,z)\overline{k}$ ను తీసుకొందాము.

1వ అంచ : $\operatorname{curl}\overline{f} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$.

2వ అంచ : నిర్ధారకమును విస్తరిద్దాము.

ఉదాహరణ 1 : $\phi(x,y,z) = 3x^2y - y^3z^2$, అయితే $(1,-2,-1)$ వద్ద $\operatorname{grad}\phi$ కనుక్కోండి.

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 6xy,\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2z^2,\ \frac{\partial\phi}{\partial z} = -2y^3z$$

$$\therefore \operatorname{grad}\ \phi = \overline{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \overline{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \overline{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$= 6xy\,\overline{i} + \left(3x^2 - 3y^2z^2\right)\overline{j} - 2y^3z\overline{k}$$

$(1,-2,-1)$ వద్ద $\text{grad}\phi = -12\overline{i} - 9\overline{j} - 16\overline{k}$

ఉదాహరణ 2 : $\phi(x,y,z) = x^2 - y^2 + x^2z$, అయితే $(1,1,-2)$ వద్ద $\text{grad}\phi$ విలువ కనుక్కోండి.

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = -2y,\ \frac{\partial\phi}{\partial z} = x^2$$

$$\therefore \text{grad}\ \phi = \overline{i}\,\frac{\partial\phi}{\partial x} + \overline{j}\,\frac{\partial\phi}{\partial y} + \overline{k}\,\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$= 2x\overline{i} - 2y\overline{j} + x^2\overline{k}$$

$(1,1,-2)$ వద్ద $\text{grad}\phi = 2\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}$

ఉదాహరణ 3 : $\overline{f} = \text{grad}\left(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz\right)$ అయితే $\text{div}\,\overline{f}$ కనుక్కోండి.

$\phi(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ అనుకొందాము.

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 3x^2 - 3yz,\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = 3y^2 - 3zx,\ \frac{\partial\phi}{\partial z} = 3z^2 - 3xy$$

$$\therefore \overline{f} = \text{grad}\ \phi = \overline{i}\,\frac{\partial\phi}{\partial x} + \overline{j}\,\frac{\partial\phi}{\partial y} + \overline{k}\,\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$= \left(3x^2 - 3yz\right)\overline{i} + \left(3y^2 - 3zx\right)\overline{j} + \left(3z^2 - 3xy\right)\overline{k}$$

$$\text{div}\ \overline{f} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2 - 3yz\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(3y^2 - 3zx\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(3z^2 - 3xy\right)$$

$$= 6x + 6y + 6z$$

ఉదాహరణ 4 : $\overline{f}(x,y,z) = x^3z\overline{i} + xy^3\overline{j} + yz^3\overline{k}$, అయితే $\text{div}\,\overline{f}$ కనుక్కోండి.

$$f_1(x,y,z) = x^3z,\ f_2(x,y,z) = xy^3,\ f_3(x,y,z) = yz^3$$

$$\therefore \frac{\partial f_1}{\partial x} = 3x^2z,\ \frac{\partial f_2}{\partial y} = 3xy^2,\ \frac{\partial f_3}{\partial z} = 3yz^2$$

$$\overline{f}(x,y,z)=f_1(x,y,z)\overline{i}+f_2(x,y,z)\overline{j}+f_3(x,y,z)\overline{k}$$

$$\therefore \text{div}\ \overline{f}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}$$

$$=3x^2z+3xy^2+3yz^2$$

ఉదాహరణ 5 : $\overline{A}=2xz^2\overline{i}-yz\overline{j}+3xz^3\overline{k}$, అయితే **(1, 1, 1)** వద్ద *Curl* $\overline{A}$ కనుక్కోండి.

$$\text{curl}\ \overline{A}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2xz^2 & -yz & 3xz^3\end{vmatrix}$$

$$=\overline{i}(0+y)-\overline{j}\left(3z^3-4xz\right)+\overline{k}(0-0)$$

$$=y\overline{i}+\left(4xz-3z^3\right)\overline{j}$$

(1, 1, 1) వద్ద *Curl* $\overline{A}=\overline{i}+\overline{j}$

ఉదాహరణ 6 : $\overline{f}=3xyz^3\overline{i}+4x^3y\overline{j}-xy^2z\overline{k}$ అయితే $(-1,2,1)$ వద్ద *Curl* $\overline{f}$ కనుక్కోండి.

$$\text{curl}\ \overline{f}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 3xyz^3 & 4x^3y & -xy^2z\end{vmatrix}$$

$$\overline{i}(-2xyz-0)-\overline{j}\left(-y^2z-9xyz^2\right)+\overline{k}\left(12x^2y-3xz^3\right)$$

$(-1,2,1)$ వద్ద *Curl* $\overline{f}=4\overline{i}+15\overline{j}+27\overline{k}$

సూచించిన సమస్యలు :

1. $\phi(x,y,z)=x^3+y^3+3xyz$ అయితే $(1,\ 1,\ -2)$ వద్ద grad ϕ కనుక్కోండి.

2. $\phi(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$ అయితే $(2,\ 1,\ -2)$ వద్ద grad ϕ కనుక్కోండి.

3. $\overline{f}(x,y,z)=x^2y\overline{i}-2xz\overline{j}+2yz\overline{k}$ అయితే $(1,\ 1,1)$ వద్ద div $\overline{f}$ కనుక్కోండి.

4. $\overline{f}(x,y,z) = xy^2\overline{i} + 2x^2yz\overline{j} + 3xyz^2\overline{k}$ అయితే $(1,-1,1)$ వద్ద $\text{div}\,\overline{f}$ విలువ కనుక్కోండి.

5. $\overline{f}(x,y,z) = \left(3x^2y - z\right)\overline{i} + \left(xz^3 + y^4\right)\overline{j} - 2x^3z^2\overline{k}$ అయితే $(2,-1,0)$ వద్ద *Curl* $\overline{f}$ విలువ కనుక్కోండి.

6. $u = x^2 + y^2 + z^2$ అయితే *Curl grad u* కనుక్కోండి.

రచయిత

శ్రీ ఆరెళ్ళ సత్యనారాయణ మూర్తి

ప్రయోగము - 14

గ్రీన్ సిద్ధాంతము - అనువర్తకాలు

ఉద్దేశ్యము : XY - తలములో ఒక ప్రదేశము నందు దత్త సదిశా ప్రమేయమునకు గ్రీన్ సిద్ధాంతమును సరిచూచుట.

ఉపయోగించు నిర్వచనములు, సిద్ధాంతము :

1. **నిర్వచనము (రేఖా సమాకలని) :** ఒక వక్రము పై సమాకలని విలువ కనుగొంటే, ఆ సమాకలనిని రేఖా సమాకలని అని అంటాము.

   $\bar{r} = \bar{f}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$ అనేది A, B లను కలుపు C అను మృదు వక్రము అనుకొందాము.

   $d\bar{r}$ అనగా $\dfrac{d\bar{r}}{dt}\,dt = \left(\dfrac{dx}{dt}\bar{i} + \dfrac{dy}{dt}\bar{j} + \dfrac{dz}{dt}\bar{k}\right)dt$ దీన్ని $dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k}$ అని కూడా వ్రాస్తాము. C పై A అను స్థిర బిందువు నుంచి C పై P అను బిందువు చాప దూరం (Arc length) s అయితే $\dfrac{d\bar{r}}{dt} = \bar{T}$ అనేది C అను వక్రానికి $\bar{r}$ అను బిందువు వద్ద యూనిట్ స్పర్శ సదిశ అవుతుంది.

   బిందువు $\bar{r}$ వద్ద స్పర్శ రేఖ (Tangential Vector) పై $\bar{T}$ ఉంటుంది. C పై $\bar{F}(\bar{r})$ అవిచ్ఛిన్న సదిశ ప్రమేయము. స్పర్శ రేఖ పై $\bar{F}$ యొక్క అంశము $\bar{F}\cdot\dfrac{d\bar{r}}{ds}$. C పై A నుంచి B కు $\bar{F}\cdot\dfrac{d\bar{r}}{ds}$ యొక్క సమాకలనిని $\int_A^B \bar{F}\cdot\dfrac{d\bar{r}}{ds}\,ds = \int_A^B \bar{F}\cdot d\bar{r}$ అని వ్రాస్తాము. దీన్ని A నుంచి B కు C పై $\bar{F}$ యొక్క రేఖా సమాకలని అని అంటాము.

2. **గ్రీన్ సిద్ధాంతము :** XY - తలంలో లక సంవృత వక్రము C తో ఆవరించబడిన సంవృత ప్రదేశము S అనుకొనుము. P, Q లు S లో xy లలో వాస్తవమయ్యే అవకలనీయ ప్రమేయములు అయితే

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \int\!\!\int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

(C పై ఒక వ్యక్తి కదులుచున్నపుడు తనకు S ఎడమ వైపు ఉండునట్లుగా రేఖా సమాకలనము చేయవలెను)

పద్ధతి :

దశ 1 : (ఖండిత అవిచ్ఛిన్న వక్రము C ను $C_1, C_2, C_3, \cdots, C_r$ అను భాగములుగా, C_i తొలి బిందువు C_{i-1} తుది బిందువు ($i = 2, 3, \cdots, r$), C_r తుది బిందువు C_1 తొలి బిందువు అగునట్లు విభజిద్దాము.

దశ 2 : $\alpha_i = \int_{C_i} P\,dx + Q\,dy,\ i = 1, 2, \cdots, r.$ విలువను కనుగొందాము.

దశ 3 : $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ లను కలిపితే $\oint_C P\,dx + Q dy$ వస్తుంది.

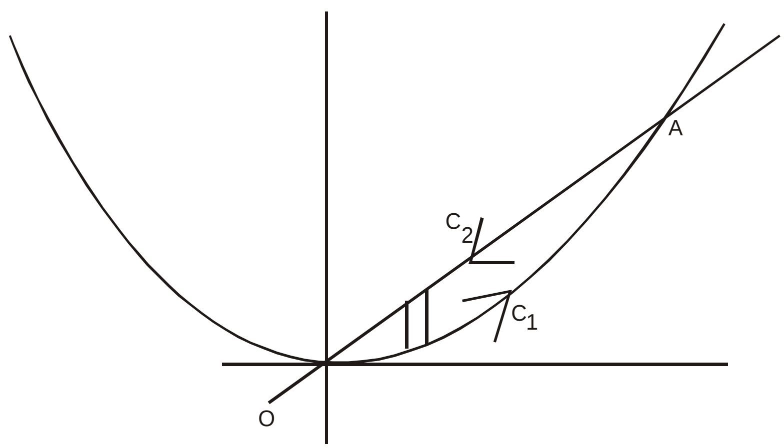
దశ 4 : $\dfrac{\partial Q}{\partial x}, \dfrac{\partial P}{\partial y}$ విలువలు కనుగొందాము.

దశ 5 : $\displaystyle\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$ విలువను కనుగొందాము.

దశ 6 : దశ 3, దశ 6లలో వచ్చిన విలువలు సమానమని గమనిద్దాము.

ఉదాహరణ : $\overline{F} = \left(xy + y^2\right)\overline{i} + x^2\overline{j}$ అయితే $y = x$, $y = x^2$ లతో పరిబద్ధమగు ప్రదేశములో గ్రీన్ సిద్ధాంతమును సరి చూడండి.

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$ అని సరిచూడాలి.



$P = xy + y^2, \ Q = x^2$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x + 2y, \ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

O నుంచి A వకు వక్రభాగము C_1 అనీ

A నుంచి O కు వక్రభాగము C_2 అనీ అనుకొందాము.

C_1 పై $y = x^2 \Rightarrow dy = 2x\,dx$

x విలువ 0 నుంచి 1కు మారుతుంది.

$$\therefore \int_{C_1} Pdx + Qdy = \int_0^1 \left(x \cdot x^2 + x^4 + x^2 \cdot 2x\right)dx = \int_0^1 \left(3x^3 + x^4\right)dx$$

$$= \left(\frac{3}{4}x^4 + \frac{x^5}{5}\right)_0^1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20}$$

C_2 పై $y = x, \Rightarrow dy = dx$

x విలువ 1 నుంచి 0కు మారుతుంది.

$$\int_{C_2} Pdx + Qdy = \int_1^0 \left[x \cdot x + x^2 + x^2\right]dx = \int_1^0 3x^2 dx = \left(x^3\right)^0$$

$$= 0 - 1 = -1$$

$$\therefore \text{LHS} = \int_C Pdx + Qdy = \int_{C_1} Pdx + Qdy + \int_{C_2} Pdx + Qdy$$

$$= \frac{19}{20} - 1 = -\frac{1}{20}$$

$$\text{RHS} = \int\int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \int_{x=0}^{1}\int_{y=x^2}^{x} (x - 2y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(xy - y^2\right)_{y=x^2}^{x} dx = \int_0^1 \left[\left(x^2 - x^2\right) - \left(x^3 - x^4\right)\right]dx = \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right)_0^1$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = -\frac{1}{20}$$

$\therefore$ LHS = RHS

$\therefore$ గ్రీన్ సిద్ధాంతమును సరి చూడబడింది.

సూచించిన సమస్యలు :

1. $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$ లతో పరిబద్ధమైన ప్రదేశము సరిహద్దు C అయితే గ్రీన్ సిద్ధాంతమును $\oint_C (3x^2-8y^2)dx+(4y-6xy)dy$ కు సరిచూడండి.

2. $y=x^2$, $y^2=x$ లతో పరిబద్ధమైన ప్రదేశము సరిహద్దు C అయితే గ్రీన్ సిద్ధాంతమును $\oint_C (2xy-x^2)dx+(x^2+y^2)dy$ కు సరిచూడండి.

3. (0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2) శీర్షాలుగా గల చతురస్రము C అయితే $\oint_C (x^2-xy^3)dx+(y-2xy)dy$ కు గ్రీన్ సిద్ధాంతమును సరిచూడండి.

4. $x=\pm 1, y=\pm 1$ లతో ఏర్పడిన చతురస్రము C అయితే $\oint_C (x^2+xy)dx+(x^2+y^2)dy,$ కు గ్రీన్ సిద్ధాంతమును సరిచూడండి.

5. $y^2=8x$, $x=2$ లతో ఏర్పడిన వక్రము C అయితే $\oint_C (x^2-2xy)dx+(x^2y+3)dy,$ కు గ్రీన్ సిద్ధాంతమును సరిచూడండి.

రచయిత

శ్రీ ఆరెళ్ళ సత్యనారాయణ మూర్తి

ప్రయోగము - 15

గౌస్ అపసరణ సిద్ధాంతము – అనువర్తనాలు

ఉద్దేశ్యము : దత్త సదిశా ప్రమేయమునకు గౌస్ అపసరణ సిద్ధాంతమును సరిచూచుట.

ఉపయోగించు నిర్వచనాలు, సిద్ధాంతము :

1. నిర్వచనము (ఉపరితల సమాకలని) :

ఒక ఉపరితలము పై సమాకలని విలువ కనుగొనగలిగితే, ఆ సమాకలనిని తల సమాకలని అంటాము.

S అను ఉపరితలముతో పరిబద్ధమగు ప్రదేశములో నిర్వచించబడిన ఒక సదిశా ప్రమేయము $\overline{F}$ అనుకొనుము. S ను $\delta S_1, \delta S_2, \cdots, \delta S_n$ వైశాల్యములుగా గల ఉప ప్రదేశములు $S_1, S_2, \ldots\ldots, S_n$ గా విభజించుము. S_i పై P_i ఏదైనా బిందువు. P_i వద్ద S_iకు $\overline{N}_i$ అనేది బాహ్యముగా గీసిన యూనిట్ అభిలంబ సదిశ. $\delta S_i \overline{N}_i$ ను $\delta \overline{A}_i$తో సూచించుము. $I_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}(P_i) \cdot \overline{N}_i \cdot \delta S_i$ అనుకొందాము. $\underset{n\to\infty}{Lt} I_n$ అను అవధి వ్యవస్థితమైతే, ఈ అవధిని S పై $\overline{F}$ యొక్క అభిలంబ తల సమాకలని అంటాము. దీన్ని $\int_S \overline{F} \cdot d\overline{A}$ లేక $\int_S \overline{F} \cdot \overline{N}\, ds$ తో సూచిస్తాము.

2. గౌస్ అపసరణ సిద్ధాంతము :

ఒక సంవృత ఉపరితలము Sను కలిగిన ప్రదేశములో $\overline{F}$ అనే సదిశా ప్రమేయము అవిచ్ఛిన్నము, ప్రథమ తరగతి పాక్షిక అవకలజాలను కలిగి, Sతో పరివృతమైన ప్రదేశము V అయితే

$$\iiint_V div\overline{F} dv = \iint_S \overline{F} \cdot \overline{N} ds$$

($\overline{N}$ అనేది S యొక్క ఏదైనా బిందువు వద్ద బాహ్యముగా గీసిన యూనిట్ అభిలంబ సదిశ).

సూత్రము : $\overline{F} = F_1\overline{i} + F_2\overline{j} + F_3\overline{k}, \Rightarrow \ div\overline{F} = \dfrac{\partial F_1}{\partial x} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y} + \dfrac{\partial F_3}{\partial z}$ ------------- (A)

పద్ధతి :

1వ అంచ : సంవృత ఉపరితలము Sతో పరిబద్ధమైన ప్రదేశము V అనీ, Sను $S_1, S_2, \cdots, S_n$ అను ఉప ప్రదేశములుగా $\alpha_i = \iint_{S_i} \overline{F} \cdot \overline{N} ds$, $(i = 1, 2, \cdots, r)$ విలువ కనుగొనునట్లు విభజిద్దాము.

S_i, XY తలమునకు సమాంతరముగా ఉంటే $\overline{N} = \overline{K}$ లేక $\overline{N} = -\overline{K}$,

S_i, YZ తలమునకు సమాంతరముగా ఉంటే $\overline{N} = \overline{J}$ లేక $-\overline{J}$

S_i, ZX తలమునకు సమాంతరముగా ఉంటే $\overline{N}=\bar{i}$ లేక $-\bar{i}$

($\overline{N} // \overline{OZ}$ అయితే $\overline{N}=\overline{K}$, $\overline{N} // \overline{ZO}$ అయితే $\overline{N}=-\overline{K}$)

ఇదే విధముగా మిగిలినవి ఉంటాయి.

ఏ నిరూపక తలానికి S_i సమాంతరంగా లేకపోతే,

S_iకు లంబంగా లేని నిరూపక తలంలోకి S_iను విక్షేపిస్తాము.

2వ అంచ : $1 \le i \le r$ అయితే α_i విలువ కనుగొంటాము.

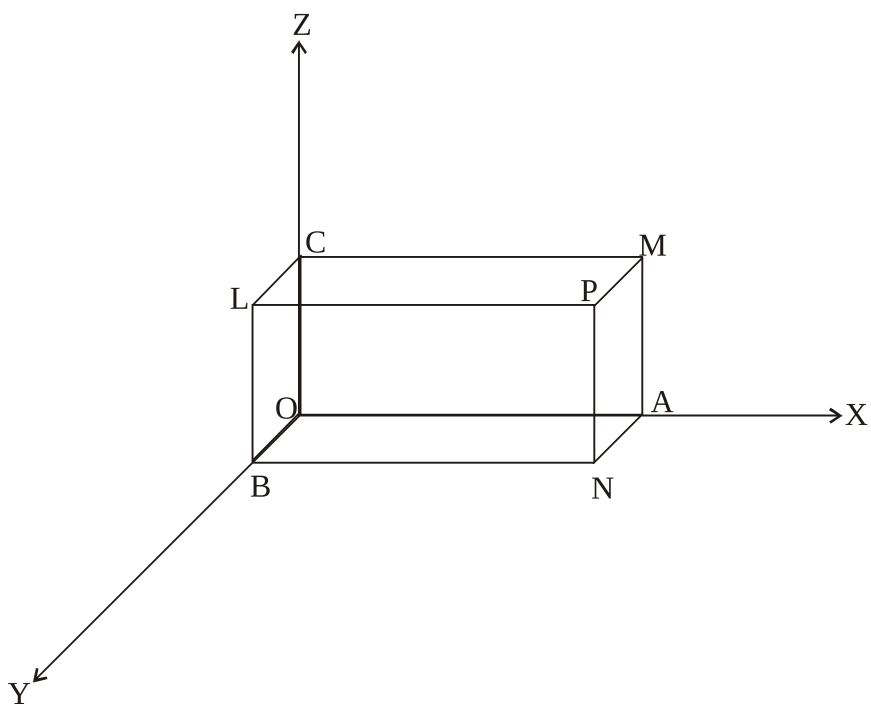
3వ అంచ : $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ లు కనుగొని $\int\int_S \overline{F} \cdot \overline{N}\, ds$ కనుగొంటాము.

4వ అంచ : ఫార్ములా (A) నుపయోగించి $\operatorname{div} \overline{F}$ విలువ కనుగొంటాము.

5వ అంచ : $\int_V \operatorname{div} \overline{F}\, dv = \int\int\int_V \operatorname{div} \overline{F}\, dx\, dy\, dz$ విలువ కనుగొంటాము.

6వ అంచ : దశ 3, దశ 5లలోని విలువలు సమానమని గమనిద్దాము.

ఉదాహరణ : $\overline{F}=2xy\,\bar{i}+yz^2\,\bar{j}+xz\bar{k}$. $x=0,\ y=0,\ z=0\ x=z,\ y=1, 2=3$ లతో ఏర్పడిన సమాంతర ఫలకము ఉపరితలము S అయితే గౌస్ అపసరణ సిద్ధాంతమును సరి చూడండి.



(i) $S_i : OANB$ పై :

$$Z=0,\ \overline{N}=-\overline{K},\ ds=dxdy$$

$\overline{F} \cdot \overline{N} = 0$

$$\therefore \int_{S_1} \overline{F} \cdot \overline{N} \, ds = 0$$

(ii) S_2 : PMCL పై

$$Z = 3, \ \overline{N} = \overline{k}, \ dS = dx dy$$

$$\overline{F} \cdot \overline{N} = x z = 3x$$

$$\therefore \int_{S_2} \overline{F} \cdot \overline{N} \, ds = \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{1} 3x \, dy \, dx = \int_{x=0}^{2} (3xy)_{y=0}^{1} dx = \int_0^2 3x \, dx$$

$$= \left(\frac{3x^2}{2} \right)_0^2 = 6$$

(iii) S_3 : OBLC పై

$$x = 0, \ \overline{N} = -\overline{i}, \ dS = dy \, dz$$

$$\therefore \ \overline{F} \cdot \overline{N} = -2xy = 0$$

$$\therefore \int_{S_3} \overline{F} \cdot \overline{N} \, dS = 0$$

(iv) S_4 : AMPN :

$$x = 2, \ \overline{N} = \overline{i}, \ dS = dy \, dz; \ \overline{F} \cdot \overline{N} = 2xy = 4y$$

$$\int_{S_4} \overline{F} \cdot \overline{N} \, ds = \int_{z=0}^{3} \int_{y=0}^{1} 4y \, dy dz = \int_{z=0}^{3} \left(2y^2\right)_{y=0}^{1} dz$$

$$= \int_0^3 2 \, dz = [\, 2z \,]_0^3 = 6$$

(v) S_5 : OAMC పై

$y = 0,\ \overline{N} = -\overline{j}$

$\overline{F}\cdot\overline{N} = 0,\ dS = dx\ dz$

$\therefore \int_{S_5} \overline{F}\cdot\overline{N}\,ds = 0$

(vi) S_6: PLBN : $\overline{N} = \overline{j},\ y = 1$

$\therefore \overline{F}\cdot\overline{N} = yz^2 = z^2 \qquad ds = dx\ dz$

$$\therefore \int_{S_6} \overline{F}\cdot\overline{N}\,ds = \int_{x=0}^{2}\int_{z=0}^{3} z^2 dz\,dx = \int_{x=0}^{2}\left(\frac{z^3}{3}\right)_{z=0}^{3} dx = (9x)_0^2 = 18$$

$$\therefore \int_S \overline{F}\cdot\overline{N}\,ds = \int_{S_1} \overline{F}\cdot\overline{N}\,ds + \int_{S_2} \overline{F}\cdot\overline{N}\,ds + \int_{S_3} \overline{F}\cdot\overline{N}\,ds + \int_{S_4} \overline{F}\cdot\overline{N}\,ds + \int_{S_5} \overline{F}\cdot\overline{N}\,ds + \int_{S_6} \overline{F}\cdot\overline{N}\,ds$$

$$= 0 + 6 + 0 + 6 + 0 + 18 = 30 \text{ ------------ (1)}$$

$$\operatorname{div}\overline{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) + \frac{\partial}{\partial y}\left(yz^2\right) + \frac{\partial}{\partial z}(xz) = 2y + z^2 + x$$

$$\therefore \int_V \operatorname{div}\overline{F}\,dv = \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{3}\left(2y + z^2 + x\right)dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{1}\left(2yz + \frac{z^3}{3} + zx\right)_{z=0}^{3} dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{z}\int_{y=0}^{1}(6y + 9 + 3x)\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{z} \left(3y^2 + 9y + 3xy\right)_{y=0}^{1} dx$$

$$= \int_{x=0}^{2} (3 + 9 + 3x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{2} (12 + 3x)\,dx$$

$$= \left(12x + \frac{3x^2}{2}\right)_0^2 = 24 + 6 = 30 \text{ ---------- (2)}$$

$$\therefore \int_S \overline{F} \cdot \overline{N}\,ds = \int_V \operatorname{div} \overline{F}\,dV$$ ((1), (2)ల నుండి)

$\therefore$ గౌస్ అపసరణ సిద్ధాంతము సరి చూడబడింది.

సూచించిన సమస్యలు :

1. $\overline{F} = \left(x^3 - yz\right)\overline{i} - 2x^2 y\overline{j} + z\overline{k}$ నిరూపక తలాలతోను $x = y = z = a$ అను తలముతోను పరిబద్ధమైన ప్రదేశము S అయితే గౌస్ అపసరణ సిద్ధాంతాన్ని సరి చూడండి.

2. $\overline{F} = 4xz\overline{i} - y^2\overline{j} + yz\overline{k}$, $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x = 1,\ y = 1,\ z = 1$ అను తలాలతో ఏర్పడిన ఘనము పై గౌస్ సిద్ధాంతాన్ని సరి చూడండి.

3. $\overline{F} = x^2\overline{i} + y^2\overline{j} + z^2\overline{k}$, $0 \le x,\ y, z \le 1$ అను ఘనము పై గౌస్ సిద్ధాంతాన్ని సరి చూడాలి.

4. $\overline{F} = \left(x^2 - yz\right)\overline{i} + \left(y^2 - zx\right)\overline{j} + \left(z^2 - xy\right)\overline{k}$, $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ 0 \le z \le c$ లతో ఏర్పడిన సమాంతర ఫలకము పై గౌస్ సిద్ధాంతాన్ని సరి చూడండి.

5. $\overline{F} = 2xy\overline{i} - yz\overline{j} + x^2\overline{x}$, నిరూపక తలాలతోను, $x = a,\ y = a,\ z = a$ అను తలాలతోను ఏర్పడిన ప్రదేశము S పై గౌస్ సిద్ధాంతాన్ని సరి చూడండి.

రచయిత

శ్రీ ఆరెళ్ళ సత్యనారాయణ మూర్తి

ప్రయోగము - 16

స్టోక్ సిద్ధాంతము - అనువర్తనాలు

ఉద్దేశ్యము : దత్త సదిశ ప్రమేయమునకు స్టోక్ సిద్ధాంతాన్ని సరి చూచుట.

1. **నిర్వచనము (రేఖా సమాకలని) :** ఒక వక్రము పై సమాకలని విలువ కనుగొంటే, ఆ సమాకలనిని రేఖా సమాకలని అని అంటాము.

$\bar{r} = \bar{f}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$ అనేది A, B లను కలుపు C అను మృదు వక్రము అనుకొందాము.

$d\bar{r}$ అనగా $\frac{d\bar{r}}{dt}dt = \left(\frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}\right)dt$ దీన్ని $dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k}$ అని కూడా వ్రాస్తాము. C పై A అను స్థిర బిందువు నుంచి C పై P అను బిందువు చాప దూరం (Arc length) s అయితే $\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{T}$ అనేది C అను వక్రానికి $\bar{r}$ అను బిందువు వద్ద యూనిట్ స్పర్శ సదిశ అవుతుంది.

బిందువు $\bar{r}$ వద్ద స్పర్శ రేఖ (Tangential Vector) పై $\bar{T}$ ఉంటుంది. C పై $\bar{F}(\bar{r})$ అవిచ్ఛిన్న సదిశ ప్రమేయము. స్పర్శ రేఖ పై $\bar{F}$ యొక్క అంశము $\bar{F}\cdot\frac{d\bar{r}}{ds}$. C పై A నుంచి B కు $\bar{F}\cdot\frac{d\bar{r}}{ds}$ యొక్క సమాకలనిని $\int_A^B \bar{F}\cdot\frac{d\bar{r}}{ds}ds = \int_A^B \bar{F}\cdot d\bar{r}$ అని వ్రాస్తాము. దీన్ని A నుంచి B కు C పై $\bar{F}$ యొక్క రేఖా సమాకలని అని అంటాము.

2. **నిర్వచనము (ఉపరితల సమాకలని) :**

ఒక ఉపరితలము పై సమాకలని విలువ కనుగొనగలిగితే, ఆ సమాకలనిని తల సమాకలని అంటాము.

S అను ఉపరితలముతో పరిబద్ధమగు ప్రదేశములో నిర్వచించబడిన ఒక సదిశా ప్రమేయము $\bar{F}$ అనుకొనుము. S ను $\delta S_1, \delta S_2, \cdots, \delta S_n$ వైశాల్యములుగా గల ఉప ప్రదేశములు $S_1, S_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, S_n$ గా విభజించుము. S_i పై P_i ఏదైనా బిందువు. P_i వద్ద S_i కు $\bar{N}_i$ అనేది బాహ్యముగా గీసిన యూనిట్ అభిలంబ సదిశ. $\delta S_i \bar{N}_i$ ను $\delta \bar{A}_i$ తో సూచించుము. $I_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}(P_i)\cdot\bar{N}_i\cdot\delta S_i$ అనుకొందాము. $\underset{n\to\infty}{Lt} I_n$ అను అవధి వ్యవస్థితమైతే, ఈ అవధిని S పై $\bar{F}$ యొక్క అభిలంబ తల సమాకలని అంటాము. దీన్ని $\int_S \bar{F}\cdot d\bar{A}$ లేక $\int_S \bar{F}\cdot\bar{N}\,ds$ తో సూచిస్తాము.

3. **స్టోక్ సిద్ధాంతము :** సంవృతం, ఖండించుకోని వక్రము C తో పరిబద్ధమైన ఉపరితలము S. $\bar{F}$ అవకలనీయ సదిశ బిందు ప్రమేయము అయితే $\oint_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = \iint_S \text{curl}\,\bar{F}\cdot\bar{N}\,ds$.

($\bar{N}$ అనేది S కు బాహ్యముగా గీసిన యూనిట్ అభిలంబ సదిశ. C అనేది ధన దిశలో S యొక్క సరిహద్దు)

సూత్రము : $\overline{F} = F_1\overline{i} + F_2\overline{j} + F_3\overline{k}$, అయితే

$$\text{Curl } \overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \text{---------------} (B)$$

పద్ధతి :

1వ అంచ : (ఖండిత అవిచ్ఛిన్న) వక్రము C ను $C_1, C_2, \cdots, C_r$ అను భాగములుగా C_i తొలి బిందువు C_{i-1} తుది బిందువు, $i = 2, 3, \cdots, r$; C_r తుది బిందువు C_1 తొలి బిందువు C అగునట్లు విభజిద్దాము.

2వ అంచ : $i = 1, 2, 3, \cdots, r$ కు $\alpha_i = \int_{C_i} F_1\,dx + F_2 dy + F_3 dz$ విలువ కనుగొంటాము.

3వ అంచ : $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ లు కలిపితే $\oint_C \overline{F}\cdot d\overline{r}$ వస్తుంది.

4వ అంచ : ఫార్మ్యూలా (B) ఉపయోగించి $Curl\ \overline{F}$ విలువ కనుక్కొంటాము.

5వ అంచ : S ను $S_1, S_2, \cdots, S_r$ అను ఉపరితలాలుగా $\int_S Curl\ \overline{F}\cdot\overline{N}ds = \sum_{i=1}^{r}\int_{S_i} Curl\ \overline{F}\cdot\overline{N}ds$ అగునట్లు విభజిద్దాము.

(S_i, XY తలానికి సమాంతరంగా ఉంటే $\overline{N} = \overline{K}$ లేక $-\overline{K}$

($\overline{N} // \overline{OZ}$ అయితే $\overline{N} = \overline{K}$, $\overline{N} // \overline{ZO}$ అయితే $\overline{N} = -\overline{K}$)

ఇదే విధముగా $\overline{N} = \pm\overline{i}, \pm\overline{j}$)

6వ అంచ : 3వ అంచ, 5వ అంచ లలో వచ్చిన విలువలు సమానమని గమనిద్దాము.

ఉదాహరణ :

$\overline{F} = (2x - y)\overline{i} - yz^2\overline{j} - y^2 z\overline{k}$, S అనేది $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ అను గోళపు ఊర్ధ్వ ఉపరితలము, దీని సరిహద్దు C. అయితే స్టోక్ సిద్ధాంతాన్ని సరి చూడండి.

$\oint_C \overline{F}\cdot d\overline{r} = \int_S \text{curl } \overline{F}\cdot\overline{N}\ dS$ అని సరి చూడాలి.

C అనేది $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ అను వృత్తము. ఈ వృత్త పరామితీయ సమీకరణాలు $x = \cos t,\ y = \sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$.

$$\therefore \overline{F} = (2x - y)\overline{i} - yz^2\overline{j} - y^2z\overline{k} = (2x - y)\overline{i} = (2\cos t - \sin t)\overline{i}$$

$$\overline{F} \cdot dt = (2x - y)dx = (2\cos t - \sin t)(-\sin t)dt = \left(-2\sin t\cos t + \sin^2 t\right)dt$$

$$\text{LHS} = \oint_C \overline{F} \cdot dt = \int_0^{2\pi} \left(-2\sin t\cos t + \sin^2 t\right)dt = \int_0^{2\pi} \left[-\sin 2t + \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)\right] dt$$

$$= \left[\frac{\cos 2t}{2} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

XY- తలములో S యొక్క విక్షేపము R అనుకొంటాము.

$$\text{Curl}\,\overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial k} \\ 2x - y & -yz^2 & -y^2z \end{vmatrix} = \overline{i}\,(-2yz + 2yz) - \overline{j}\,(0 - 1) + \overline{k}\,(0 + 1) = \overline{k}$$

$$\text{RHS} = \int_S \text{curl}\,\overline{F} \cdot \overline{N}\,ds = \int_S \overline{k} \cdot \overline{N}ds = \int\int_R dx\, dy, \; \left(\text{since } \overline{k} \cdot \overline{N}\, ds = dx\,dy\right)$$

$$= \int_{x=-1}^{1} \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy - dx = \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}\, dx = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$= 4\left[\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1} x\right]_0^1 = 4 \cdot \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \pi$$

$\therefore$ LHS=RHS

$\therefore$ స్టోక్ సిద్ధాంతము సరి చూడబడింది.

సూచించిన సమస్యలు :

1. $\bar{F} = -y^3\bar{i} + x^3\bar{j}$ అనేది $x^2 + y^2 \le 1, z = 0$ అయితే స్టోక్ సిద్ధాంతమును సరి చూడండి.

2. $\bar{F} = 2y\bar{i} + 3x\bar{j} - z^2\bar{k}$, S అనేది $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ అను గోళము ఊర్ధ్వ భాగము, దీని సరిహద్దు C అయితే స్టోక్ సిద్ధాంతమును సరి చూడండి.

3. $\bar{F} = x^2\bar{i} + xy\bar{j}$, $z = 0$ తలములో $x = 0, y = 0, x = a, y = a$ లతో ఏర్పడిన చతురస్రము పై స్టోక్ సిద్ధాంతాన్ని సరి చూడండి.

4. $\bar{F} = xy\bar{i} + xy^2\bar{j}$, XY తలంలో $(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)$ శీర్షాలుగా గల చతురస్రము C అయితే స్టోక్ సిద్ధాంతాన్ని సరి చూడండి.

5. $\bar{F} = y^2\bar{i} + x^2\bar{j} - (x+z)\bar{k}$, C అణేది $(0,0,0), (1,0,0), (1,1,0)$ శీర్షాలుగా గల త్రిభుజమైతే స్టోక్ సిద్ధాంతాన్ని సరి చూడండి.

రచయిత

శ్రీ ఆరెళ్ళ సత్యనారాయణ మూర్తి